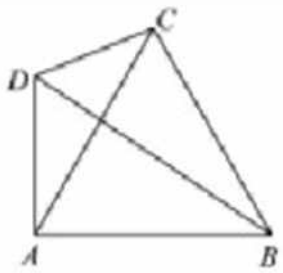
专题三 解三角形

1．正余弦定理的简单运用

1．如图所示，点 D 是等边 $\triangle ABC$ 外一点，且 $\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$，$CD=2$，$AC=2\sqrt{3}$，则 $\triangle ABD$ 的周长是（　　）



A．$2\sqrt{3}$　　B．$4+2\sqrt{3}$　　C．$6+2\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{3}+2$

【答案】C

【解析】在三角形 ACD 中，

由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}\Rightarrow\sin\angle CAD=\frac{1}{2}$，

由于 $\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$ 为钝角，所以 $\angle CAD$ 为锐角，所以 $\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，

则 $\angle ACD=\frac{\pi}{6}$，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，所以 $AD=CD=2$，$BD=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4$，

所以三角形 ABD 的周长为 $2+4+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$，故选 C．

2．已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，设 $(\sin B+\sin C)^2=\sin^2 A+(2-\sqrt{2})\sin B\sin C$，$\sqrt{2}\sin A-2\sin B=0$，则 $\sin C=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

【答案】C

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由 $(\sin B+\sin C)^2=\sin^2 A+(2-\sqrt{2})\sin B\sin C$ 及正弦定理得：$(b+c)^2=a^2+(2-\sqrt{2})bc$，

即$b^2+c^2-a^2=-\sqrt{2}bc$.

由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，而$0^\circ<A<180^\circ$，解得$A=135^\circ$.

由$\sqrt{2}\sin A-2\sin B=0$，得$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\frac{1}{2}$，

显然$0^\circ<B<90^\circ$，则$B=30^\circ$，$C=15^\circ$，

所以$\sin C=\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，故选C.

2．解三角形

1．$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$c^2+b^2\cos^2 A=2bc\cos A$，则$\triangle ABC$为（　　）

A．等腰非等边三角形　　B．直角三角形

C．钝角三角形　　D．等边三角形

【答案】B

【解析】由$c^2+(b\cos A)^2-2cb\cos A=0$，可得$(c-b\cos A)^2=0$，

所以$c=b\cos A$，所以$\sin C=\cos A\sin B$，

在$\triangle ABC$中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，故$\sin A\cos B=0$，

因为$\sin A\neq 0$，所以$\cos B=0$，

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{\pi}{2}$，

故$\triangle ABC$为直角三角形，故选B.

2．$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知下列条件：①$b=3$，$c=4$，$B=30^\circ$；②$a=5$，$b=4$，$A=30^\circ$；③$c=2$，$b=\sqrt{3}$，$B=60^\circ$；④$c=12$，$b=12$，$C=120^\circ$，其中满足上述条件的三角形有唯一解的是（　　）

A．①④　　B．①②　　C．②③　　D．③④

【答案】C

【解析】对于①，因为$b>c\cdot\sin B=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2$，且$b<c$，所以三角形有两解；

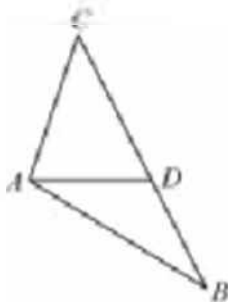
对于②，因为$a>b\cdot\sin A=4\times\frac{1}{2}=2$，且$a>b$，所以三角形有一解；

对于③，$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=1\Rightarrow C=90^\circ$，所以三角形有一解；

对于④，$c=12$，$b=12$，$C=120^\circ$，则$B=C=120^\circ$，则$B+C>180^\circ$，所以三角形无解，

所以满足上述条件的三角形有一解的是②③，故选 C.

3．已知在$\triangle ABC$中，D为边BC上一点，$CD=10$，$2AC=3AD=\sqrt{3}AB$，$\cos\angle CAD=\frac{1}{3}$．



（1）求AD的长；

（2）求$\sin B$.

【答案】（1）$\frac{20}{3}$；（2）$\frac{2\sqrt{6}}{9}$．

【解析】（1）依题意，在$\triangle ACD$中，

由余弦定理得：$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD$，

即$10^2=(\frac{3}{2}AD)^2+AD^2-2\cdot\frac{3}{2}AD\cdot AD\cdot\frac{1}{3}$，解得$AD=\frac{20}{3}$，

所以AD的长是$\frac{20}{3}$．

（2）在$\triangle ACD$中，由（1）知，$AC=10$，

由余弦定理得$\cos C=\frac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\frac{10^2+10^2-(\frac{20}{3})^2}{2\times10\times10}=\frac{7}{9}$，

则有$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$．

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\sin B=\frac{AC}{AB}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$，

所以$\sin B=\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

4．在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$a\sin 2B-\sqrt{3}b\sin A=0$.

（1）求角B的大小；

（2）给出三个条件：①$b=\sqrt{3}$；②$a+c=3+\sqrt{3}$；③$c\sin C=\sin A$，试从中选出两个条件，求$\triangle ABC$的面积.

【答案】（1）$B=\frac{\pi}{6}$；（2）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

【解析】（1）∵在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，

$a\sin 2B-\sqrt{3}b\sin A=0$，

∴$2\sin A\sin B\cos B-\sqrt{3}\sin B\sin A=0$，

又$\sin A\sin B\neq 0$，∴$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$B\in(0,\pi)$，∴$B=\frac{\pi}{6}$.

（2）选①$b=\sqrt{3}$，②$a+c=3+\sqrt{3}$，

由余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B$，

∴$3=(3+\sqrt{3})^2-2ac-2ac\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$ac=3\sqrt{3}$，

∴$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

选①$b=\sqrt{3}$，③$c\sin C=\sin A$，由正弦定理得$c^2=a$，

又$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，∴$3=c^4+c^2-2c^3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即$c^3(c-\sqrt{3})+(c-\sqrt{3})(c+\sqrt{3})=0$，∴$c=\sqrt{3},a=3$，

$\therefore \triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

选②$a+c=3+\sqrt{3}$，③$c\sin C=\sin A$，由正弦定理得$c^2=a$，

又$a+c=3+\sqrt{3}$，解得$c=\sqrt{3}, a=3$，

$\therefore \triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

5．已知锐角$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\cos 2A-\sqrt{3}\sin A+2=0$.

（1）求A；

（2）若$b+c=6\sqrt{3}$，求a的最小值.

【答案】（1）$A=\frac{\pi}{3}$；（2）$3\sqrt{3}$.

【解析】（1）因为$\cos 2A-\sqrt{3}\sin A+2=0$，所以$-2\sin^2 A-\sqrt{3}\sin A+3=0$，

$2\sin^2 A+\sqrt{3}\sin A-3=\left(2\sin A-\sqrt{3}\right)\left(\sin A+\sqrt{3}\right)=0$，

所以，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sin A=-\sqrt{3}$（舍去），

又$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$A=\frac{\pi}{3}$.

（2）因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc\geq\frac{(b+c)^2}{4}=27$，

当且仅当$b=c$时，等号成立，所以$a\geq 3\sqrt{3}$，

故a的最小值为$3\sqrt{3}$.

6．在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，向量$\boldsymbol{m}=(a+b,\sin A-\sin C)$，向量$\boldsymbol{n}=(c,\sin A-\sin B)$，且$\boldsymbol{m}//\boldsymbol{n}$.

（1）求角B的大小；

（2）若$b=2$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

【答案】（1）$B=\frac{\pi}{3}$；（2）$\sqrt{3}$.

【解析】（1）$\because \boldsymbol{m}//\boldsymbol{n}$，$\therefore (a+b)(\sin A-\sin B)-c(\sin A-\sin C)=0$，

由正弦定理得$(a+b)(a-b)-c(a-c)=0$，即$a^2+c^2-b^2=ac$，

由余弦定理得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$，

（2）$\because b=2$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore 4=a^2+c^2-ac\geq 2ac-ac=ac$，当且仅当$a=c$等号成立，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B\leq\sqrt{3}$，$\therefore \triangle ABC$面积的最大值为$\sqrt{3}$.

7．在①$b\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)=\sqrt{3}c\cos B$，②$2S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，③$\tan A+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\tan C$，这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并进行解答．问题：在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且_____．

（1）求角B；

（2）若$\triangle ABC$是锐角三角形，且$c=4$，求a的取值范围．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

【答案】（1）答案见解析；（2）$(2,8)$．

【解析】（1）选择①：条件即$b\sin C=\sqrt{3}c\cos B$，

由正弦定理可知，$\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos B$，

在$\triangle ABC$中，$B,C\in(0,\pi)$，所以$\sin B\neq 0,\sin C\neq 0$，

所以$\sin B=\sqrt{3}\cos B$，且$\cos B\neq 0$，即$\tan B=\sqrt{3}$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$，

选择②：条件即$2\times\dfrac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}ca\cos B$，即$\sin B=\sqrt{3}\cos B$，

在$\triangle ABC$中，$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B\neq 0$，则$\cos B\neq 0$，

所以$\tan B=\sqrt{3}$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$.

选择③：条件即$\tan A+\tan C=\sqrt{3}(\tan A\tan C-1)$，

所以$\tan B=-\tan(A+C)=-\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\sqrt{3}$，

在$\triangle ABC$中，$B,C\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由（1）知，$B=\frac{\pi}{3}$，所以$A=\pi-B-C=\frac{2\pi}{3}-C$，

由正弦定理可知，$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\tan C}+2$，

由$\triangle ABC$是锐角三角形得$\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2}\\0<A=\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，所以$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，

所以$\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$2<a<8$，故$a$的取值范围为$(2,8)$.

8．在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，$\sqrt{3}b\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=c\sin B$.

（1）求角C；

（2）若$\triangle ABC$的外接圆半径为2，求$\triangle ABC$面积的最大值.

【答案】（1）$\frac{\pi}{3}$；（2）$3\sqrt{3}$.

【解析】（1）因为$\sqrt{3}b\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=c\sin B$，所以$\sqrt{3}b\cos C=c\sin B$.

由正弦定理得$\sqrt{3}\sin B\cos C=\sin C\sin B$，

因为$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B\neq 0$，故$\sqrt{3}\cos C=\sin C$，$\tan C=\sqrt{3}$，

因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

（2）根据正弦定理得$\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，解得$c=2\sqrt{3}$，

根据余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=12$，

由基本不等式得$a^2+b^2\geq 2ab$，即$12+ab\geq 2ab$，解得$ab\leq 12$，

当且仅当$a=b=2\sqrt{3}$时等号成立，此时$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\leq 3\sqrt{3}$，

所以$\triangle ABC$面积的最大值为$3\sqrt{3}$.

9. 在①$\cos^2 A-\sqrt{3}\sin A\sin C=\cos^2 B+\sin^2 C$，②$2b\cos(A+\frac{\pi}{3})=c$，③$(a-b-c)(a+b-c)+(2+\sqrt{3})ac=0$，在三个条件中选一个填在下面试题的横线上，并加以解析．已知在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且_____．

（1）求角B；

（2）若$b=2$，求$\sqrt{3}c+2a$的取值范围．

【答案】（1）$B=\frac{5\pi}{6}$；（2）$(2\sqrt{3},4)$．

【解析】（1）若选条件①，则有$1-\sin^2 A-\sqrt{3}\sin A\sin C=1-\sin^2 B+\sin^2 C$．

根据正弦定理得$a^2+c^2-b^2=-\sqrt{3}ac$，所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{5\pi}{6}$．

若选条件②，根据正弦定理得$2\sin B(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A)=\sin C=\sin(A+B)$，

所以$\sin B\cos A-\sqrt{3}\sin B\sin A=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以$-\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin A\cos B$，

因为$0<A<\pi$，所以$\sin A\neq 0$，所以$-\sqrt{3}\sin B=\cos B$，解得$\tan B=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{5\pi}{6}$，

若选条件③，则有$(a-c)^2-b^2+(2+\sqrt{3})ac=0$，

所以$a^2+c^2-b^2=-\sqrt{3}ac$，则$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{5\pi}{6}$．

（2）由正弦定理知$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=4$，

所以$\sqrt{3}c+2a=4(\sqrt{3}\sin C+2\sin A)=4\left[\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{6}-A)+2\sin A\right]$

$=4\left[\sqrt{3}(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A)+2\sin A\right]=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A)=4\sin(A+\frac{\pi}{3})$，

因为$0<A<\frac{\pi}{6}$，所以$\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(A+\frac{\pi}{3})<1$，则$2\sqrt{3}<4\sin(A+\frac{\pi}{3})<4$，

所以$\sqrt{3}c+2a$的取值范围为$(2\sqrt{3},4)$.

10．在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，$\triangle ABC$的面积为S.

（1）若$a=2$，$b=3$，$S=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，求边c；

（2）若$\triangle ABC$是锐角三角形且角$A=2B$，求$\frac{a}{b}$的取值范围.

【答案】（1）$c=\sqrt{7}$或$\sqrt{19}$；（2）$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

【解析】（1）$\because S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，$\therefore\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$C\in(0,\pi)$，则$C=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

当$C=\frac{\pi}{3}$时，$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{7}$；

当$C=\frac{2\pi}{3}$时，$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{19}$，

$\therefore c=\sqrt{7}$或$\sqrt{19}$.

（2）由正弦定理得$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=2\cos B$，

$\because\triangle ABC$是锐角三角形，$\therefore 0<A<\frac{\pi}{2}$，$0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<C<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore 0<2B<\frac{\pi}{2}$，$0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<\pi-3B<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$，$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\sqrt{2}<\frac{a}{b}<\sqrt{3}$，

$\therefore\frac{a}{b}$的取值范围为$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

11．已知$\triangle ABC$的三个角A,B,C所对的边为a,b,c，若$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，D为边BC上一点，且$AD=1$，若$BD=DC$，则$\triangle ABC$面积的最大值为_____；若$BD:DC=2c:b$，则$2b+c$的最小值为_____.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{9\sqrt{7}}{7}$

【解析】（1）设$\angle BAD=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$，则$\angle CAD=\frac{\pi}{3}-\theta$，

由题意得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，

由于$BD=DC$，$AD=1$，所以$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{BD}{CD}=1$，

即$\frac{\frac{1}{2}\cdot1\cdot c\cdot\sin\theta}{\frac{1}{2}\cdot1\cdot b\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=1$，整理得$c\sin\theta=b\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$，

又$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{1}{2}c\sin\theta+\frac{1}{2}b\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=c\sin\theta=b\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$，

由$\frac{\sqrt{3}}{4}bc=b\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$，得$c=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$，

所以$S_{\triangle ABC}=c\sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由于$0<\theta<\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{2\pi}{3}<2\theta+\frac{2\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，

故，当$2\theta+\frac{2\pi}{3}=\pi$，即$\theta=\frac{\pi}{6}$时，$\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$，

则$\triangle ABC$的面积取得最大值为$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

（2）设$\angle BAD=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$，则$\angle CAD=\frac{\pi}{3}-\theta$，

$Q\ AD=1,BD:DC=2c:b$，$\therefore\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{2c}{b}$，即$\frac{\frac{1}{2}\cdot1\cdot c\cdot\sin\theta}{\frac{1}{2}\cdot1\cdot b\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{2c}{b}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/005122014243011113