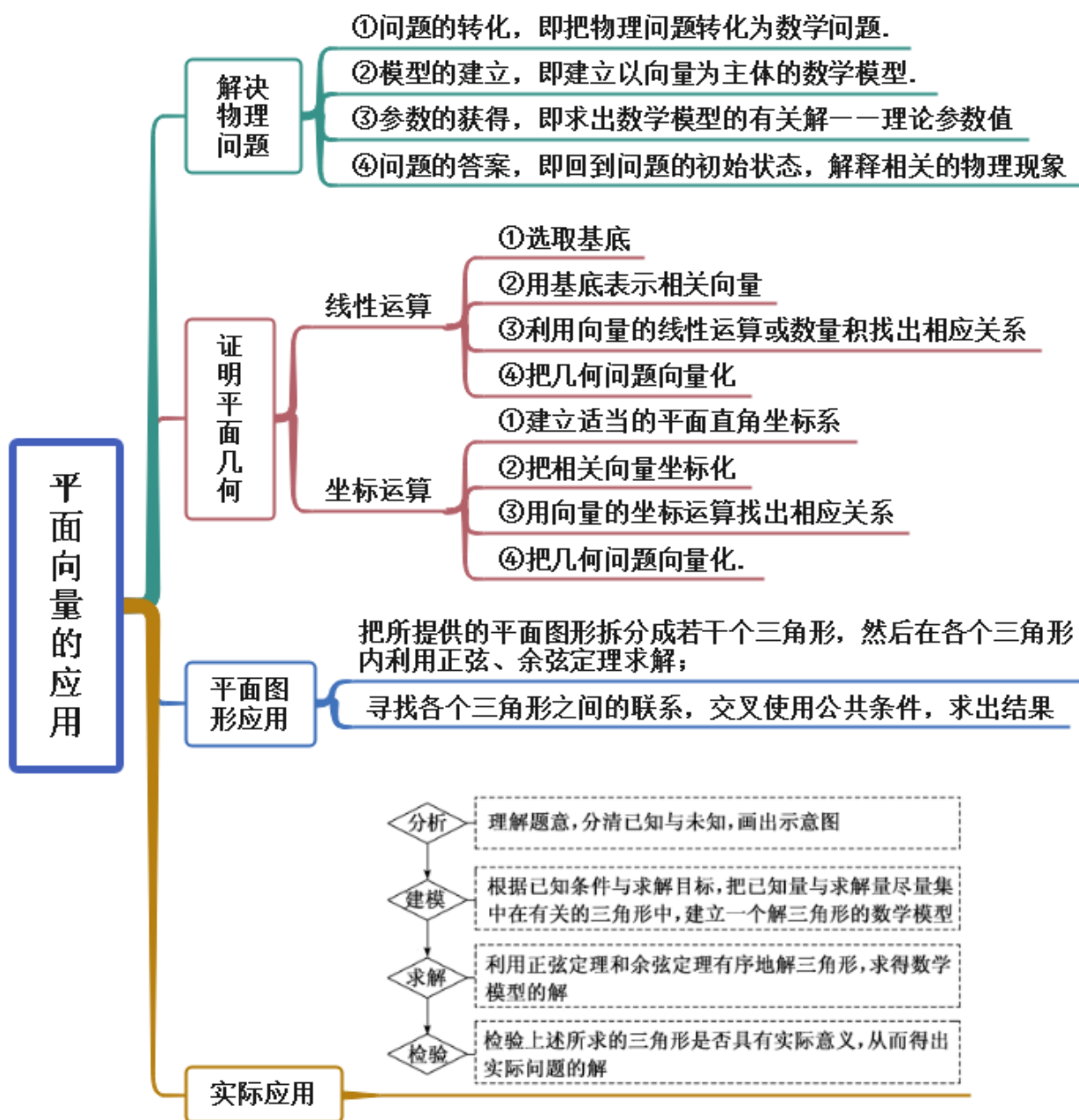
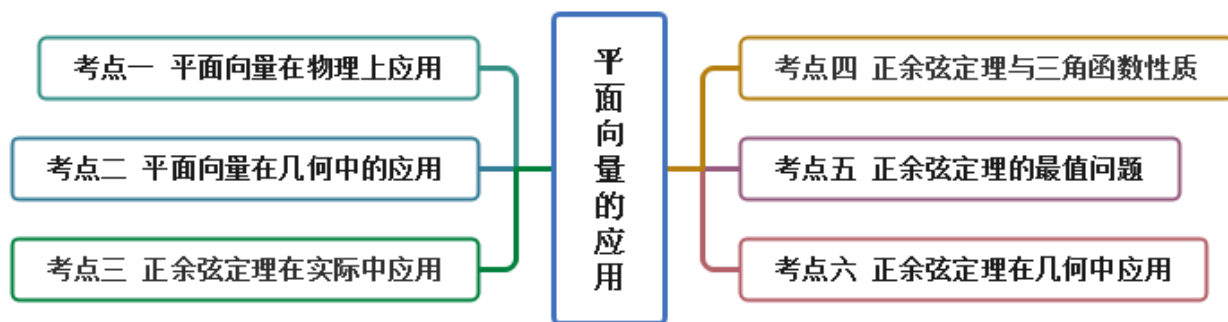


6.4.2 平面向量的应用（精讲）

思维导图

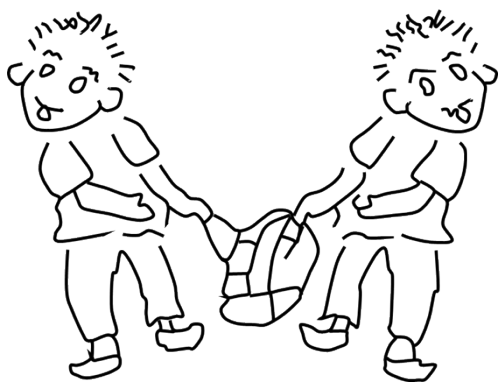


典例精讲



考点一 平面向量在物理上应用

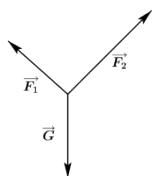
【例 1】（2023·哈尔滨）在日常生活中，我们会看到两个人共提一个行李包的情况（如图所示）。假设行李包所受的重力为 G ，所受的两个拉力分别为 $\vec{F}_1$ ， $\vec{F}_2$ ，且 $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ ， $\vec{F}_1$ 与 $\vec{F}_2$ 的夹角为 θ ，则以下结论不正确的是（ ）



- A. $|\vec{F}_1|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}|\vec{G}|$ B. θ 的范围为 $[0, \pi]$
- C. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $|\vec{F}_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{G}|$ D. 当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时， $|\vec{F}_1| = |\vec{G}|$

【答案】B

【解析】如图，对于选项 A：当 $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ 方向同向时，有 $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{G}$ ，此时 $|\vec{F}_1|$ 取得最小值，且 $|\vec{F}_1|$ 最小值为 $\frac{1}{2}|\vec{G}|$ ，A 正确；



对于选项 B：当 $\theta = \pi$ 时，有 $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ ，行李包不会处于平衡状态，即 $\theta \neq \pi$ ，B 错误；

对于选项 C：当行李包处于平衡时， $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{G}$ ，若 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，

则有 $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 = \vec{G}^2$ ，变形得， $\vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 = \vec{G}^2$ ，即 $|\vec{F}_1| = \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{G}|$ ，C 正确；

对于 D 选项：若 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ，则有 $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 = \vec{G}^2$ ，变形可得则有 $|\vec{F}_1| = |\vec{G}|$ ，D 正确，故选：B.

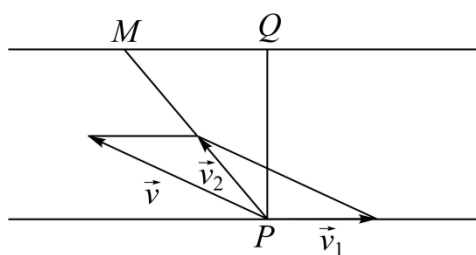
【一隅三反】

1. (2022·山东) 一条东西方向的河流两岸平行，河宽 $250\sqrt{3}\text{m}$ ，河水的速度为向正东 3km/h ．一艘小货船准备从河南岸码头 P 处出发，航行到河对岸 Q (PQ 与河的方向垂直) 的正西方向并且与 Q 相距 250m 的码头 M 处卸货，若水流的速度与小货船航行的速度的合速度的大小为 5km/h ，则当小货船的航程最短时，小货船航行速度的大小为 ()

- A. $3\sqrt{3}\text{km/h}$ B. 6km/h C. 7km/h D. $3\sqrt{6}\text{km/h}$

【答案】C

【解析】由题意，当小货船的航程最短时，航线路径为线段 PM ，设小货船航行速度为 v ，水流的速度为 v_1 ，水流的速度与小货船航行的速度的合速度为 v_2 ，作出示意图如下：



$PQ = 250\sqrt{3}\text{m}$ ， $QM = 250\text{m}$ ，在 $Rt\triangle PQM$ 中，有 $\tan \angle PMQ = \frac{PQ}{QM} = \frac{250\sqrt{3}}{250} = \sqrt{3}$ ，

所以 $\angle PMQ = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle MPQ = \frac{\pi}{6}$ ， $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ ，所以 $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ，

所以 $|\vec{v}| = \sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2} = \sqrt{|\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_1|^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} = \sqrt{5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \cos \frac{2\pi}{3}} = 7$ ，

所以小货船航行速度的大小为 7km/h ，故选：C.

2. (2022·全国·高一) 长江某地南北两岸平行，一艘游船从南岸码头 A 出发航行到北岸．假设游船在静水中的航行速度 v_1 的大小为 $|\vec{v}_1| = 10\text{km/h}$ ，水流的速度 v_2 的大小为 $|\vec{v}_2| = 4\text{km/h}$ ．设 v_1 和 v_2 的夹角为

$\theta (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ ，北岸的点 A' 在 A 的正北方向，则游船正好到达 A' 处时， $\cos \theta$ 等于 ()

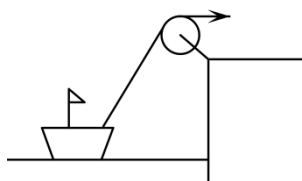
- A. $\frac{\sqrt{21}}{5}$ B. $-\frac{\sqrt{21}}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$

【答案】D

【解析】设船的实际速度为 $\vec{v}$ ，因为点 A' 在 A 的正北方向，所以 $\vec{v} \perp \vec{v}_2$ ，

所以 $\cos \theta = -\cos(\pi - \theta) = -\frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$. 故选：D.

3. (2022·全国·高一课时练习) (多选) 如图所示，小船被绳子拉向岸边，船在水中运动时，设水的阻力大小不变，那么小船匀速靠岸过程中 ()



- A. 船受到的拉力不断增大 B. 船受到的拉力不断变小
C. 船受到的浮力不断变小 D. 船受到的浮力保持不变

【答案】AC

【解析】设水的阻力为 $\vec{f}$ ，船受到的拉力为 $\vec{F}$ ， $\vec{F}$ 与水平方向的夹角为 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)，

则 $|\vec{F}| \cos \theta = |\vec{f}|$ ，故 $|\vec{F}| = \frac{|\vec{f}|}{\cos \theta}$ ，因为 θ 不断增大，所以 $\cos \theta$ 不断减小，

故 $|\vec{F}|$ 不断增大. 因为 $|\vec{F}| \sin \theta$ 不断增大，所以船受到的浮力不断减小；故选：AC.

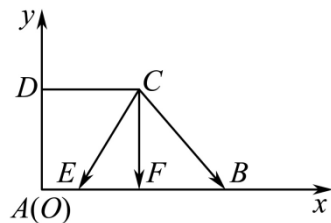
考点二 平面向量在几何中的应用

【例 2-1】(2022·河北) 在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 2CD = 3$ ， $AD = 2$ ，若 EF 在线段 AB 上运动，且 $EF = 1$ ，则 $\vec{CE} \cdot \vec{CF}$ 的最小值为 ()

- A. 5 B. $\sqrt{3}$ C. 4 D. $\frac{15}{4}$

【答案】D

【解析】建立如图所示的坐标系，



则 $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, 设 $E(x, 0)$, 则 $F(x+1, 0)$, 且 $0 \leq x \leq 2$,

$\therefore \vec{CE} = \left(x - \frac{3}{2}, -2\right)$, $\vec{CF} = \left(x - \frac{1}{2}, -2\right)$, $\vec{CE} \cdot \vec{CF} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4 = (x-1)^2 + \frac{15}{4}$

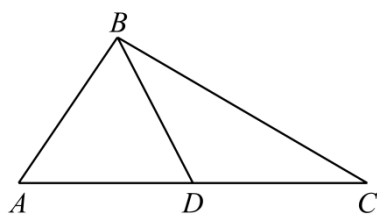
故当 $x=1$ 时, $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF}$ 的最小值为 $\frac{15}{4}$, 故选: D.

【例 2-2】. (2022·北京通州) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, AC 边的中点为 D , 且 $BD=1$, 则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的最大值为 ()

- A. 2 B. 3 C. $2\sqrt{3}$ D. 4

【答案】D

【解析】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AC 边的中点为 D



由 $BD=1$, 可得: $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |2\overrightarrow{BD}| = 2 \therefore \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$,

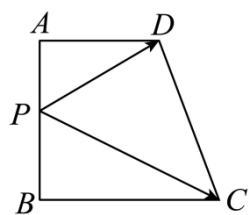
$\therefore |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos \angle ABC = 4$, 可得: $|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = 4 + |\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|$, 且 $|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 \geq 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|$,

$\therefore 4 + |\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}| \geq 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|$, 可得: $|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}| \leq 4$, (当且仅当 $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = 2$ 时等号成立)

则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的最大值为 4. 故选: D.

【一隅三反】

1. (2022·黑龙江) 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $AD=2$, $BC=3$, P 是线段 AB 上的动点, 则 $|\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PD}|$ 的最小值为 ()



- A. $2\sqrt{5}$ B. 5 C. $3\sqrt{5}$ D. 7

【答案】D

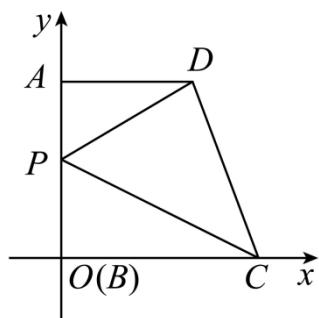
【解析】如图, 以 B 点为坐标原点, 建立平面直角坐标系,

设 $AB=a$, $BP=x$ ($0 \leq x \leq a$), 因为 $AD=2$, $BC=3$,

所以 $P(0, x)$, $C(3, 0)$, $D(2, a)$, 所以 $\overrightarrow{PC} = (3, -x)$, $\overrightarrow{PD} = (2, a-x)$,

$2\overrightarrow{PD} = (4, 2a-2x)$, 所以 $\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PD} = (7, 2a-3x)$, 所以 $|\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PD}| = \sqrt{49 + (2a-3x)^2} \geq 7$,

所以当 $2a - 3x = 0$ ，即 $x = \frac{2}{3}a$ 时， $\left| \overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PD} \right|$ 的最小值为 7，故选：D.



2. (2022·贵州) $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形，点 D, E 分别在边 AC, BC 上，且 $DE \perp BC$ ，则 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{27}{4}$ B. $\frac{27}{8}$ C. $-\frac{27}{8}$ D. $-\frac{27}{4}$

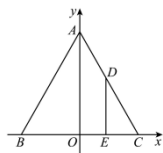
【答案】D

【解析】以 BC 所在的边为 x 轴、 BC 垂直平分线为 y 轴建立如图所示平面直角坐标系，

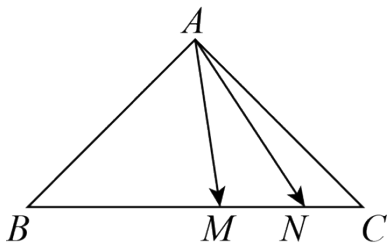
设 $OE = x$ ，则 $CE = 3 - x$ ， $DE = \sqrt{3}CE = \sqrt{3}(3 - x)$ ，则 $A(0, 3\sqrt{3}), E(x, 0), D(x, \sqrt{3}(3 - x))$ ，

所以 $\overrightarrow{DA} = (-x, \sqrt{3}x), \overrightarrow{DE} = (0, -\sqrt{3}(3 - x))$ ，则 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = -\sqrt{3}(3 - x) \times \sqrt{3}x = 3x^2 - 9x = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} \geq -\frac{27}{4}$

则 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的最小值为 $-\frac{27}{4}$ ，故选：D.



3. (2022·四川雅安) 如图，在等腰直角 $\triangle ABC$ 中，斜边 $BC = 4$ ， M, N 为线段 BC 上的动点，且 $MN = 1$ ，则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{13}{4}$ B. $\frac{15}{4}$ C. 4 D. 6

【答案】B

【解析】因为在等腰直角 $\triangle ABC$ 中，斜边 $BC = 4$ ，所以 $AB = AC = 2\sqrt{2}$ ，

因为 $BC=4$ 、 $MN=1$ ，所以 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ，设 $BM=t$ ，则 $0 \leq t \leq 4$ ，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \right) = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= 8 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot t \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + t^2 + \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{4} \cdot t \cdot 4 \cdot 1 = t^2 - 3t + 6\end{aligned}$$

所以当 $t = \frac{3}{2}$ 时， $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 取得最小值 $\frac{15}{4}$ ，故选：B

考点三 正余弦定理在实际生活应用

【例 3】（2022·湖南）一艘轮船沿北偏东 28° 方向，以 18 海里/时的速度沿直线航行，一座灯塔原来在轮船的南偏东 32° 方向上，经过 10 分钟的航行，此时轮船与灯塔的距离为 $\sqrt{19}$ 海里，则灯塔与轮船原来的距离为（ ）

- A. 2 海里 B. 3 海里 C. 4 海里 D. 5 海里

【答案】A

【解析】如图，设 A 为轮船原来的位置， B 为轮船 10 分钟后的位置， C 为灯塔的位置，

由题意知 $AB = 18 \times \frac{10}{60} = 3$ ， $BC = \sqrt{19}$ ， $\angle BAC = 180^\circ - 32^\circ - 28^\circ = 120^\circ$ 。

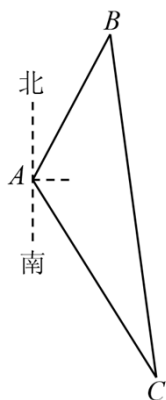
由余弦定理得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$ ，

所以 $19 = 9 + AC^2 + 3AC$ ，化简得 $C^2 + 3AC - 10 = 0$ ，

解得 $AC = 2$ 或 $AC = -5$ （舍去），

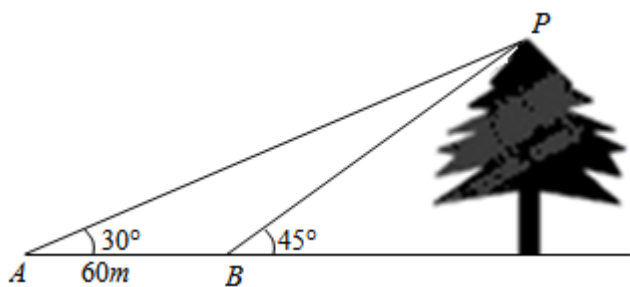
所以灯塔与轮船原来的距离为 2 海里，

故选：A



【一隅三反】

1. （2022·黑龙江）如图所示，为测一树的高度，在地面上选取 A 、 B 两点，从 A 、 B 两点分别测得树尖的仰角为 30° 、 45° ，且 A 、 B 两点之间的距离为 60m，则树的高度为（ ）



- A. $(30+30\sqrt{3})\text{m}$ B. $(30+15\sqrt{3})\text{m}$ C. $(15+30\sqrt{3})\text{m}$ D. $(15+15\sqrt{3})\text{m}$

【答案】A

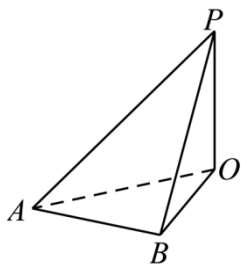
【解析】在 $\triangle PAB$ 中， $\angle PAB = 30^\circ$ ， $\angle APB = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ ， $AB = 60$ ，

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{由正弦定理得：} \frac{PB}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 15^\circ}, \therefore PB = \frac{\frac{1}{2} \times 60}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = 30(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

$$\therefore \text{树的高度为 } PB \sin 45^\circ = 30 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = (30 + 30\sqrt{3}) \text{ (m)}. \text{ 故选：A.}$$

2. (2022·安徽) 如图为 2022 年北京冬奥会首钢滑雪大跳台示意图，为测量大跳台最高点 P 距地面的距离，小明同学在场馆内的点 A 测得 P 的仰角为 30° ， $\angle ABO = 75^\circ$ ， $\angle BAO = 60^\circ$ ， $AB = 60$ (单位：m)，点 A, B, O 在同一水平地面上，则大跳台最高高度 $OP =$ ()



- A. $(30+10\sqrt{3})\text{m}$ B. $30\sqrt{2}\text{m}$
C. $(10\sqrt{2}+10\sqrt{6})\text{m}$ D. $30\sqrt{3}\text{m}$

【答案】A

【解析】在 $\triangle ABO$ 中， $\angle ABO = 75^\circ$ ， $\angle BAO = 60^\circ$ ，则 $\angle AOB = 45^\circ$ ，

$$\therefore \sin \angle ABO = \sin(\angle AOB + \angle BOA) = \sin \angle AOB \cos \angle BOA + \cos \angle AOB \sin \angle BOA$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4},$$

由正弦定理可得 $\frac{AB}{\sin \angle AOB} = \frac{AO}{\sin \angle ABO}$ ，则 $AO = \frac{AB \sin \angle ABO}{\sin \angle AOB} = \frac{60 \times \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 30(1+\sqrt{3})$ ，

在 $\text{Rt} \triangle APO$ 中， $\angle PAO = 30^\circ$ ，

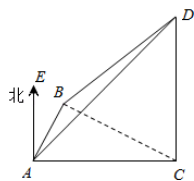
$\therefore \tan \angle PAO = \frac{OP}{AO}$ ，则 $OP = AO \times \tan \angle PAO = 30(1+\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 30 + 10\sqrt{3}(\text{m})$. 故选：A.

3. (2022·山东临沂·高一期末) 一个大型喷水池的中央有一个强力喷水柱，为了测量喷水柱喷出的水柱的高度，某人在喷水柱正西方向的点 A 处测得水柱顶端的仰角为 45° ，沿点 A 向北偏东 30° 前进 60m 到达点 B ，在点 B 处测得水柱顶端的仰角为 30° ，则水柱的高度是 ()

A. 25m B. 30m C. 35m D. 40m

【答案】B

【解析】如图所示，



设水柱 CD 的高度为 h ，

在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 中， $\therefore \angle DAC = 45^\circ$ ， $\therefore AC = h$ ，

$\therefore \angle BAE = 30^\circ$ ， $\therefore \angle CAB = 60^\circ$ ，

又 $\therefore B, A, C$ 在同一水平面上，

$\therefore \triangle BCD$ 是以 C 为直角顶点的直角三角形，

在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中， $\angle CBD = 30^\circ$ ， $\therefore BC = \sqrt{3}h$ ，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos 60^\circ$ ，

$\therefore (\sqrt{3}h)^2 = h^2 + 60^2 - 2 \times 60 \times h \times \frac{1}{2}$ ，即 $h^2 + 30h - 1800 = 0$ ，解得 $h = 30$ 。 $\therefore$ 水柱的高度是 30m ，故选：B.

考点四 正余弦定理与三角函数性质

【例 4】(2022·新疆) 设函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$ ，其中向量 $\vec{m} = (2 \cos x, 1)$ ， $\vec{n} = (\cos x, \sqrt{3} \sin 2x)$ ($x \in \mathbb{R}$)。

(1) 求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边，已知 $f(A) = 2$ ， $b = 1$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求

$\frac{b+c}{\sin B + \sin C}$ 的值。

【答案】(1) -1；(2) 2.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/005323104230011331>