

南京市第九中学高二年级期末试卷

数学

2024.01

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第 I 卷 (选择题共 60 分)

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $x + (a - 2)y + 1 = 0$ 与直线 $ax + 3y - 1 = 0$ 互相垂直, 则实数 a 的值是 ()

A. -1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】根据两直线垂直的条件列方程求解.

【详解】直线 $x + (a - 2)y + 1 = 0$ 与直线 $ax + 3y - 1 = 0$ 互相垂直,

则 $1 \cdot a + (a - 2) \cdot 3 = 0$, 解得 $a = \frac{3}{2}$.

故选: C

2. 现有 5 名同学去听同时举行的 3 个课外知识讲座, 每名同学可自由选择听其中的 1 个讲座, 不同的选择种数为 ()

A. 3^5 B. A_5^3 C. C_5^3 D. 5^3

【答案】A

【解析】

【分析】利用分步计数原理即得.

【详解】每一位同学有 3 种不同的选择, 则 5 名同学去听同时进行的 3 个课外知识讲座,

每名同学可自由选择其中的 1 个讲座, 不同选法的种数是 3^5 .

故选：A.

3. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公比为 q ，则“ $a_1 < 0$ ，且 $0 < q < 1$ ”是“对于任意 N^* 都有 $a_{n+1} > a_n$ ”的
()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据充分条件和必要条件的定义，结合等比数列的性质分析判断即可

【详解】若 $a_1 < 0$ ，且 $0 < q < 1$ ，则 $a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1}(q-1) > 0$ ，

所以 $a_{n+1} > a_n$ ，

反之，若 $a_{n+1} > a_n$ ，则 $a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1}(q-1) > 0$ ，

所以 $a_1 < 0$ ，且 $0 < q < 1$ 或 $a_1 > 0$ ，且 $q > 1$ ，

所以“ $a_1 < 0$ ，且 $0 < q < 1$ ”是“对于任意 N^* ，都有 $a_{n+1} > a_n$ ”的充分不必要条件.

故选：A

4. 在空间直角坐标系 xOy 中，已知 $\vec{a} = (1, -2, -1)$ ， $\vec{b} = (-1, x-1, 1)$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，则 x 的取值范围是 ()

A. $(0, +\infty)$ B. $(0, 3)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意得出 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，根据数量积公式列出不等式并排除两个向量反向时 x 的值，从而得解.

【详解】因为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，

所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，

又 $\vec{a} = (1, -2, -1)$ ， $\vec{b} = (-1, x-1, 1)$

则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-1) - 2 \times (x-1) - 1 \times 1 = -2x < 0$ ，解得 $x > 0$ ，

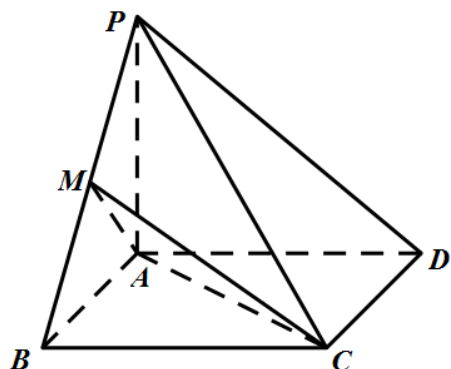
若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则 $\frac{-1}{1} = \frac{x-1}{-2} = \frac{1}{-1}$ ，即 $x = 3$ ，

此时 $\vec{a} = -\vec{b}$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向, 需要舍去,

所以 x 的取值范围为 $x > 0$ 且 $x \neq 3$, 即 $x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$.

故选: D.

5. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 且 $BC \perp$ 平面 PAB , $PA \perp AB$, M 为 PB 的中点, $PA=AD=2$. 若 $AB=1$, 则二面角 $B-AC-M$ 的余弦值为 ()



A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

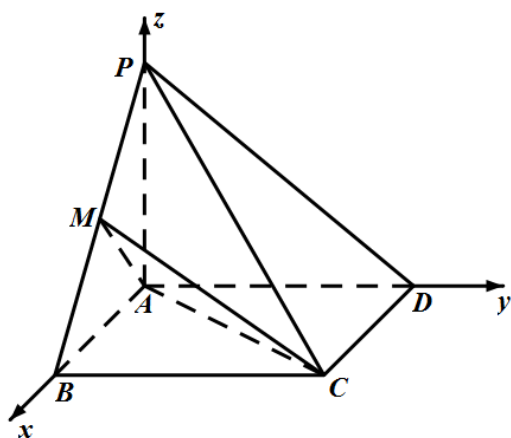
D. $\frac{1}{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】

以 AB , AD , AP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$, 求平面 AMC 的一个法向量 $\vec{n}$ 以及平面 ABC 的一个法向量, 利用空间向量的数量积即可求解.



【详解】

因为 $BC \perp$ 平面 PAB , $PA \subset$ 平面 PAB , 所以 $PA \perp BC$,

又 $PA \perp AB$, 且 $BC \cap AB = B$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

以点 A 为坐标原点, 分别以 AB, AD, AP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴,

建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $A(0, 0, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $P(0, 0, 2)$, $B(1, 0, 0)$, $M\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$,

所以 $\vec{AC} = (1, 2, 0)$, $\vec{AM} = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$,

求得平面 AMC 的一个法向量为 $\vec{n} = (-2, 1, 1)$,

又平面 ABC 的一个法向量 $\vec{AP} = (0, 0, 2)$,

所以 $\cos \langle \vec{n}, \vec{AP} \rangle = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AP}|}{|\vec{n}| |\vec{AP}|} = \frac{2}{\sqrt{4+1+1} \times 2} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以二面角 $B-AC-M$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

故选: A

【点睛】本题考查了空间向量法求面面角, 考查了基本运算求解能力, 属于基础题.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $C_1: (x-4)^2 + (y-8)^2 = 1$, 圆 $C_2: (x-6)^2 + (y+6)^2 = 9$. 若圆心在 x 轴上的圆 C 同时平分圆 C_1 和圆 C_2 的圆周, 则圆 C 的方程是 ()

A. $x^2 + y^2 = 81$

B. $x^2 + y^2 = 64$

C. $x^2 + y^2 = 49$

D. $x^2 + y^2 = 36$

【答案】A

【解析】

【分析】由题知圆 C 与圆 C_1 的公共弦是圆 C_1 的直径, 圆 C 与圆 C_2 的公共弦是圆 C_2 的直径, 进而设圆 C 的圆心为 $C(a, 0)$, 半径为 r 得 $r^2 = |CC_1|^2 + 1$, $r^2 = |CC_2|^2 + 9$, 再结合距离公式解方程即可得答案.

【详解】圆 C 平分圆 C_1 等价于圆 C 与圆 C_1 的公共弦是圆 C_1 的直径.

同理圆 C 与圆 C_2 的公共弦是圆 C_2 的直径

设圆 C 的圆心为 $C(a, 0)$ ，半径为 r ，则 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ ，

所以 $r^2 = |CC_1|^2 + 1, r^2 = |CC_2|^2 + 9$ ，即 $\begin{cases} (a-4)^2 + (-8)^2 + 1 = r^2 \\ (a-6)^2 + 6^2 + 9 = r^2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 0, \\ r^2 = 81. \end{cases}$

所以圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 = 81$ 。

故选：A

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n + 1$ ，则 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99}$ 的值是 ()

A. 25 B. 50 C. 75 D. 100

【答案】B

【解析】

【分析】根据所给递推关系可得 $a_3 + a_1 = a_7 + a_5 = \dots = a_{99} + a_{97} = 2$ ，即可得解。

【详解】由 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n + 1$ ，

故 $a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n} = a_{2n+1} + a_{2n} = 4n + 1$ ，

$a_{2n} + (-1)^{2n-1} a_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n-1} = 4n - 1$ ，

则 $a_{2n+1} + a_{2n} - (a_{2n} - a_{2n-1}) = a_{2n+1} + a_{2n-1} = 4n + 1 - (4n - 1) = 2$ ，

故 $a_3 + a_1 = a_7 + a_5 = \dots = a_{99} + a_{97} = 2$ ，

故 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = 2 \times \frac{50}{2} = 50$ 。

故选：B.

8. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > 0, b_2 > 0)$ 有相同的焦点 F_1 ，

F_2 ，点 P 是两曲线在第一象限的交点，且 $\overline{F_1 F_2}$ 在 $\overline{F_1 P}$ 上的投影等于 $\overline{F_1 P}$ ， e_1 ， e_2 分别是椭圆 C_1 和双曲线

C_2 的离心率，则 $9e_1^2 + e_2^2$ 的最小值是 ()

A. 4 B. 6 C. 8 D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】

由 $\overline{F_1F_2}$ 在 $\overline{F_1P}$ 上的投影等于 $\overline{F_1P}$ 可知 $PF_1 \perp PF_2$. 利用椭圆与双曲线的

焦距相同找到 e_1 和 e_2 的关系, 最后构造函数利用导数求出 $9e_1^2 + e_2^2$ 的最小值.

【详解】如图, 设半焦距为 c . $\because$ 点 P 是两曲线在第一象限的交点, 且 $\overline{F_1F_2}$ 在 $\overline{F_1P}$ 上

的投影等于 $\overline{F_1P}$, $\therefore PF_1 \perp PF_2$. 设 $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$, 则 $m + n = 2a_1$,

$$m - n = 2a_2. \therefore mn = \frac{(m+n)^2 - (m-n)^2}{4} = a_1^2 - a_2^2. \text{ 在 } \triangle PF_1F_2 \text{ 中,}$$

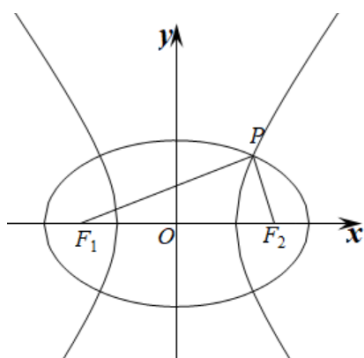
$$\text{由勾股定理可得: } 4c^2 = m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = 4a_1^2 - 2(a_1^2 - a_2^2).$$

$$\therefore 2c^2 = a_1^2 + a_2^2. \text{ 两边同除以 } c^2, \text{ 得 } 2 = \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2},$$

$$\text{所以 } 9e_1^2 + e_2^2 = \frac{1}{2}(9e_1^2 + e_2^2) \left(\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} \right) = \frac{1}{2} \left(10 + \frac{9e_1^2}{e_2^2} + \frac{e_2^2}{e_1^2} \right) \geq \frac{1}{2}(10+6) = 8,$$

当 $3e_1^2 = e_2^2$ 即 $e_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时取等号, 因此 $9e_1^2 + e_2^2$ 的最小值是 8.

故选: C.



【点睛】求最值题目一般分为三步:

①写表达式;

②消元;

③求值域.

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 过点 $P(2,1)$ 且在两坐标轴上的截距的绝对值相等的直线方程为 ()

A. $x + y - 3 = 0$

B. $x + y + 3 = 0$

C. $x - y - 1 = 0$

D. $x - 2y = 0$

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用截距式的求法，讨论截距的绝对值相等的情况，在进行截距式假设时，分截距为 0，截距不为 0 进行假设.

【详解】当直线的截距不为 0 时，设直线的截距式方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

$$\text{由题可得} \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1, \\ |a| = |b|, \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1, \\ a = b \end{cases} \text{或} \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1, \\ a = -b, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 3, \\ b = 3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = 1, \\ b = -1, \end{cases}$$

所以直线方程为 $x + y - 3 = 0$ 或 $x - y - 1 = 0$ ，故 A，C 正确；

当直线的截距为 0 时，设直线方程为 $y = kx$ ，

由题可知 $k = \frac{1}{2}$ ，故直线方程为 $x - 2y = 0$ ，D 正确.

故选：ACD

10. 已知某种产品的加工需要经过 5 道工序，则下列说法正确的是（ ）

- A. 若其中某道工序不能放在最后，有 96 种加工顺序
- B. 若其中某 2 道工序既不能放在最前，也不能放在最后，有 72 种加工顺序
- C. 若其中某 2 道工序必须相邻，有 48 种加工顺序
- D. 若其中某 2 道工序不能相邻，有 36 种加工顺序

【答案】AC

【解析】

【分析】对 AB：根据分步计数原理，先安排特殊的工序，再安排其它工序即可；对 C：采用捆绑法，再根据分步计数原理即可求得结果；对 D：采用插空法，再根据分步计数原理即可求得结果.

【详解】假设有甲乙丙丁戊，这 5 道工序.

对 A：假设甲工序不能放到最后，则甲有 4 种安排方式，根据分步计数原理，

所有的安排顺序有： $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ 种，故 A 正确；

对 B：假设甲乙 2 道工序不能放到最前，也不能放到最后，

先安排甲乙，则共有 $3 \times 2 = 6$ 种安排方式；再安排剩余 3 道工序，共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 种；

根据分步计数原理，则所有的安排顺序有： $6 \times 6 = 36$ 种，故 B 错误；

对 C：假设甲乙工序相邻，将甲和乙捆绑为一道工序，和剩余 3 道工序放在一起排序，

则共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$ 种加工顺序，故 C 正确；

对 D：假设甲乙工序不能相邻，则先安排剩余 3 道工序，在形成的 4 个空中，安排甲乙，

故共有： $3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 = 72$ 种加工顺序，故 D 错误。

故选：AC.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F 作直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点，则

()

A. $|AB|$ 的最小值为 2

B. 以线段 AF 为直径的圆与 y 轴相切

C. $\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = 1$

D. 当 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ 时，直线 AB 的斜率为 ± 1

【答案】BC

【解析】

【分析】根据题意设直线 $l: x = my + 1$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，联立方程可得 $y_1 + y_2 = 4m$ ，

$y_1 y_2 = -4$ ，进而可得 $x_1 + x_2 = 4m^2 + 2$ ， $|AB| = 4(m^2 + 1)$ ，根据抛物线的定义结合韦达定理逐项分析判断即可得.

【详解】由题意可知：抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$ ，准线为 $x = -1$ ，

且直线 l 的斜率可以不存在，但不为 0，

设直线 $l: x = my + 1$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

联立方程 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，消去 x 可得 $y^2 - 4my - 4 = 0$ ，

则 $\Delta = 16m^2 + 16 > 0$ ，可得 $y_1 + y_2 = 4m$ ， $y_1 y_2 = -4$ ，

可得 $x_1 + x_2 = (my_1 + 1) + (my_2 + 1) = m(y_1 + y_2) + 2 = 4m^2 + 2$,

$$|AB| = x_1 + x_2 + 2 = 4(m^2 + 1),$$

对于选项 A: 因为 $|AB| = 4(m^2 + 1) \geq 4$, 当且仅当 $m = 0$ 时, 等号成立,

所以 $|AB|$ 的最小值为 4, 故 A 错误;

对于选项 B: 因为线段 AF 的中点为 $M\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$, $|AF| = x_1 + \frac{p}{2} = x_1 + 1$,

则 M 到 y 轴的距离 $d = \frac{x_1+1}{2}$, 以以线段 AF 为直径的圆的半径为 $\frac{x_1+1}{2}$,

即圆心到 y 轴的距离等于该圆半径, 故 y 轴与该圆相切, 故 B 正确;

$$\begin{aligned} \text{对于选项 C: 因为 } \frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} &= \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{1}{my_1+2} + \frac{1}{my_2+2} \\ &= \frac{m(y_1+y_2)+4}{m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4} = \frac{4m^2+4}{-4m^2+8m^2+4} = \frac{4m^2+4}{4m^2+4} = 1, \end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = 1$, 故 C 正确;

对于选项 D: 因为 $\overrightarrow{AF} = (1-x_1, -y_1)$, $\overrightarrow{FB} = (x_2-1, y_2)$, 且 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$,

则 $-y_1 = 3y_2$, 即 $y_1 = -3y_2$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y_1 = -3y_2 \\ y_1 + y_2 = 4m \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} y_1 = 6m \\ y_2 = -2m \end{cases},$$

代入 $y_1y_2 = -4$ 可得 $-12m^2 = -4$, 解得 $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以直线 l 的斜率为 $\pm\sqrt{3}$, 故 D 错误.

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问: <https://d.book118.com/005030300031012033>