云南省昆明市云南师范大学附属中学2025届高三高考适应性月考卷（四）数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．在复平面内，复数$z=\mathrm{i}^{2024}+\mathrm{i}^{2025}$，则$\bar{z}$的虚部为（　）

A．1　　B．-1　　C．i　　D．$-\mathrm{i}$

2．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，且$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\frac{1}{2}\vec{b}$，则$|\vec{a}-2\vec{b}|=$（　）

A．5　　B．$\sqrt{5}$　　C．3　　D．$\sqrt{3}$

3．已知函数$f(x)=\sin(x-1)+x$，若$f(a)+f(b)=2$，则$a+b=$（　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．-2

4．在$\triangle ABC$中，$\tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$，则$\cos C=$（　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5．已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n>0$，若$S_5=5$，$S_{15}=105$，则$S_{20}=$（　）

A．550　　B．520　　C．450　　D．425

6．下列不等关系正确的是（　）

A．$\ln\frac{1}{2}<2^{\frac{1}{2}}<\sin\frac{1}{2}$　　B．$\sin 1<\cos 1<\tan 1$

C．$\sqrt{8}-\sqrt{7}<\sqrt{7}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-\sqrt{5}$　　D．$\log_2 3<\log_3 4<\log_4 5$

7．已知函数$f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$的图象的一条对称轴是$x=2\pi$，且$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上恰有两个根，则$\omega$的最大值是（　）

A．$\frac{45}{8}$　　B．$\frac{41}{8}$　　C．$\frac{37}{8}$　　D．$\frac{29}{8}$

8．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P(x_1,y_1)$是$C$上的一点，$\triangle PF_1F_2$的内切圆圆心为$Q(x_2,y_2)$，当$x_1=2$时，$x_2=\sqrt{3}$，则$C$的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}-1$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$2-\sqrt{3}$

二、多选题

9．云南的鲜花饼不仅是一种美味的糕点，更是一件艺术品，它表达了人们对生活的热爱，可以让人们在繁忙的都市生活中，感受春天的味道．因此，三朵玫瑰一个饼，深受人们的喜爱，由于现烤鲜花饼的保质期较短，为了提升品质，能让顾客吃到更新鲜的饼，某商店老板统计了该商店六月份整个月的销售量，如下表：（　　）

日销量/个	$[250,350)$	$[350,450)$	$[450,550)$	$[550,650)$	$[650,750)$
天数	5	7	9	4	5

A．该商店六月份鲜花饼日销售量的第70%分位数是550

B．该商店六月份平均每天销售鲜花饼500个（同一组数据用该组区间中点值为代表）

C．若当天准备550个鲜花饼，则全部售完的概率为$\frac{2}{3}$

D．若当天准备450个鲜花饼，则没有全部售完的概率为$\frac{2}{5}$

10．数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+2a_na_{n+1}-a_n=0\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，$a_1=1$，则下列结论正确的是（　　）

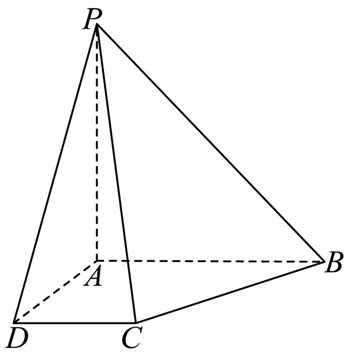
A．若$b_n=3^{\frac{1}{a_n}}$，则$\{b_n\}$为等比数列

B．若$c_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$，则$\{c_n\}$为等差数列

C．$a_n=2n-1$

D．$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}}=\frac{2n-1}{a_n}$

11．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB=AD=2CD=4$，$AB// CD$，$AB\perp AD$，已知点M在平面PAD上运动，点H在平面$ABCD$上运动，则下列说法正确的是（　　）



A．若点H到CD的距离等于其到平面PAB的距离，则点H的轨迹为抛物线的一部分

B．若 $\angle BMA=\angle CMD$，则点 M 的轨迹为圆的一部分

C．若 BM 与 BD 所成的角为 30°，则点 M 的轨迹为椭圆的一部分

D．若 CM 与平面 $ABCD$ 所成的角为 30°，则点 M 的轨迹为双曲线的一部分

三、填空题

12．集合 $A=\left\{\frac{15}{x+2}\in \mathrm{Z} \middle| x\in \mathrm{N}^*\right\}$，则 A 的真子集个数为______个．

13．若曲线 $y=\ln\left(x-2\right)+4$ 在 $x=3$ 处的切线也是曲线 $y=x^2-x+a$ 的切线，则 $a=$______.

14．在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C，所对的边分别为 a,b,c，已知 $c=1$，$\frac{\sin B}{\sin A}=b^2-a^2+1$，且 $a\neq b$，则 $\sin B-\sin A$ 的最大值为______.

四、解答题

15．近几年，我国促进新能源汽车产业发展的政策频出，积极推动新能源汽车市场的迅速发展．某新能源汽车公司为了解其对 A 型充电桩进行投资后所获得的利润 y（单位：百万元）关于投资金额 x（单位：百万元）之间的关系，统计后得到 10 组样本数据，根据统计数据计算得到 $\sum_{i=1}^{10}y_i=40$，$\sum_{i=1}^{10}x_i=70$，利润的方差 $S_y^2=3.6$，投资金额的方差 $S_x^2=12$，以及样本相关系数 $r=0.96$.

(1)根据样本相关系数 r 判断利润 y 与投资 x 的相关性强弱，并求出 y 关于 x 的经验回归方程（精确到 0.01）；

(2)为了解使用 A 型充电桩的车主性别与使用满意度（分为满意与不满意）的情况，该公司又随机调查了该地区 150 名使用 A 型充电桩的车主，其中男性车主有 60 名对 A 型充电桩的使用表示满意，有 30 名对 A 型充电桩的使用表示不满意；女性车主中有 60%对 A 型充电桩的使用表示满意．将频率视为概率，用样本估计总体．已知该地区一位车主对 A 型充电桩的使用表示满意，求这位车主是男性的概率．

附：(i) 样本相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$，当 $|r|\in\left[0.75,1\right]$ 时，相关性较强，当 $|r|\in\left[0.3,0.75\right)$ 时，相关性一般；

（ii）经验回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}，\quad \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}；$$

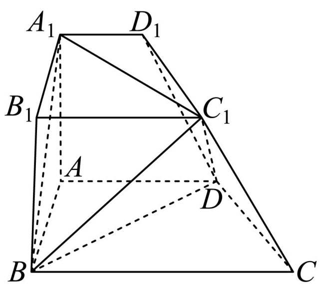
（iii）$\sqrt{30}\approx 5.477$．

16．已知 $\{a_n\}$ 是正项递增的等比数列，且 $a_2a_6=64$，$a_3+a_5=20$．数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $(n+1)b_n=2n^2+n+C$．

(1)分别求数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $c_n=(-1)^n a_n+\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}$，求数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和 S_n．

17. 如图，在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为等腰梯形，$AD\,//\,BC$，平面 $ADD_1A_1\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 $ABCD$．



(1)证明：$AA_1\perp$ 平面 ABC；

(2)若 $AB=AD=AA_1=4$，$A_1B_1=2$，$\angle BAD=120^\circ$，求平面 A_1BC_1 与平面 DBC_1 夹角的余弦值．

18．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，且焦距为4，左顶点为 E，过右焦点 F_2 的动直线 l 交 C 于 A，B 两点，当 l 垂直于 x 轴时，$|AB|=6$．

(1)求 C 的方程；

(2)若动直线 l 与 C 的左支交于点 A，右支交于点 B，求 $\dfrac{S_{\triangle AEF_1}}{S_{\triangle BEF_2}}$ 的取值范围．

19．设 $y=f(x)$ 是定义域为 D 且图象连续不断的函数，若存在区间 $[a,b]\subseteq D$ 和 $x_0\in(a,b)$，使得 $y=f(x)$ 在 $[a,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,b]$ 上单调递减，则称 $y=f(x)$ 为“山峰函数”，x_0 为

"峰点"，$[a,b]$称为$y=f(x)$的一个"峰值区间".

(1)判断$g(x)=x^2+\cos x$是否是山峰函数？若是，请指出它的一个峰值区间；若不是，请说明理由；

(2)已知$m>1$，$h(x)=(m+2)x-x^2-m^x$是山峰函数，且$[0,1]$是它的一个峰值区间，求m的取值范围；

(3)设$n\in\mathbf{R}$，函数$I(x)=\left[x^3-2nx^2+(4n-4)x\right]\ln x-\frac{1}{3}x^3+nx^2-(4n-4)x$．设函数$y=I(x)$是山峰函数，$[s,t]$是它的一个峰值区间，并记$t-s$的最大值为$d(n)$．若$I\left(\frac{2}{3}\right)<0$，且$I\left(\frac{2}{3}\right)\le I(1)$，$I\left(\frac{3}{2}\right)\le I(1)$，求$d(n)$的最小值．（参考数据：$\ln\frac{3}{2}\approx 0.4$）

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	A	B	D	C	B	A	AD	ABD
题号	11									
答案	BCD									

1．B

【分析】计算出 $z=1+\mathrm{i}$，得到共轭复数，求出虚部.

【详解】复数 $z=\mathrm{i}^{2024}+\mathrm{i}^{2025}=1+\mathrm{i}$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}=1-\mathrm{i}$，

所以 $\bar{z}$ 的虚部为 -1.

故选：B.

2．D

【分析】先确定 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，再求 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2$，进而可解出 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$.

【详解】解：因为 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\vec{b}$，

所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，

所以 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=5-4\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ ，

所以 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{3}$.

故选：D.

3．A

【分析】构造奇函数，利用函数的平移，可得函数 $f\left(x\right)$ 的对称性，可得答案.

【详解】设 $g\left(x\right)=\sin x+x$，由于 $g\left(x\right)=-g\left(-x\right)$，

故 $g\left(x\right)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则 $g\left(x\right)$ 的图象关于原点对称.

又 $f\left(x\right)=g\left(x-1\right)+1$，所以 $f\left(x\right)$ 的图象关于 $\left(1,1\right)$ 对称，

即 $f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=2$，由 $f\left(a\right)+f\left(b\right)=2$，所以 $a+b=2$，

故选：A.

4．B

【分析】利用 $\tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$，结合 $\tan\left(A+B\right)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$，可求出 $\tan C$，进而解出 $\cos C$.

【详解】解：因为$\tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$，所以$\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$，

即$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1=\tan\left(A+B\right)=\tan\left(\pi-C\right)=-\tan C$，所以$\tan C=-1$，

又因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{3\pi}{4}$，于是$\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：B．

5．D

【分析】由等比数列前n项和的性质可得答案.

【详解】由等比数列前n项和的性质可得，S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$，$S_{20}-S_{15}$成等比数列，

则$\frac{S_{10}-S_5}{S_5}=\frac{S_{15}-S_{10}}{S_{10}-S_5}=\frac{S_{20}-S_{15}}{S_{15}-S_{10}}$，设$S_{10}=x$，则$\frac{x-5}{5}=\frac{105-x}{x-5}$，$\because$等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_n>0$，

$\therefore$解得，$x=25$，故$S_{10}=25$，$\therefore\frac{S_{20}-105}{105-25}=\frac{105-25}{25-5}\Rightarrow S_{20}=425$，

故选：D．

6．C

【分析】对于A，利用中间量$0,1$即可比较三个数的大小；对于B，利用中间量$\frac{\sqrt{2}}{2},1$即可比较三个数的大小；

对于C，对三个数进行分子有理化处理，再比较大小即可；对于D，借助基本不等式比较大小即可.

【详解】对于A，$\ln\frac{1}{2}<\ln 1=0$，$0<\sin\frac{1}{2}<1$，$2^{\frac{1}{2}}>2^0=1$，$\therefore\ln\frac{1}{2}<\sin\frac{1}{2}<2^{\frac{1}{2}}$，A错误；

对于B，$1>\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 1<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan 1>\tan\frac{\pi}{4}=1$，$\therefore\cos 1<\sin 1<\tan 1$，B错误；

对于C，$\sqrt{8}-\sqrt{7}=\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$，$\sqrt{7}-\sqrt{6}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$，$\sqrt{6}-\sqrt{5}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$，

$\because\sqrt{8}+\sqrt{7}>\sqrt{7}+\sqrt{6}>\sqrt{6}+\sqrt{5}>0$，$\therefore\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}<\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}<\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$，

即$\sqrt{8}-\sqrt{7}<\sqrt{7}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-\sqrt{5}$，C正确；

对于D，由于$\lg 2\times\lg 4<\left(\frac{\lg 2+\lg 4}{2}\right)^2$，所以$\lg 2\times\lg 4<\left(\frac{\lg 8}{2}\right)^2<\left(\frac{\lg 9}{2}\right)^2$，即$\lg 2\times\lg 4<\left(\lg 3\right)^2$，

所以$\frac{\lg 3}{\lg 2}>\frac{\lg 4}{\lg 3}$，即$\log_2 3>\log_3 4$；同理，$\log_3 4>\log_4 5$，所以$\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$，D错误，

故选：C．

7．B

【分析】从函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恰有两个根可得出 $\frac{7}{2}\le\omega<\frac{11}{2}$，又函数 $f\left(x\right)$ 图象的一条对称轴是 $x=2\pi$，可得出 $\omega=\frac{1}{2}k+\frac{1}{8}$，进而求得 ω 的最大值.

【详解】解：由题意可得，函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\omega>0\right)$，

由于 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]$；

又由 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恰有两个根，所以 $\begin{cases}2\pi\le\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\ \frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<3\pi\end{cases}$，解得 $\frac{7}{2}\le\omega<\frac{11}{2}$；

又因为函数 $f\left(x\right)$ 图象的一条对称轴是 $x=2\pi$，

所以 $2\omega\pi+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，即 $\omega=\frac{1}{2}k+\frac{1}{8}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

又 $\omega>0$ 且 $\frac{7}{2}\le\omega<\frac{11}{2}$，所以当 $k=10$ 时，$\omega_{\max}=\frac{41}{8}$，

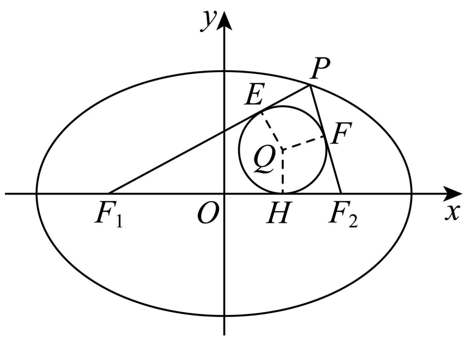
故选：B．

8．A

【分析】由点 $P(x_1,y_1)$ 在 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，结合两点之间的距离公式和椭圆的定义求出 $\left|PF_1\right|=ex_1+a$，$\left|PF_2\right|=a-ex_1$，

即 $\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|=2ex_1$，再利用内切圆的性质得到 $\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|=2x_2$，即可求出 C 的离心率.

【详解】



设 $c^2=a^2-b^2$，则 $F_1(-c,0)$，$F_2\left(c,0\right)$；

由点 $P(x_1,y_1)$ 在 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，则有 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，即 $y_1^2=b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)$，

所以 $\left|PF_1\right|=\sqrt{\left(x_1+c\right)^2+y_1^2}=\sqrt{\left(x_1+c\right)^2+b^2\left(1\ \frac{x_1^2}{a^2}\right)}=\sqrt{\frac{c^2x_1^2}{a^2}+2cx_1+a^2}=\sqrt{\left(\frac{cx_1}{a}+a\right)^2}$；

又$-a \le x_1 \le a$，所以$|PF_1| = \frac{cx_1}{a} + a = ex_1 + a$，$|PF_2| = 2a - |PF_1| = a - ex_1$，则$|PF_1| - |PF_2| = 2ex_1$；

如图 1，由焦点$\triangle PF_1F_2$的内切圆可得：$|PE| = |PF|$，$|EF_1| = |F_1H|$，$|FF_2| = |F_2H|$，

所以$|PF_1| - |PF_2| = |EF_1| - |FF_2| = |F_1H| - |F_2H| = 2ex_1$；

又$|F_1H| - |F_2H| = (c + x_2) - (c - x_2) = 2ex_1 = 2x_2$，所以$x_2 = ex_1$，即$e = \frac{x_2}{x_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

故选：A．

【点睛】关键点点睛：

本题的关键点是推理出二级结论：点$P(x_1, y_1)$在椭圆上，则$|PF_1| = ex_1 + a$，$|PF_2| = a - ex_1$，

再结合内切圆的性质$|PF_1| - |PF_2| = |F_1H| - |F_2H|$，建立关于$x_1, x_2, e$的等量关系.

9．AD

【分析】根据第 70%分位数的定义，结合古典概型运算公式逐一判断即可.

【详解】$\because \frac{5}{30} + \frac{7}{30} + \frac{9}{30} = 0.7$，

$\therefore$该商店六月份鲜花饼日销售量的第 70%分位数是 550，A 正确；

六月份平均每天销售鲜花饼$\frac{5\times300 + 7\times400 + 9\times500 + 4\times600 + 5\times700}{30} = 490$个，B 错误；

根据销售数据得：日销售量大于 550 个的概率为$\frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{3}{10}$，C 错误；

日销售量小于 450 个的概率为$\frac{5}{30} + \frac{7}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$，D 正确，

故选：AD

10．ABD

【分析】将$a_{n+1} + 2a_na_{n+1} - a_n = 0\left(n \in \mathbf{N}^*\right)$两边同除$a_na_{n+1}$，变形转化可求出$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，进而求出$a_n$.进而分别结合等比数列、等差数列定义研究 A、B 项，利用求和公式研究 D 项.

【详解】由$a_{n+1} + 2a_na_{n+1} - a_n = 0$，$a_1 = 1$，两边同除$a_na_{n+1}$，

得：$\frac{1}{a_n} + 2 - \frac{1}{a_{n+1}} = 0$，即$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$，且$\frac{1}{a_1} = 1$，

所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是公差为 2，首项为 1 的等差数列，