第 5 讲　不等式

感悟高考　明确考向

(2010·山东)若对任意 $x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$ 恒成立，则 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$.

解析　$\because a\geqslant\frac{x}{x^2+3x+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}$对任意 $x>0$ 恒成立，

设 $u=x+\frac{1}{x}+3$，$\therefore$只需 $a\geqslant\frac{1}{u}$恒成立即可.

$\because x>0$，$\therefore u\geqslant 5$(当且仅当 $x=1$ 时取等号).

由 $u\geqslant 5$ 知 $0<\frac{1}{u}\leqslant\frac{1}{5}$，

$\therefore a\geqslant\frac{1}{5}$.

考题分析　本题以不等式恒成立为背景考查了基本不等式、二次不等式恒成立等问题．若将问题转化为求$\dfrac{x}{x^2+3x+1}$的最大值，可作如下变形：$\dfrac{x}{x^2+3x+1}=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}+3}\leqslant\dfrac{1}{5}$；若将问题转化为：$ax^2+(3a-1)x+a\geqslant 0$ 对任意 x 恒成立，则利用二次不等式恒成立解决．体现了转化与化归的数学思想方法．

易错提醒　(1)忽视不等号方向的变化，易错答为：$(-\infty, \frac{1}{5}]$.

(2)在利用基本不等式时，要注意验证正、定、等.

(3)在研究 $ax^2+(3a-1)x+a\geq 0$ 对任意 $x>0$ 恒成立时，易忽略对对称轴 $x=-\frac{3a-1}{2a}<0$ 的约束.

主干知识梳理

1．不等式的基本性质

(1)对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

(2)传递性：$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$.

(3)加法法则：$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.

(4)乘法法则：$a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$.

$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$.

(5)同向不等式可加性：$a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

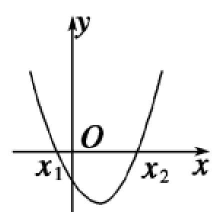
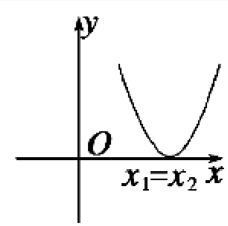
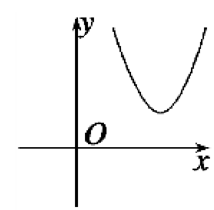
(6)同向同正可乘性：$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

(7)乘方法则：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n(n\in \mathbf{N}$，$n\geqslant 2)$.

(8)开方法则：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in \mathbf{N}$，$n\geqslant 2)$.

2．一元二次不等式的解法

解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$，可利用一元二次方程，一元二次不等式和二次函数间的关系．一元二次不等式的解集如下表所示：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两相异实根 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\|x>x_2$ 或 $x<x_1\}$	$\{x\|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq-\frac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
不等式 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

3.简单分式、指数、对数不等式的解法

(1)简单分式不等式的解法

①变形$\Rightarrow\dfrac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)g(x)>0(<0)$；

②变形$\Rightarrow\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0(\leqslant 0)\Leftrightarrow f(x)g(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$且 $g(x)\neq 0$.

(2)简单指数不等式的解法

①当 $a>1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$；

②当 $0<a<1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

(3)简单对数不等式的解法

①当 $a>1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$且 $f(x)>0$，$g(x)>0$；

②当 $0<a<1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)<g(x)$且 $f(x)>0$，$g(x)>0$.

4．几个重要不等式

(1)$|a|\geqslant 0$，$a^2\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$.

(2)$a^2+b^2\geqslant 2ab(a\in\mathbf{R})$.

(3)$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0，b>0)$.

(4)$ab\leqslant(\dfrac{a+b}{2})^2(a，b\in\mathbf{R})$.

(5) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{2ab}{a+b}(a>0，b>0)$.

5．不等式的证明基础

(1)不等式定义：$a-b>0\Leftrightarrow a>b$，

$a-b=0\Leftrightarrow a=b$，$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

(2)不等式的基本性质.

(3)基本不等式

①$a^2\geqslant 0$，$(a-b)^2\geqslant 0$，$|a|\geqslant 0$.

②均值不等式：$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0，b>0)$.

③几个常用不等式：$a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2(a>0$，当 $a=1$ 时等号成立)；$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2(a，b\in\mathbf{R}$，当 $a=b$ 时等号成立)；

$|a+b|\leqslant|a|+|b|(ab\geqslant 0$ 时等号成立)；

$|a-b|\leqslant|a|+|b|(ab\leqslant 0$ 时等号成立).

热点分类突破

题型一　比较大小与不等式正误的判断

例 1　(1)设 a、b 是非零实数，若 $a<b$，则下列不等式成立的是　　(　　)

A．$a^2<b^2$　　B．$ab^2<ba^2$

C．$\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{ba^2}$　　D．$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$

(2)若$|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，则$|a+b|+|a-b|$与 2 的大小关系为________________.

思维启迪　(1)可以用不等式的性质，注意到 $a^2b^2>0$，或用特殊值法.

(2)利用绝对值不等式的性质.

解析 (1)方法一 $\because a^2b^2>0$ 且 $a<b$，

$\therefore \dfrac{a}{a^2b^2}<\dfrac{b}{a^2b^2}$，即$\dfrac{1}{ab^2}<\dfrac{1}{a^2b}$，故选 C.

方法二 令 $a=-2$，$b=1$，符合 $a<b$，但 $a^2>b^2$，故 A 不正确；令 $a=1$，$b=2$，符合 $a<b$，但 $ab^2>ba^2$，$\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{b}$，

故 B、D 不正确，故选 C.

(2)由绝对值不等式的性质：

若$(a+b)(a-b)\geqslant 0$，

则$|a+b|+|a-b|=|(a+b)+(a-b)|=2|a|\leqslant 2$.

若$(a+b)(a-b)<0$，

则$|a+b|+|a-b|=|(a+b)-(a-b)|=2|b|\leqslant 2$.

综上，得$|a+b|+|a-b|\leqslant 2$.

答案 （1）C（2）$|a+b|+|a-b|\leqslant 2$

探究提高　(1)判断不等式的正误，常利用不等式的性质、基本不等式、函数的单调性和特殊值法、作差法等.

(2)比较大小常利用：①函数的单调性法；②图象法；③不等式的性质或基本不等式法；④作差法；⑤特殊值法;⑥特别强调$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$等号成立的充要条件是近年高考的新视角.

变式训练 1　(1)(2009·浙江)已知 a，b 是实数，则“$a>0$ 且 $b>0$”是“$a+b>0$ 且 $ab>0$”的　　(　　)

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

(2)设 $a+b<0$，且 $a>0$，则　　(　　)

A．$a^2<-ab<b^2$　B．$b^2<-ab<a^2$

C．$a^2<b^2<-ab$　D．$ab<b^2<a^2$

解析 (1)当 $a>0$ 且 $b>0$ 时，一定有 $a+b>0$ 且 $ab>0$.反之，当 $a+b>0$ 且 $ab>0$ 时，一定有 $a>0$，$b>0$.故“$a>0$ 且 $b>0$”是“$a+b>0$ 且 $ab>0$”的充要条件.

(2)取 $a=1$，$b=-2$ 检验，A 正确；B、C、D 均不正确，故选 A.

答案 （1） C （2）A

题型二　解不等式

例 2　解关于 x 的不等式 $ax^2-(a+1)x+1<0$.

思维启迪　先求出相应方程的根，再就两根的大小进行讨论.

解　原不等式可化为 $(x-1)(ax-1)<0$.

(1)当 $a=0$ 时，原不等式化为 $-x+1<0$，$\therefore x>1$，

所以原不等式的解集为 $\{x|x>1\}$；

(2)当 $a<0$ 时，原不等式化为 $(x-1)(x-\frac{1}{a})>0$，

又 $\frac{1}{a}<0$，$\therefore x<\frac{1}{a}$，或 $x>1$，

所以原不等式的解集为 $\{x|x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1\}$；

(3)当 $a>0$ 时，原不等式化为$(x-1)(x-\frac{1}{a})<0$，

对应方程$(x-1)(x-\frac{1}{a})=0$ 的两根为 1 和$\frac{1}{a}$.

①当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，$\therefore 1<x<\frac{1}{a}$；

②当 $a=1$ 时，原不等式可化为$(x-1)^2<0$，无解；

③当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<1$，$\therefore \frac{1}{a}<x<1$.

综上所述：当 $a<0$ 时，解集为$\{x|x<\frac{1}{a}$或 $x>1\}$；

当 $a=0$ 时，解集为$\{x|x>1\}$；

当 $0<a<1$ 时，解集为$\{x|1<x<\frac{1}{a}\}$；

当 $a=1$ 时，解集为$\varnothing$；

当 $a>1$ 时，解集为$\{x|\frac{1}{a}<x<1\}$.

探究提高　解含参不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$时，讨论的次序：

(1)对 x^2 项的系数 a 分 $a>0$，$a=0$，$a<0$ 进行讨论；

(2)当 $a\neq 0$ 时，对判别式 $\Delta=b^2-4ac$，分 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 进行讨论；

(3)当 $\Delta>0$ 时，对两根 x_1、x_2，分 $x_1>x_2$，$x_1<x_2$ 进行讨论．

变式训练 2　(2009·天津)设 $0<b<1+a$，若关于 x 的不等式$(x-b)^2>(ax)^2$ 的解集中的整数恰有 3 个，则(C)

A．$-1<a<0$　　B．$0<a<1$

C．$1<a<3$　　D．$3<a<6$

解析　$\because (x-b)^2>(ax)^2$，$\therefore (a^2-1)x^2+2bx-b^2<0$，要使 x 的解集中恰有 3 个整数，必须有 $a^2-1>0$.又 $a+1>0$，$\therefore a>1$.不等式变形为$[(a-1)x+b][(a+1)x-b]<0$.

$\because a>1$，$b>0$，$\therefore \dfrac{b}{a-1}>0,0<\dfrac{b}{a+1}<1$，$\therefore \dfrac{b}{1-a}<x<\dfrac{b}{a+1}$，

$\therefore 2<\dfrac{b}{a-1}\leqslant 3$，即 $2a-2<b\leqslant 3a-3$.

$\therefore \begin{cases}3a-3\geqslant b>0,\\2a-2<b<a+1,\end{cases}$　$\therefore \begin{cases}a>1,\\a<3,\end{cases}$　$\therefore 1<a<3$.

题型三　利用基本不等式求最值

例3　求函数 $y=\dfrac{x^4+3x^2+3}{x^2+1}$ 的最小值.

思维启迪　利用基本不等式求最值，设 $t=x^2+1$，化简原不等式为基本不等式的结构形式，这是解本题的关键.

$\boxed{\text{分离变量}} \to \boxed{\text{构造基本不等式的结构}} \to \boxed{\text{利用基本不等式求最值}}$

解　设 $t=x^2+1$，则 $t\geqslant 1$，且 $x^2=t-1$，

$$\therefore y=\frac{x^4+3x^2+3}{x^2+1}=\frac{(t-1)^2+3(t-1)+3}{t}$$

$$=\frac{t^2+t+1}{t}=t+\frac{1}{t}+1.$$

$\because t\geqslant 1$，$\therefore t+\frac{1}{t}\geqslant 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$，

当且仅当 $t=\frac{1}{t}$，即 $t=1$ 时，等号成立.

$\therefore$ 当 $x=0$ 时，函数取得最小值 3.

探究提高 (1)利用基本不等式求最值，关键是把握基本不等式成立的三个条件(正、定、等)，在利用基本不等式求某些函数最值时，需注意函数的解析式或变形式能够符合基本不等式使用的前提条件和实际问题的要求.

(2)本例中，若 $y=\frac{x^4+3x^2+3}{x^2+2}$，则 $t=x^2+2\in[2,+\infty)$，

$y=t+\frac{1}{t}-1$ 的最小值不能用基本不等式求得，只能借助函数的单调性求解.

变式训练 3　设椭圆中心在坐标原点，$A(2,0)$、$B(0,1)$是它的两个顶点，直线$y=kx$ $(k>0)$与AB相交于点D，与椭圆相交于E、F两点.

(1)若$\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$，求$k$的值；

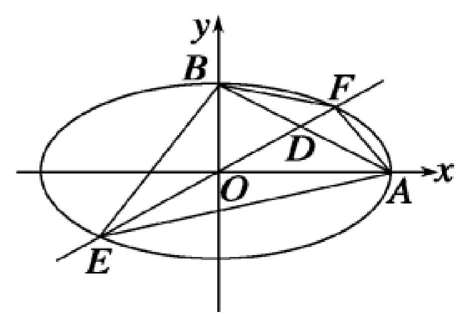
(2)求四边形$AEBF$面积的最大值.

解　(1)依题设得椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

直线AB、EF的方程分别为$x+2y=2$，$y=kx$ $(k>0)$.

如图所示，设$D(x_0，kx_0)$，$E(x_1，kx_1)$，$F(x_2，kx_2)$，其中$x_1<x_2$，且x_1、x_2满足方程$(1+4k^2)x^2=4$，

故$x_2=-x_1=\frac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$.①



由$\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$知，$x_0-x_1=6(x_2-x_0)$，

得 $x_0=\frac{1}{7}(6x_2+x_1)=\frac{5}{7}x_2=\frac{10}{7\sqrt{1+4k^2}}$;

由 D 在 AB 上知 $x_0+2kx_0=2$，得 $x_0=\frac{2}{1+2k}$.

所以$\frac{2}{1+2k}=\frac{10}{7\sqrt{1+4k^2}}$,

化简得 $24k^2-25k+6=0$，解得 $k=\frac{2}{3}$或 $k=\frac{3}{8}$.

(2)**方法一**　根据点到直线的距离公式和①式知，点 E、F 到 AB 的距离分别为

$$h_1=\frac{|x_1+2kx_1-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2(1+2k+\sqrt{1+4k^2})}{\sqrt{5(1+4k^2)}},$$

$$h_2=\frac{|x_2+2kx_2-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2(1+2k-\sqrt{1+4k^2})}{\sqrt{5(1+4k^2)}}.$$

又$|AB|=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$.

所以四边形 $AEBF$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|AB|(h_1+h_2)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{4(1+2k)}{\sqrt{5(1+4k^2)}}$$

$$=\frac{2(1+2k)}{\sqrt{1+4k^2}}=2\sqrt{\frac{1+4k^2+4k}{1+4k^2}}\leqslant 2\sqrt{2},$$

当 $2k=1$，即当 $k=\frac{1}{2}$时，上式取等号.

所以 S 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

方法二　由题设，$|BO|=1$，$|AO|=2$.

设 $y_1=kx_1$，$y_2=kx_2$，由①得 $x_2>0$，$y_2=-y_1>0$，

故四边形 $AEBF$ 的面积为

$$S=S_{\triangle BEF}+S_{\triangle AEF}=x_2+2y_2$$

$$=\sqrt{(x_2+2y_2)^2}=\sqrt{x_2^2+4y_2^2+4x_2y_2}$$

$$\leqslant\sqrt{2(x_2^2+4y_2^2)}=2\sqrt{2},$$

当 $x_2=2y_2$ 时，上式取等号.

所以 S 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

题型四　含参不等式恒成立问题

例4　实数 a 为何值时，不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立？

思维启迪　本题的关键是对 $a^2-1=0$ 和 $a^2-1\neq0$ 两种情况进行讨论，体现了分类讨论的思想.

解　①当 $a^2-1\neq0$，即 $a\neq\pm1$ 时，原不等式的解集为 $\mathbf{R}$ 的条件是 $\begin{cases}a^2-1<0,\\ \Delta<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{5}<a<1$.

②当 $a^2-1=0$，即 $a=\pm1$ 时，若 $a=1$，则原不等式为 $-1<0$，恒成立；若 $a=-1$，则原不等式为 $2x-1<0$，即 $x<\frac{1}{2}$，不合题意，应舍去.

综上所述，当 $-\frac{3}{5}<a\leqslant1$ 时，原不等式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.