专题36 切线与切点弦问题

【方法技巧与总结】

1、点$M\left(x_0，y_0\right)$在圆$x^2+y^2=r^2$上，过点M作圆的切线方程为$x_0x+y_0y=r^2$.

2、点$M\left(x_0，y_0\right)$在圆$x^2+y^2=r^2$外，过点M作圆的两条切线，切点分别为A，B，则切点弦AB的直线方程为$x_0x+y_0y=r^2$.

3、点$M\left(x_0，y_0\right)$在圆$x^2+y^2=r^2$内，过点M作圆的弦AB（不过圆心），分别过A，B作圆的切线，则两条切线的交点P的轨迹方程为直线$x_0x+y_0y=r^2$.

4、点$M\left(x_0，y_0\right)$在圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上，过点M作圆的切线方程为$\left(x_0-a\right)(x-a)+\left(y_0-b\right)(y-b)=r^2$.

5、点$M\left(x_0，y_0\right)$在圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$外，过点M作圆的两条切线，切点分别为A，B，则切点弦AB的直线方程为$\left(x_0-a\right)(x-a)+\left(y_0-b\right)(y-b)=r^2$.

6、点$M\left(x_0，y_0\right)$在圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$内，过点M作圆的弦AB（不过圆心），分别过A，B作圆的切线，则两条切线的交点P的轨迹方程为$\left(x_0-a\right)(x-a)+\left(y_0-b\right)(y-b)=r^2$.

7、点$M\left(x_0，y_0\right)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，过点$M$作椭圆的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

8、点$M\left(x_0，y_0\right)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$外，过点$M$作椭圆的两条切线，切点分别为$A$，$B$，则切点弦$AB$的直线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

9、点$M\left(x_0，y_0\right)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$内，过点$M$作椭圆的弦$AB$（不过椭圆中心），分别过$A$，$B$作椭圆的切线，则两条切线的交点$P$的轨迹方程为直线$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

10、点$M\left(x_0，y_0\right)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$上，过点$M$作双曲线的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

11、点$M\left(x_0，y_0\right)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$外，过点$M$作双曲线的两条切线，切点分别为$A$，$B$，则切点弦$AB$的直线方程为$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

12、点$M\left(x_0，y_0\right)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$内，过点$M$作双曲线的弦$AB$

（不过双曲线中心），分别过 A，B 作双曲线的切线，则两条切线的交点 P 的轨迹方程为直线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$．

13、点 $M\left(x_0，y_0\right)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，过点 M 作抛物线的切线方程为 $y_0y=p\left(x+x_0\right)$．

14、点 $M\left(x_0，y_0\right)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 外，过点 M 作抛物线的两条切线，切点分别为 A，B，则切点弦 AB 的直线方程为 $y_0y=p\left(x+x_0\right)$．

15、点 $M\left(x_0，y_0\right)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 内，过点 M 作抛物线的弦 AB，分别过 A，B 作抛物线的切线，则两条切线的交点 P 的轨迹方程为直线 $y_0y=p\left(x+x_0\right)$．

【题型归纳目录】

题型一：切线问题

题型二：切点弦过定点问题

题型三：利用切点弦结论解决定值问题

题型四：利用切点弦结论解决最值问题

题型五：利用切点弦结论解决范围问题

【典例例题】

题型一：切线问题

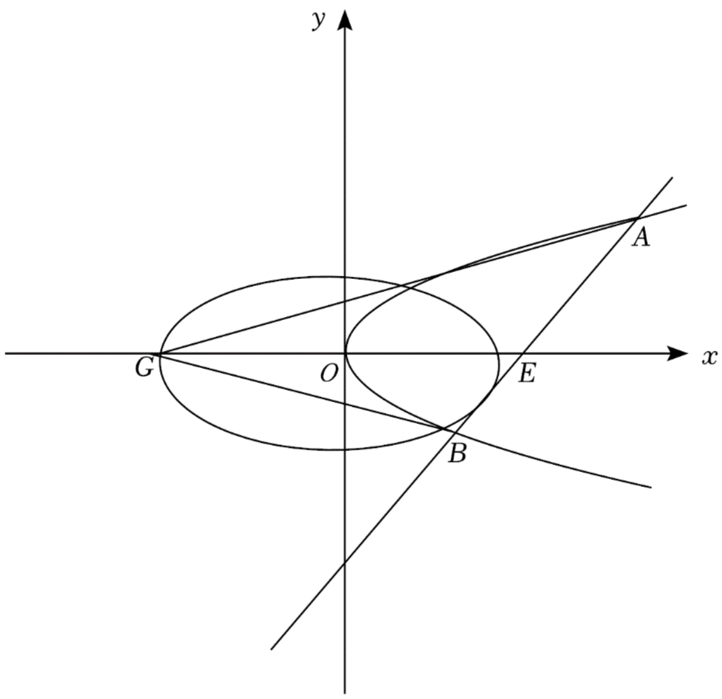
例 1． 已知平面直角坐标系中，点 $(4,0)$ 到抛物线 $C_1:y^2=2px(p>0)$ 准线的距离等于 5，椭圆 $C_2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$．

（1）求 C_1，C_2 的方程；

（2）如图，过点 $E(m，0)(m>2)$ 作椭圆 C_2 的切线交 C_1 于 A，B 两点，在 x 轴上取点 G，使得 $\angle AGE=\angle BGE$，试解决以下问题：

①证明：点 G 与点 E 关于原点中心对称；

②若已知 ΔABG 的面积是椭圆 C_2 四个顶点所围成菱形面积的 16 倍，求切线 AB 的方程．



例 2．某同学在探究直线与椭圆的位置关系时发现椭圆的一个重要性质：椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$在任意一点$M(x_0，y_0)$处的切线方程为$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$．现给定椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，过$C$的右焦点$F$的直线$l$交椭圆$C$于$P$，$Q$两点，过$P$，$Q$分别作$C$的两条切线，两切线相交于点$G$．

（1）求点G的轨迹方程；

（2）若过点F且与直线l垂直的直线（斜率存在且不为零）交椭圆C于M，N两点，证明：$\dfrac{1}{|PQ|}+\dfrac{1}{|MN|}$为定值．

例 3．已知圆$O:x^2+y^2=r^2(r>0)$．

（1）求证：过圆O上点$M(x_0，y_0)$的切线方程为$x_0x+y_0y=r^2$．类比前面的结论，写出过椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点$N(x_0，y_0)$的切线方程（不用证明）．

（2）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$Q$为直线$x=4$上任一点，过点$Q$作椭圆$C$的切线，切点分别为$A$、$B$，求证：直线$AB$恒过定点．

变式 1．已知点$A(-1,0)$，$B(1,0)$，动点P满足$|PA|+|PB|=4$，P点的轨迹为曲线C．

（Ⅰ）求曲线C的方程；

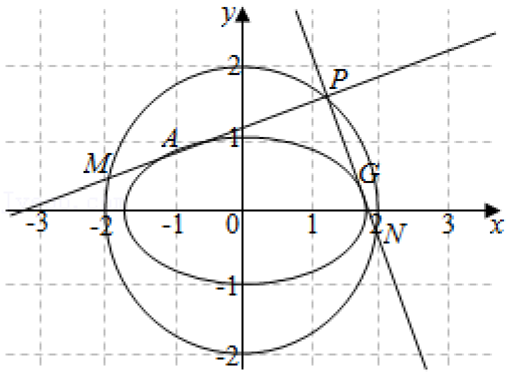
（Ⅱ）已知圆$x^2+y^2=R^2$上任意一点$P(x_0，y_0)$处的切线方程为：$x_0x+y_0y=R^2$，类比可知椭圆：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上任意一点$P(x_0，y_0)$处的切线方程为：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$．记$l_1$为曲线$C$在任意一点$P$处的切线，过点$B$作$BP$的垂线$l_2$，设$l_1$与$l_2$交于$Q$，试问动点$Q$是否在定直线上？若在定直线上，求出此直线的方程；若不在定直线上，请说明理由．

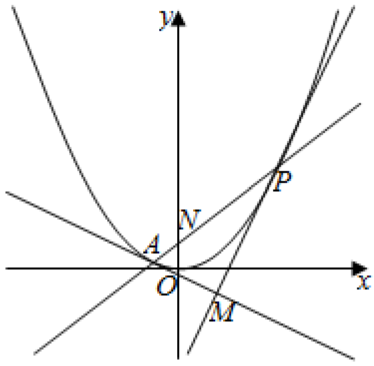
变式 2．下面是某同学在学段总结中对圆锥曲线切线问题的总结和探索，现邀请你一起合作学习，请你思考后，将答案补充完整．

（1）圆$O:x^2+y^2=r^2$上点$M(x_0，y_0)$处的切线方程为 ____．理由如下：____．

（2）椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点$(x_0，y_0)$处的切线方程为______；

（3）$P(m,n)$是椭圆$L:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$外一点，过点P作椭圆的两条切线，切点分别为A，B，如图，则直线AB的方程是 ____．这是因为在$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点处，椭圆L的切线方程为$\dfrac{x_1x}{3}+y_1y=1$和$\dfrac{x_2x}{3}+y_2y=1$．两切线都过P点，所以得到了$\dfrac{x_1m}{3}+y_1n=1$和$\dfrac{x_2m}{3}+y_2n=1$，由这两个“同构方程”得到了直线AB的方程；





（4）问题（3）中两切线 PA，PB 斜率都存在时，设它们方程的统一表达式为 $y-n=k(x-m)$，由 $\begin{cases} y-n=k(x-m) \\ x^2+3y^2=3 \end{cases}$，得 $(1+3k^2)x^2+6k(n-km)x+3(n-km)^2-3=0$，

化简得$\triangle=0$得 $(3-m^2)x^2+2mnk+1-n^2=0$．

若 $PA\perp PB$，则由这个方程可知 P 点一定在一个圆上，这个圆的方程为 ____．

（5）抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 $(x_0，\ y_0)$ 处的切线方程为 $y_0y=p(x_0+x)$；

（6）抛物线 $C:x^2=4y$，过焦点 F 的直线 l 与抛物线相交于 A，B 两点，分别过点 A，B 作抛物线的两条切线 l_1 和 l_2，设 $A(x_1，\ y_1)$，$B(x_2，\ y_2)$，则直线 l_1 的方程为 $x_1x=2(y_1+y)$．直线 l_2 的方程为 $x_2x=2(y_2+y)$，设 l_1 和 l_2 相交于点 M．则①点 M 在以线段 AB 为直径的圆上；②点 M 在抛物线 C 的准线上．

题型二：切点弦过定点问题

例 4． 定义：若点 $P(x_0，\ y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，则以 P 为切点的切线方程为：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，点 M 为直线 $x-2y-6=0$ 上一个动点，过点 M 作椭圆 C 的两条切线 MA，MB，切点分别为 A，B，则直线 AB 恒过定点(　　)

A．$(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3})$　　B．$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3})$　　C．$(\dfrac{1}{2},-\dfrac{2}{3})$　　D．$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3})$

例 5． 已知经过圆 $C_1:x^2+y^2=r^2$ 上点 $(x_0，\ y_0)$ 的切线方程是 $x_0x+y_0y=r^2$．

（1）类比上述性质，直接写出经过椭圆 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点 $(x_0,\ y_0)$ 的切线方程；

（2）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{6}+y^2=1$，P 为直线 $x=3$ 上的动点，过 P 作椭圆 E 的两条切线，切点分别为 A、B，

①求证：直线 AB 过定点．

②当点 P 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ 时，求三角形 PAB 的外接圆方程．

例 6． 已知抛物线 $C:x^2=2py$ 的焦点为 F，抛物线上一点 $A(m,\ 2)(m>0)$ 到 F 的距离为 3．

（1）求抛物线 C 的方程和点 A 的坐标；

（2）设直线 l 与抛物线 C 交于 D，E 两点，抛物线 C 在点 D，E 处的切线分别为 l_1，l_2，若直线 l_1 与 l_2 的交点恰好在直线 $y=-2$ 上，证明：直线 l 恒过定点．

题型三：利用切点弦结论解决定值问题

例 7． 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$，且点 $P(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 C 上，O 为坐标原点

（1）求椭圆 C 的标准方程

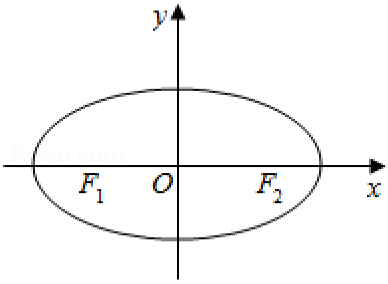
（2）过椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2-\frac{5}{3}}=1$ 上异于其顶点的任一点 Q，作圆 $O:x^2+y^2=\dfrac{4}{3}$ 的切线，切点分别为 M，$N(M$，N 不在坐标轴上)，若直线 MN 的横纵截距分别为 m，n，求证：$\dfrac{1}{3m^2}+\dfrac{1}{n^2}$ 为定值

例 8． 已知 F_1、F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，且右焦点 F_2 的坐标为 $(1,0)$，点 $P(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆 C 上，O 为坐标原点．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）若过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 A， B 两点，且 $|AB|=\frac{4}{3}\sqrt{2}$，求直线 l 的方程；

（3）过椭圆 C 上异于其顶点的任一点 Q，作圆 $O:x^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 M， $N(M$， N 不在坐标轴上)，若直线 MN 在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 m 、 n，那么 $\frac{1}{m^2}+\frac{2}{n^2}$ 是否为定值？若是，求出此定值；若不是，请说明理由．

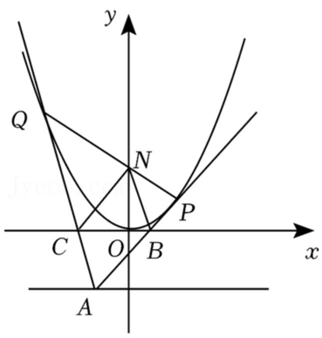


题型四：利用切点弦结论解决最值问题

例 9． 已知抛物线 $x^2=2py$ 上一点 $M(x_0，1)$ 到其焦点 F 的距离为 2．

（1）求抛物线的方程；

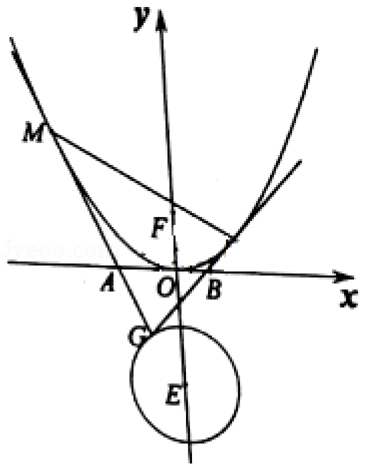
（2）如图，过直线 $l:y=-2$ 上一点 A 作抛物线的两条切线 AP， AQ，切点分别为 P， Q，且直线 PQ 与 y 轴交于点 N．设直线 AP， AQ 与 x 轴的交点分别为 B， C，求四边形 $ABNC$ 面积的最小值．



例 10． 已知 $T(m,1)$ 为抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上一点， F 是抛物线 C 的焦点，且 $|TF|=2$．

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）过圆 $E:x^2+(y+2)^2=1$ 上任意一点 G，作抛物线 C 的两条切线 l_1， l_2，与抛物线相切于点 M， N，与 x 轴分别交于点 A， B，求四边形 $ABNM$ 面积的最大值．



题型五：利用切点弦结论解决范围问题

例 11． 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为 6，$C$上一点$M$关于原点$O$的对称点为$N$，$F$为$C$的右焦点，若$MF\perp NF$，设$\angle MNF=\alpha$，且$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3}{4}$．

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）经过圆$O:x^2+y^2=10$上一动点P作椭圆C的两条切线，切点分别记为A，B，求ΔAOB面积的取值范围．

例 12． 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点$F_1(-\sqrt{3}，0)$，点$Q(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$在椭圆$C$上．

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）经过圆$O:x^2+y^2=5$上一动点P作椭圆C的两条切线，切点分别记为A，B，直线PA，PB分别与圆O相交于异于点P的M，N两点．

（ⅰ）求证：$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$；

（ⅱ）求ΔOAB的面积的取值范围．

例13. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点分别为 F_1， F_2，椭圆与 y 轴正半轴交于点 $Q(0,\sqrt{2})$， $S_{\triangle QF_1F_2}=2$．

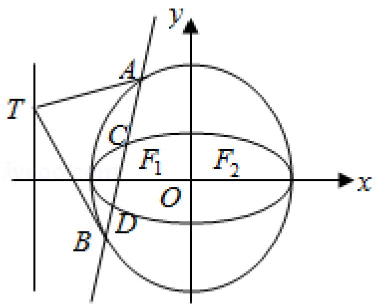
（1）求曲线 C 的方程；

（2）过椭圆 C 上一动点 P（不在 x 轴上）作圆 $O:x^2+y^2=1$ 的两条切线 PC、 PD，切点分别为 C、 D，直线 CD 与椭圆 C 交于 E、 G 两点， O 为坐标原点，求 ΔOEG 的面积 S 的取值范围．

变式3． 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点 F_1， F_2，动点 P 在椭圆上，且使得 $\angle F_1PF_2=90^0$ 的点 P 恰有两个，动点 P 到焦点 F_1 的距离的最大值为 $2+\sqrt{2}$．

（1）求椭圆 C_1 的方程；

（2）如图，以椭圆 C_1 的长轴为直径作圆 C_2，过直线 $x=-2\sqrt{2}$ 上的动点 T 作圆 C_2 的两条切线，设切点分别为 A， B，若直线 AB 与椭圆 C_1 交于不同的两点 C， D，求 $|\dfrac{AB}{CD}|$ 的取值范围．

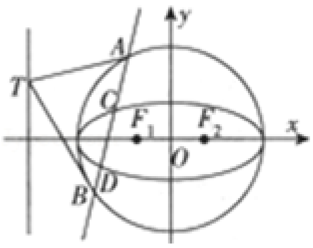


变式4． 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点 F_1， F_2，动点 P 在椭圆上，且使得 $\angle F_1PF_2=90^\circ$ 的点 P 恰有两个，动点 P 到焦点 F_1 的距离的最大值为 $2+\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C_1 的方程；

（Ⅱ）如图，以椭圆 C_1 的长轴为直径作圆 C_2，过直线 $x=-2\sqrt{2}$ 上的动点 T 作圆 C_2

的两条切线，设切点分别为 A ， B ，若直线 AB 与椭圆 C_1 交于不同的两点 C ， D ，求弦 $|CD|$ 长的取值范围.



变式 5．已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，且直线 $l_1:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 被椭圆 C_1 截得的弦长为 $\sqrt{7}$.

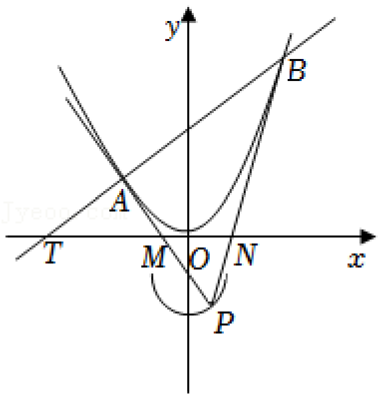
(I) 求椭圆 C_1 的方程；

(II) 以椭圆 C_1 的长轴为直径作圆 C_2 ，过直线 $l_2:y=4$ 上的动点 M 作圆 C_2 的两条切线，设切点为 A ， B ，若直线 AB 与椭圆 C_1 交于不同的两点 C ， D ，求 $|CD|\cdot|AB|$ 的取值范围.

变式 6．如图，已知点 P 在半圆 $Q:x^2+(y+2)^2=4(y\leqslant -2)$ 上一点，过点 P 作抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的两条切线，切点分别为 A ， B ，直线 AP ， BP ， AB 分别与 x 轴交于点 M ， N ， T ，记 ΔTNB 的面积为 S_1 ，ΔTMA 的面积为 S_2 .

（Ⅰ）若抛物线 C 的焦点坐标为 $(0,2)$ ，求 p 的值和抛物线 C 的准线方程；

（Ⅱ）若存在点 P ，使得 $\dfrac{S_1}{S_2}=8$ ，求 p 的取值范围.

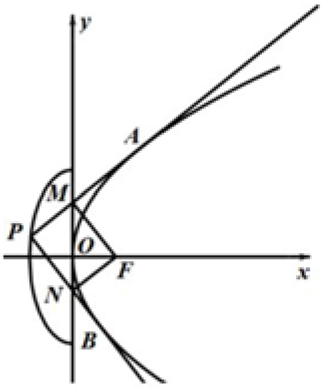


y
B
A
T
M
O
N
x
P

变式 7．如图，设抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，点P是半椭圆$x^2+\frac{y^2}{4}=1(x<0)$上的一点，过点P作抛物线C的两条切线，切点分别为A、B，且直线PA、PB分别交y轴于点M、N．

（Ⅰ）证明：$FM\perp PA$；

（Ⅱ）求$|FM|\cdot|FN|$的取值范围．



专题36 切线与切点弦问题

【方法技巧与总结】

1、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在圆$x^2+y^2=r^2$上，过点M作圆的切线方程为$x_0x+y_0y=r^2$．

2、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在圆$x^2+y^2=r^2$外，过点M作圆的两条切线，切点分别为A，B，则切点弦AB的直线方程为$x_0x+y_0y=r^2$．

3、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在圆$x^2+y^2=r^2$内，过点M作圆的弦AB（不过圆心），分别过A，B作圆的切线，则两条切线的交点P的轨迹方程为直线$x_0x+y_0y=r^2$．

4、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上，过点M作圆的切线方程为$\left(x_0-a\right)(x-a)+\left(y_0-b\right)(y-b)=r^2$．

5、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$外，过点M作圆的两条切线，切点分别为A，B，则切点弦AB的直线方程为$\left(x_0-a\right)(x-a)+\left(y_0-b\right)(y-b)=r^2$．

6、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$内，过点M作圆的弦AB（不过圆心），分别过A，B作圆的切线，则两条切线的交点P的轨迹方程为$\left(x_0-a\right)(x-a)+\left(y_0-b\right)(y-b)=r^2$．

7、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，过点$M$作椭圆的切线方程为$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$．

8、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$外，过点$M$作椭圆的两条切线，切点分别为$A$，$B$，则切点弦$AB$的直线方程为$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$．

9、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$内，过点$M$作椭圆的弦$AB$（不过椭圆中心），分别过$A$，$B$作椭圆的切线，则两条切线的交点$P$的轨迹方程为直线$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$．

10、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0\ ，b>0)$上，过点$M$作双曲线的切线方程为$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$．

11、点$M\left(x_0\ ，y_0\right)$在双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0\ ，b>0)$外，过点$M$

作双曲线的两条切线，切点分别为 A ，B ，则切点弦 AB 的直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

12、点 $M\left(x_0\text{，}y_0\right)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0\text{，}b>0)$ 内，过点 M 作双曲线的弦 AB （不过双曲线中心），分别过 A ，B 作双曲线的切线，则两条切线的交点 P 的轨迹方程为直线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

13、点 $M\left(x_0\text{，}y_0\right)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，过点 M 作抛物线的切线方程为 $y_0y=p\left(x+x_0\right)$.

14、点 $M\left(x_0\text{，}y_0\right)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 外，过点 M 作抛物线的两条切线，切点分别为 A ，B ，则切点弦 AB 的直线方程为 $y_0y=p\left(x+x_0\right)$.

15、点 $M\left(x_0\text{，}y_0\right)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 内，过点 M 作抛物线的弦 AB ，分别过 A ，B 作抛物线的切线，则两条切线的交点 P 的轨迹方程为直线 $y_0y=p\left(x+x_0\right)$.

【题型归纳目录】

【典例例题】

题型一：切线问题

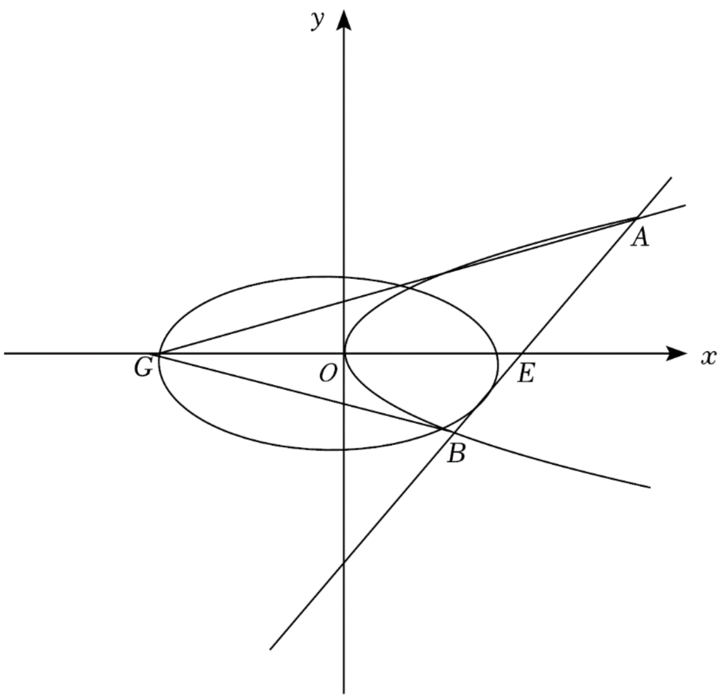
例 1．已知平面直角坐标系中，点 $(4,0)$ 到抛物线 $C_1:y^2=2px(p>0)$ 准线的距离等于 5，椭圆 $C_2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

（1）求 C_1，C_2 的方程；

（2）如图，过点 $E(m\text{，}0)(m>2)$ 作椭圆 C_2 的切线交 C_1 于 A，B 两点，在 x 轴上取点 G，使得 $\angle AGE=\angle BGE$，试解决以下问题：

①证明：点 G 与点 E 关于原点中心对称；

②若已知 ΔABG 的面积是椭圆 C_2 四个顶点所围成菱形面积的 16 倍，求切线 AB 的方程.



【解析】（1）解：因为点$(4,0)$到抛物线C_1的准线$x=-\dfrac{p}{2}$的距离等于 5，

所以$4+\dfrac{p}{2}=5$，解得$p=2$，所以抛物线C_1的方程为$y^2=4x$；

因为椭圆C_2的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且过点$(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

所以$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$，解得$a=2$，$b=1$，

所以椭圆C_2的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）①证明：因为$m>2$，且直线AB与椭圆C_2相切，

所以直线AB的斜率存在，设直线AB的方程为$y=k(x-m)$，

联立$\begin{cases}y=k(x-m)\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得$(4k^2+1)x^2-8k^2mx+4k^2m^2-4=0$，

因为直线AB与椭圆C_2相切，

所以$\triangle=64k^4m^2-4(4k^2+1)(4k^2m^2-4)=0$，即$k^2=\dfrac{1}{m^2-4}$，

联立$\begin{cases} y=k(x-m) \\ y^2=4x \end{cases}$，得$ky^2-4y-4km=0$，

设$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$y_1+y_2=\dfrac{4}{k}, y_1y_2=-4m$；

设$G(t,0)$，因为$\angle AGE=\angle BGE$，所以$k_{AG}+k_{BG}=0$，

则$\dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=0$，即$x_2y_1+x_1y_2-t(y_1+y_2)=0$，

即$\dfrac{y_1y_2(y_1+y_2)}{4}-t(y_1+y_2)=0$，

又$y_1+y_2\neq 0$，所以$t=\dfrac{y_1y_2}{4}=-m$，即$G(-m,0)$，

即点G与点E关于原点中心对称；

②解：椭圆C_2四个顶点所围成菱形面积为$S=\dfrac{1}{2}\times 2a\times 2b=2ab=4$，

所以ΔABG的面积为$16\times 4=64$，

则$S_{\Delta ABG}=\dfrac{1}{2}|GE||y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\times 2m\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=m\sqrt{(\dfrac{4}{k})^2+16m}=m\sqrt{16(m^2-4)+16m}$，

令$m\sqrt{16(m^2-4)+16m}=64$，即$m^2(m^2-4+m)=256$，

即$m^4-4m^2+m^3-256=0$，即$(m^4-256)+m^2(m-4)=0$，

即$(m-4)[(m^2+16)(m+4)+m^2]=0$，

即$(m-4)(m^3+5m^2+16m+64)=0$，

因为$m>2$，所以$m=4$，$k^2=\dfrac{1}{m^2-4}=\dfrac{1}{12}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}$；

所以直线AB的方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-4)$．

例 2． 某同学在探究直线与椭圆的位置关系时发现椭圆的一个重要性质：椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$在任意一点$M(x_0,\ y_0)$处的切线方程为$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$．现给定椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，过$C$的右焦点$F$的直线$l$交椭圆$C$于$P$，$Q$两点，过$P$，$Q$分别作$C$的两条切线，两切线相交于点$G$．

（1）求点G的轨迹方程；

（2）若过点F且与直线l垂直的直线（斜率存在且不为零）交椭圆C于M，N两点，证明:

$\dfrac{1}{|PQ|}+\dfrac{1}{|MN|}$为定值．

【解析】（1）解：设直线 PQ 为 $x=ty+1$， $P(x_1，y_1)$， $Q(x_2，y_2)$，

易得在 P 点处切线为 $\dfrac{x_1x}{4}+\dfrac{y_1y}{3}=1$，在 Q 点处切线为 $\dfrac{x_2x}{4}+\dfrac{y_2y}{3}=1$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x_1x}{4}+\dfrac{y_1y}{3}=1,\\ \dfrac{x_2x}{4}+\dfrac{y_2y}{3}=1,\end{cases}$ 得 $x=\dfrac{4(y_2-y_1)}{x_1y_2-x_2y_1}$，又 $x_1=ty_1+1$， $x_2=ty_2+1$，可得 $x=4$，

故点 G 的轨迹方程 $x=4$．

（2）证明：联立 l 的方程与 C 的方程 $\begin{cases}x=ty+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 x，得 $(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$．

由韦达定理，得 $y_1+y_2=-\dfrac{6t}{3t^2+4}$， $y_1y_2=-\dfrac{9}{3t^2+4}$，

所以 $|PQ|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)_2-4y_1y_2}=\dfrac{12(1+t^2)}{3t^2+4}$，

因为 $PQ\perp MN$，将 t 用 $-\dfrac{1}{t}$ 代，得 $|MN|=\dfrac{12(1+\dfrac{1}{t})}{3\cdot\dfrac{1}{t^2}+4}=\dfrac{12(1+t^2)}{3+4t^2}$，

所以 $\dfrac{1}{|PQ|}+\dfrac{1}{|MN|}=\dfrac{3t^2+4}{12(1+t^2)}+\dfrac{3+4t^2}{12(1+t^2)}=\dfrac{7}{12}$．

例 3． 已知圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$．

（1）求证：过圆 O 上点 $M(x_0，y_0)$ 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$．类比前面的结论，写出过椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点 $N(x_0，y_0)$ 的切线方程（不用证明）．

（2）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$， Q 为直线 $x=4$ 上任一点，过点 Q 作椭圆 C 的切线，切点分别为 A、B，求证：直线 AB 恒过定点．

【解析】（1）证明：因为圆 $O:x^2+y^2=r^2$，

故圆心 $O(0,0)$，半径为 r，

又 $M(x_0，y_0)$，

所以 $k_{OM}=\dfrac{y_0}{x_0}$，

因为 $M(x_0，y_0)$ 在圆上，

所以过 M 的圆的切线斜率 $k=-\dfrac{x_0}{y_0}$，

所以过 M 的圆的切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，①

又因为 $x_0^2+y_0^2=r^2$，②

由①②整理得，为 $x_0x+y_0y=r^2$．

所以过圆 O 上点 $M(x_0,\ y_0)$ 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$．

过椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点 $N(x_0,\ y_0)$ 的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

（2）设 $Q(4,t)$，$(t\in R)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

由（1），则直线 QA 的方程 $\dfrac{x_1x}{4}+\dfrac{y_1y}{3}=1$，

因为 Q 在 QA 上，所以 $x_1+\dfrac{ty_1}{3}=1$，①

同理可得 $x_2+\dfrac{ty_2}{3}=1$，②

由①②可得直线 AB 的方程为 $x+\dfrac{t}{3}y=1$，

令 $y=0$，得 $x=1$，

所以直线 AB 恒过点 $(1,0)$．

变式 1． 已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，动点 P 满足 $|PA|+|PB|=4$，P 点的轨迹为曲线 C．

（Ⅰ）求曲线 C 的方程；

（Ⅱ）已知圆 $x^2+y^2=R^2$ 上任意一点 $P(x_0,\ y_0)$ 处的切线方程为：$x_0x+y_0y=R^2$，类比可知椭圆：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点 $P(x_0,\ y_0)$ 处的切线方程为：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$．记 l_1 为曲线 C 在任意一点 P 处的切线，过点 B 作 BP 的垂线 l_2，设 l_1 与 l_2 交于 Q，试问动点 Q 是否在定直线上？若在定直线上，求出此直线的方程；若不在定直线上，请说明理由．

【解析】解：（Ⅰ）由椭圆的定义知 P 点的轨迹为以 A，B 为焦点，长轴长为 4 的椭圆，

设椭圆方程为:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则 $\begin{cases}2a=4\\c=1\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\end{cases}$，

曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

（Ⅱ）设 $P(x_0,\ y_0)$，由题知直线 l_1 的方程为:$\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}=1$，