2024 北京人大附中高三考前热身

数　学

命题：高三数学组

本试卷共 7 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $P=\left\{x\middle|\ x^2\le 1\right\}, M=\{a\}$，若 $P\cap M=M$，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,-1]$　　B. $[-1,1]$　　C. $\left[1,+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$

2. 若 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　）

A. $30°$　　B. $60°$　　C. $120°$　　D. $150°$

3. 已知 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-x\right)^n$ 的二项式系数之和为 64，则其展开式的常数项为（　）

A. -240　　B. 240　　C. 60　　D. -60

4. 已知 $x,y\in\mathrm{R}$，且 $x>y$，则（　）

A. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}<0$　　B. $\tan x-\tan y>0$

C. $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^x-\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^y<0$　　D. $\ln|x|-\ln|y|>0$

5. 若双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 与 $C_2:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 具有相同的渐近线，则 C_2 的离心率为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 1, x\ge 0\end{cases}$，则不等式 $xf(x-1)\le 1$ 的解集为（　　）.

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $[1,2]$　　D. $[-1,1]$

7. 已知 $A(-1,0),B(1,0)$，若点 P 满足 $PA\perp PB$，则点 P 到直线 $l:m(x-\sqrt{3})+n(y-1)=0$ 的距离的最大值为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c .则“a,b,c 成等比数列”是 $\sin B\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

9. 故宫角楼的屋顶是我国十字脊顶的典型代表，如图 1，它是由两个完全相同的直三棱柱垂直交叉构成，将其抽象成几何体如图 2 所示.已知三棱柱 $ABF-CDE$ 和 $BDG-ACH$ 是两个完全相同的直三棱柱，侧棱 EF 与 GH 互相垂直平分，EF,GH 交于点 I，$AF=BF=a$，$AF\perp BF$，则点 G 到平面 $ACEF$ 的距离是（　）

图1

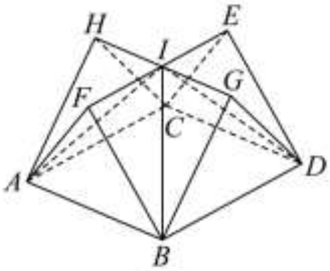


图2

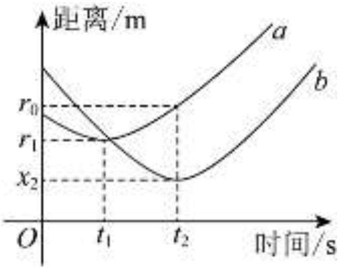
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

B. $\frac{1}{2}a$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}a$

10. 2024 年 1 月 17 日我国自行研制的天舟七号货运飞船在发射 3 小时后成功对接于空间站天和核心舱后向端口，创造了自动交会对接的记录.某学校的航天科技活动小组为了探索运动物体追踪技术，设计了如下实验：目标 P 在地面轨道上做匀速直线运动；在地面上相距 7m 的 A，B 两点各放置一个传感器，分别实时记录 A，B 两点与物体 P 的距离.科技小组的同学根据传感器的数据，绘制了“距离-时间”函数图像，分别如曲线 a，b 所示.t_1 和 t_2 分别是两个函数的极小值点.曲线 a 经过 $(0,r_0),(t_1,r_1)$ 和 (t_2,r_0)，曲线 b 经过 (t_2,r_2).已知 $r_1t_1=r_2t_2,r_1=4\text{m},t_2=4\text{s}$，并且从 $t=0$ 时刻到 $t=t_2$ 时刻 P 的运动轨迹与线段 AB 相交.分析曲线数据可知，P 的运动轨迹与直线 AB 所成夹角的正弦值以及 P 的速度大小分别为（　）



A. $\frac{6}{7},\frac{\sqrt{13}}{4}\text{m/s}$

B. $\frac{6}{7},\frac{\sqrt{13}}{2}\text{m/s}$

C. $\frac{2}{7},\frac{3\sqrt{5}}{4}\text{m/s}$

D. $\frac{2}{7},\frac{3\sqrt{5}}{2}\text{m/s}$

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 若 $\frac{2+\mathrm{i}}{1-a\mathrm{i}}$ 是纯虚数，则实数 a 的值为_________.

12. 已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，准线与 x 轴的交点为 A，点 B 在 C 上.若 $|FB|=2$，则直线 AB 的方程为_________.

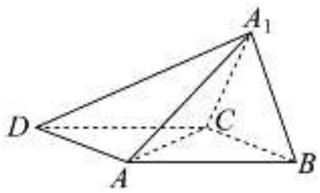
13. 使 $\lg a+\lg b=\lg(a+b)$ 成立的一组 a，b 的值为 $a=$_________，$b=$_________.

14. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega\pi x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi\le\pi)$，若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\varphi=$_________；若圆面 $x^2+y^2\le 2$ 恰好覆盖 $f(x)$ 图象的最高点或最低点共 3 个，则 ω 的取值范围是_________.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1=1$ 且 $a_{n+1}=S_n^2+1,\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，给出下列四个结论：①长度分别为 $1,a_{n+1},S_n$ 的三条线段可以构成一个直角三角形；② $\forall n\in\mathrm{N}^*,S_n\ge 2^{n-1}$；③ $\forall n\in\mathrm{N}^*,a_n+a_{n+2}<2a_{n+1}$；④ $\forall n\in\mathrm{N}^*,a_{n+1}=2a_n\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.其中所有正确结论的序号是_________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=\frac{\pi}{3},AB=2$，把 $\triangle ABC$ 沿着 BC 折起，使 A 到 A_1 位置.



（1）证明：$BC\perp AA_1$；

（2）若 $AA_1=\sqrt{6}$，求直线 DA_1 与平面 ABA_1 所成角的正弦值；

（3）在（2）的条件下，求点 D 到平面 ABA_1 的距离.

17. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+2\cos^2\omega x,(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

（1）求 ω 的值；

（2）在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.c 为 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，求 $a-b$ 的取值范围.条件①：$a\cos B+b\cos A=2c\cos C$；条件②：$2a\sin A\cos B+b\sin 2A=\sqrt{3}a$；条件③：$\triangle ABC$ 的面积为 S，且 $S=\frac{\sqrt{3}\left(a^2+b^2-c^2\right)}{4}$.注：如果选择多个条件分别解答，按第一个条件计分.

18. 某口罩加工厂加工口罩由 A，B，C 三道工序组成，每道工序之间相互独立，且每道工序加工质量分为高和低两种层次级别，A，B，C 三道工序加工的质量层次决定口罩的过滤等级；A，B，C 工序加工质量层次均为高时，口罩过滤等级为 100 等级（表示最低过滤效率为 99.97%）；C 工序的加工质量层次为高，A，B 工序至少有一个质量层次为低时，口罩过滤等级为 99 等级（表示最低过滤效率为 99%）；其余均为

95级（表示最低过滤效率为95%）.现从A，B，C三道工序的流水线上分别随机抽取100个口罩进行检测，其中A工序加工质量层次为高的个数为50个，B工序加工质量层次高的个数为75个，C工序加工质量层次为高的个数为80个.

表①：表示加工一个口罩的利润.

口罩等级	100等级	99等级	95等级
利润/元	2	1	0.5

（1）用样本估计总体，估计该厂生产的口罩过滤等级为100等级的概率；

（2）X表示一个口罩的利润，求X的分布列和数学期望；

（3）用频率估计概率，由于工厂中A工序加工质量层次为高的概率较低，工厂计划通过增加检测环节对A工序进行升级.在升级过程中，每个口罩检测成本增加了0.2元时，相应的A工序加工层次为高的概率在原来的基础上增加了b.试问：若工厂升级方案后对一个口罩利润的期望有所提高，写出一个满足条件的b的值.

19. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，以线段$F_1F_2$为直径的圆过$C$的上下顶点，点$\left(1,e\right)$在$C$上，其中$e$为$C$的离心率.

（1）求椭圆C的方程和短轴长；

（2）点A,B在C上，且在x轴的上方，满足$AF_1//BF_2,\left|AF_1\right|=2\left|BF_2\right|$，直线$AF_2$与直线$BF_1$的交点为$P$，求$\triangle PF_1F_2$的面积.

20. 已知函数$f(x)=(x-a)\mathrm{e}^x-x,(a\in\mathbf{R})$.

（1）若曲线$y=f(x)$在$(0,f(0))$处的切线为x轴，求a的值；

（2）在（1）的条件下，判断函数$f(x)$的单调性；

（3）$g(x)=\left(x^2-ax+1\right)\mathrm{e}^x-\left(\dfrac{1}{2}x^2+x+1\right)$，若$-1$是$g(x)$的极大值点，求$a$的取值范围.

21. 给定正整数$n\geq 2$，设数列$a_1,a_2,...,a_n$是$1,2,...,n$的一个排列，对$i\in\left\{1,2,...,n\right\}$，$x_i$表示以$a_i$为首项的递增子列的最大长度，$y_i$表示以$a_i$为首项的递减子列的最大长度.

（1）若$n=4$，$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=2$，$a_4=3$，求x_1和y_2；

（2）求证：$\forall i\in\left\{1,2,...,n-1\right\}$，$\left(x_i-y_i\right)^2+\left(x_{i+1}-y_{i+1}\right)^2\neq 0$；

（3）求$\sum\limits_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|$的最小值.

参考答案

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【分析】化简集合 P，由 $P\cap M=M$ 得出 $M\subseteq P$，由子集的定义得出实数 a 的取值范围.

【详解】$\because$ 集合 $P=\left\{x\middle|\ x^2-1\le 0\right\}=\{x|-1\le x\le 1\}=[-1,1], M=\{a\}, P\cap M=M$

$\therefore M\subseteq P, \therefore a\in[-1,1]$

故选：B

【点睛】本题主要考查了根据交集的结果求参数的取值范围，属于基础题.

2.【答案】B

【分析】根据 $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$，得 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$，结合数量积得运算律求出 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，再根据向量夹角公式即可得解.

【详解】因为 $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$，所以 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$，

即 $\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2=1$，

所以 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$，

又 $0°\le\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\le 180°$，

所以向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $60°$.

故选：B.

3.【答案】B

【分析】根据二项式系数之和可得 $n=6$，结合二项展开式分析求解.

【详解】由题意可知：二项式系数之和为 $2^n=64$，可得 $n=6$，

其展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{6-r}(-x)^r=(-1)^r\cdot 2^{6-r}\cdot\mathrm{C}_6^r\cdot x^{\frac{3}{2}r-3}, r=0,1,2,\cdots,6$，

令 $\dfrac{3}{2}r-3=0$，解得 $r=2$，

所以其展开式的常数项为 $(-1)^2\cdot 2^4\cdot\mathrm{C}_6^2=240$.

故选：B.

4.【答案】C

【分析】根据题意，利用不等式的基本性质，正切函数的性质，以及指数函数与对数函数的性质，逐项判

定，即可求解.

【详解】对于 A 中，$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}$，其中 $y-x<0$，但 xy 的符号不确定，所以 A 不正确；

对于 B 中，例如 $x=\pi, y=\frac{\pi}{4}$，此时 $\tan x-\tan y=0-1=-1<0$，所以 B 不正确；

对于 C 中，由函数 $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{x}$ 在 R 为单调递减函数，

因为 $x>y$，所以 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{x}<\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{y}$，可得 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{x}-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{y}<0$，所以 C 正确；

对于 D 中，例如 $x=2, y=-3$，此时 $\ln|x|-\ln|y|=\ln 2-\ln 3=\ln\frac{2}{3}<0$，所以 D 不正确.

故选：C.

5.【答案】C

【分析】先求出两个双曲线的离心率，根据渐近线相等列式，代入离心率求解即可.

【详解】双曲线 $C_1:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$C_2:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{a}{b}x$，

由题可知 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{b}$，

所以 C_2 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.

故选：C.

6.【答案】D

【分析】由题可得 $f\left(x-1\right)=\begin{cases}-1, x<1\\ 1, x\geq 1\end{cases}$，然后分类讨论解不等式即得.

【详解】∵ $f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 1, x\geq 0\end{cases}$，

∴ $f(x-1)=\begin{cases}-1, x<1\\ 1, x\geq 1\end{cases}$，

当 $x\geq 1$ 时，$xf(x-1)\leq 1\Leftrightarrow x\leq 1$，

∴ $x=1$，

当 $x<1$ 时，$xf(x-1)\leq 1\Leftrightarrow -x\leq 1\Leftrightarrow x\geq -1$，

∴ $-1\leq x<1$，

综上所述，$xf(x-1)\leq 1$ 的解集为 $[-1,1]$.

故选: D .

7.【答案】C

【分析】先确定 P 的轨迹以及直线 l 过的定点，再根据圆的性质特点求最值.

【详解】由 $PA \perp PB$ 可得点 P 的轨迹为以线段 AB 为直线的圆，圆心为 $(0,0)$，半径为 1，

又直线 $l:m(x-\sqrt{3})+n(y-1)=0$，其过定点 $(\sqrt{3},1)$，

故距离的最大值为 $\sqrt{3+1}+1=3$.

故答案为：C

8.【答案】A

【分析】先将 $b^2=ac$ 代入余弦定理，利用基本不等式得到 $\cos B\geq\frac{1}{2}$，从而得到 $\sin B\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$，接着根据 $\sin B\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得到 B 可能为钝角，不满足 a,b,c 成等比数列，从而得答案.

【详解】当 a,b,c 成等比数列时，$b^2=ac$，

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\geq\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立，

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B\leq\frac{\pi}{3}$，所以 $\sin B\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$，充分性满足；

当 $\sin B\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，

而当 $B\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时，b 为最长的边，不满足 a,b,c 成等比数列，必要性不满足.

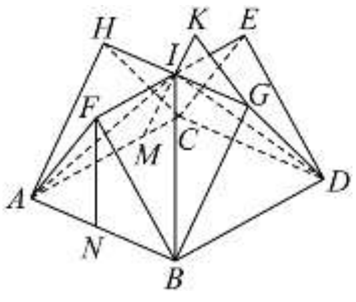
则“a,b,c 成等比数列”是 $\sin B\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的充分不必要条件.

故选：A.

9.【答案】B

【分析】根据已知条件，结合空间总直线与平面的位置关系，先确定点 G 到平面 $ACEF$ 的垂线段，在根据已知条件得 $\sin\theta=\frac{KG}{IG}=\frac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$，解方程求出 h 即可.

【详解】取 AC 中点 M，连接 MI，过 G 作 MI 的垂线交 MI 的延长线于点 K，



取 AB 中点 N，连接 FN，

由已知，M、I 分别为 AC、EF 中点，

因为 $ABF-CDE$ 是直三棱柱，所以 $AF \perp AC$，$EF//AC$ 且 $EF=AC$，

所以 $FI//AM$ 其 $FI=AM$，所以四边形 $AMIF$ 为平行四边形，

又 $AF \perp AC$，所以 $AMIF$ 为矩形，所以 $EF \perp MK$，

又 $EF \perp GH$，$MK \subset$ 平面 KIG，$GH \subset$ 平面 KIG，$MK \cap GH = I$，

所以 $EF \perp$ 平面 KIG，$KG \subset$ 平面 KIG，所以 $EF \perp KG$，

又因为 $KG \perp MK$，$EF \subset$ 平面 $ACEF$，$MK \subset$ 平面 $ACEF$，$EF \cap MK = I$，

所以 $KG \perp$ 平面 $ACEF$，所以点 G 到平面 $ACEF$ 的距离等于线段 KG 的长度，设为 h；

$AF \perp BF$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$AF=BF=a$，

所以 $AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，设角 $\angle FAB=\theta$，则有 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为四边形 $AMIF$ 为平行四边形，所以 $MI//AF$，

又因为因为 $BDG-ACH$ 是直三棱柱，所以 $AB//HG$，且 $HG=AB=a$，

所以 $\angle KIG=\angle FAB=\theta$，$IG=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$，

又因为 $KG \perp$ 平面 $ACEF$，$IK \subset$ 平面 $ACEF$，所以 $KG \perp IK$，

所以 $\sin\theta=\dfrac{KG}{IG}=\dfrac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$，即 $\dfrac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $h=\dfrac{a}{2}$，

所以点 G 到平面 $ACEF$ 的距离是 $\dfrac{a}{2}$，

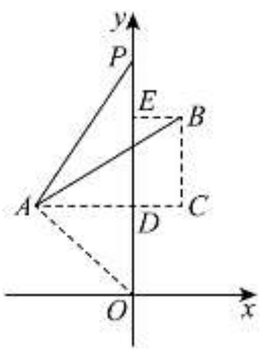
故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题关键在于根据空间中点、线、面的位置关系，确定点 G 到平面 $ACEF$ 的垂线段.

10.【答案】B

【分析】建系，设点，作相应的辅助线，分析可知 $|AC|=6\mathrm{m}, |BC|=2v\mathrm{m}$，结合 $|AB|=7\mathrm{m}$ 分析求解即可.

【详解】如图，建立平面直角坐标系，



设动点 P 的轨迹与 y 轴重合，其在 $t=0,t_1,t_2$ 时刻对应的点分别为 O（坐标原点），D,E，P 的速度为

$v\mathrm{m}/\mathrm{s}, v>0$，

因为$r_1t_1 = r_2t_2, r_1 = 4\mathrm{m}, t_1 = 2\mathrm{s}, t_2 = 4\mathrm{s}$，可得$r_2 = 2\mathrm{m}$，

由题意可知：AD, BE 均与 y 轴垂直，且$|AD| = 4\mathrm{m}, |BE| = 2\mathrm{m}, |OD| = |DE| = 2v\mathrm{m}$，

作 $BC \perp AD$ 垂足为C，则$|AC| = 6\mathrm{m}, |BC| = 2v\mathrm{m}$，

因为$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$，即$36 + 4v^2 = 49$，解得$v = \frac{\sqrt{13}}{2}$；

又因为$BC \parallel y$ 轴，可知 P 的运动轨迹与直线 AB 所成夹角即为$\angle ABC$，

所以 P 的运动轨迹与直线 AB 所成夹角的正弦值为$\sin\angle ABC = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{6}{7}$.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：建系，设动点 P 的轨迹与 y 轴重合，以坐标系为依托，把对应的量转化为相应的长度，进而分析求解.

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】2

【分析】求出复数的代数形式，然后根据纯虚数的定义列方程求解即可.

【详解】$\frac{2+\mathrm{i}}{1-a\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})}{(1-a\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})} = \frac{2-a+(2a+1)\mathrm{i}}{1+a^2}$，

因为$\frac{2+\mathrm{i}}{1-a\mathrm{i}}$是纯虚数，

所以$\begin{cases} 2-a=0 \\ 2a+1 \neq 0 \end{cases}$，得$a=2$.

故答案为：2

12.【答案】$x-y+1=0$ 或 $x+y+1=0$

【分析】先根据焦半径公式求出点 B 坐标，进而可得直线方程.

【详解】设 $B(x,y)$，则$|FB| = x+1 = 2$，则 $x=1$，此时 $y=\pm 2$，

所以$B(1,2)$或$B(1,-2)$，又由已知 $A(-1,0)$，

直线 AB 的方程为$y = \frac{2-0}{1-(-1)}(x+1)$或$y = \frac{-2-0}{1-(-1)}(x+1)$，

整理得$x-y+1=0$或$x+y+1=0$.

故答案为：$x-y+1=0$或$x+y+1=0$.

13.【答案】 ①. 2（答案不唯一） ②. 2（答案不唯一）

【分析】根据题意结合对数运算分析可得$\begin{cases} ab=a+b \\ a>0 \\ b>0 \end{cases}$，取特值检验即可.

【详解】若$\lg a+\lg b=\lg(a+b)$，则$\lg ab=\lg(a+b)$，可得$\begin{cases} ab=a+b \\ a>0 \\ b>0 \end{cases}$，

例如$a=b=2$符合上式.

故答案为：2；2.（答案不唯一）

14.【答案】 ①. $\frac{\pi}{2}$ ②. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

【分析】根据偶函数的对称性分析可知$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathrm{Z}$，即可得结果；结合对称性可知圆面在 y 轴右侧仅覆盖 1 个$f(x)$图象的最高点或最低点，结合周期性列式求解.

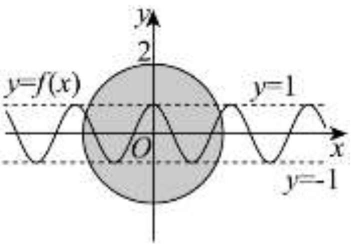
【详解】因为$f(x)$是偶函数，则$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathrm{Z}$，

且$0<\varphi\le\pi$，所以$k=0,\varphi=\frac{\pi}{2}$；

可得 $f(x)=\sin\left(\omega\pi x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\omega\pi x$，设$f(x)$的最小正周期为$T$，

因为$f(x)$和$x^2+y^2\le 2$均关于y轴对称，

可知圆面在y轴右侧仅覆盖$f(x)$图象的 1 个最低点，



对于$x^2+y^2=2$，令$y=\pm1$，解得$x=\sqrt{3}$（不妨只考虑y轴右侧，舍负）；

可得$\begin{cases} \frac{T}{2}\le\sqrt{3} \\ T>\sqrt{3} \end{cases}$，解得$\sqrt{3}<T\le 2\sqrt{3}$，

且$\omega>0$，则$\sqrt{3}<\frac{2\pi}{\omega\pi}\le 2\sqrt{3}$，解得$\frac{\sqrt{3}}{3}\le\omega<\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以ω的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，