

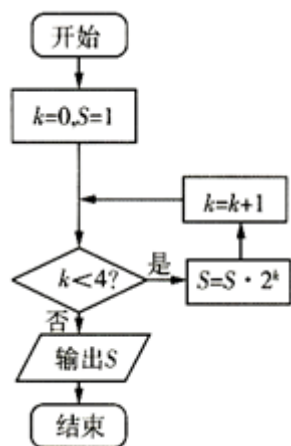
2023-2024 学年广西钦州市钦南区钦州港中学高三 5 月教学质量调研数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 执行如图所示的程序框图，则输出的 S 的值是 ()



- A. 8 B. 32 C. 64 D. 128

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} + 2, & x \leq 0, \\ |\log_2 x|, & x > 0, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - 2af(x) + 3a = 0$ 有六个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $\left(3, \frac{16}{5}\right)$ B. $\left[3, \frac{16}{5}\right]$ C. $(3, 4)$ D. $(3, 4]$

3. 设 $a = \log_8 0.2, b = \log_{0.3} 4, c = 4^{0.3}$ ，则 ()

- A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $a < c < b$ D. $b < a < c$

4. 关于函数 $f(x) = \sin |x| + |\cos x|$ 有下述四个结论：()

- ① $f(x)$ 是偶函数； ② $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上是单调递增函数；
③ $f(x)$ 在 R 上的最大值为 2； ④ $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①②④ B. ①③ C. ①④ D. ②④

5. 已知变量 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 $2x-y$ 的最小值为 ()

- A. -4 B. -2 C. 0 D. 4

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2$, 且 a_1, a_3, a_4 成等比数列. 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 S_n 的最小值为 ()

- A. -10 B. -14 C. -18 D. -20

7. 已知点 $A(-3,0), B(0,3)$, 若点 P 在曲线 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 上运动, 则 $\triangle PAB$ 面积的最小值为 ()

- A. 6 B. 3 C. $\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ D. $\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

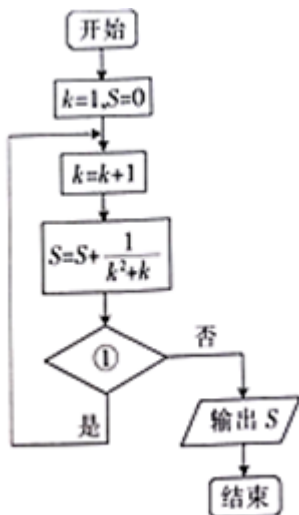
8. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 60° , $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 0 C. 0 或 $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

9. 若集合 $A = \{x | |x| \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y | y = -x^2, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x | x \leq 2\}$ C. $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ D. $\emptyset$

10. 执行如图所示的程序框图, 若输出的 $S = \frac{3}{10}$, 则①处应填写 ()



- A. $k < 3?$ B. $k \leq 3?$ C. $k \leq 5?$ D. $k < 5?$

11. 设复数 z 满足 $(1+i)z = 1-7i$, 则 z 在复平面内的对应点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

12. 抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的准线与双曲线 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的两条渐近线所围成的三角形面积为 $2\sqrt{2}$, 则 p 的值为 ()

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 设 S_n 是公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_7 = -2a_1$ ，则 $\frac{S_9}{a_4} =$ _____.

14. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点，直线 l 过 F_1 交椭圆 C 于 A, B 两点，交 y 轴于 E 点，若满足 $\overrightarrow{F_1E} = 2\overrightarrow{AF_1}$ ，且 $\angle EF_1F_2 = 60^\circ$ ，则椭圆 C 的离心率为_____.

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$ ， A, B 为双曲线上关于原点对称的两点， AF 的中点为 H ， BF 的中点为 K ， HK 的中点为 G ，若 $|HK| = 2|OG|$ ，且直线 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，则 $|AB| =$ _____，双曲线的离心率为_____.

16. 双曲线 $y^2 - x^2 = 1$ 的焦点坐标是_____，渐近线方程是_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $2S_n = n - n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$) .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \begin{cases} 2^{a_n}, & (n = 2k-1) \\ \frac{2}{(1-a_n)(1-a_{n+2})}, & (n = 2k) \end{cases}$ ($k \in \mathbb{N}^*$)，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n . 若 $T_{2n} = a\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2n+2} + b$ 对

$n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立，求实数 a, b 的值.

18. (12分) 设函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax$ ， $a \in \mathbb{R}$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) $a \leq 1$ 时，若 $x_1 \neq x_2$ ， $f(x_1) + f(x_2) = 2$ ，求证： $x_1 + x_2 < 0$.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = |2x+1|$.

(1) 解不等式： $f(x) + f(x-2) \leq 6$ ；

(2) 求证： $f(x+a^2) - f(x-1) \leq |x+2a^2+3| + |x+2a-a^2|$.

20. (12分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $2b \cos B = a \cos C + c \cos A$.

(1) 求 $\angle B$ 的大小；

(2) 若 $b = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{a}{2}x^2$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 设 $m = f(x_2) + \frac{x_1+2}{8} \cdot f'(x_1+1)$, 求 m 的取值范围, 并求 m 取到最小值时所对应的 a 的值.

22. (10 分) 设函数 $f(x) = 6\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x$.

(1) 求 $f(\frac{\pi}{12})$ 的值;

(2) 若 $x \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$, 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

根据给定的程序框图, 逐次计算, 结合判断条件, 即可求解.

【详解】

由题意, 执行上述程序框图, 可得

第 1 次循环, 满足判断条件, $S = 1, k = 1$;

第 2 次循环, 满足判断条件, $S = 2, k = 2$;

第 3 次循环, 满足判断条件, $S = 8, k = 3$;

第 4 次循环, 满足判断条件, $S = 64, k = 4$;

不满足判断条件, 输出 $S = 64$.

故选: C.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的计算与输出, 其中解答中认真审题, 逐次计算, 结合判断条件求解是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力, 属于基础题.

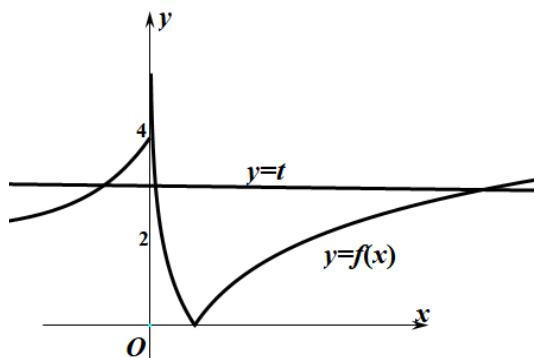
2、B

【解析】

令 $f(x)=t$ ，则 $t^2-2at+3a=0$ ，由图象分析可知 $t^2-2at+3a=0$ 在 $(2,4]$ 上有两个不同的根，再利用一元二次方程根的分布即可解决.

【详解】

令 $f(x)=t$ ，则 $t^2-2at+3a=0$ ，如图



$y=t$ 与 $y=f(x)$ 顶多只有 3 个不同交点，要使关于 x 的方程 $[f(x)]^2-2af(x)+3a=0$ 有

六个不相等的实数根，则 $t^2-2at+3a=0$ 有两个不同的根 $t_1, t_2 \in (2,4]$ ，

设 $g(t)=t^2-2at+3a$ 由根的分布可知，

$$\begin{cases} \Delta = 4a^2 - 12a > 0 \\ a \in (2, 4) \\ g(2) > 0 \\ g(4) \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } 3 < a \leq \frac{16}{5}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查复合方程根的个数问题，涉及到一元二次方程根的分布，考查学生转化与化归和数形结合的思想，是一道中档题.

3、D

【解析】

结合指数函数及对数函数的单调性,可判断出 $-1 < a < 0, b < -1, c > 1$,即可选出答案.

【详解】

由 $\log_{0.3} 4 < \log_{0.3} \frac{10}{3} = -1$, 即 $b < -1$,

又 $-1 = \log_8 0.125 < \log_8 0.2 < \log_8 1 = 0$, 即 $-1 < a < 0$,

$4^{0.3} > 1$, 即 $c > 1$,

所以 $b < a < c$.

故选:D.

【点睛】

本题考查了几个数的大小比较,考查了指数函数与对数函数的单调性的应用,属于基础题.

4、C

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的奇偶性、单调性、最值和零点对四个结论逐一分析,由此得出正确结论的编号.

【详解】

$f(x)$ 的定义域为 R .

由于 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 故①正确.

由于 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) < f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上不是单调递增函数, 所以②错误.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \sin x + |\cos x| = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$,

且存在 $x = \frac{\pi}{4}$, 使 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \left|\cos \frac{\pi}{4}\right| = \sqrt{2}$.

所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq \sqrt{2}$;

由于 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $x \in \mathbf{R}$ 时 $f(x) \leq \sqrt{2}$,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 所以③错误.

依题意, $f(0) = \sin|0| + |\cos 0| = 1$, 当 $0 < x \leq 2\pi$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ \sin x - \cos x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases},$$

所以令 $\sin x + \cos x = 0$, 解得 $x = \frac{7\pi}{4}$, 令 $\sin x - \cos x = 0$, 解得 $x = \frac{5\pi}{4}$. 所以在区间 $(0, 2\pi]$, $f(x)$ 有两个零点.

由于 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 0)$ 有两个零点. 故 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点. 所以④正确.

综上所述，正确的结论序号为①④.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查三角函数的奇偶性、单调性、最值和零点，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

5、B

【解析】

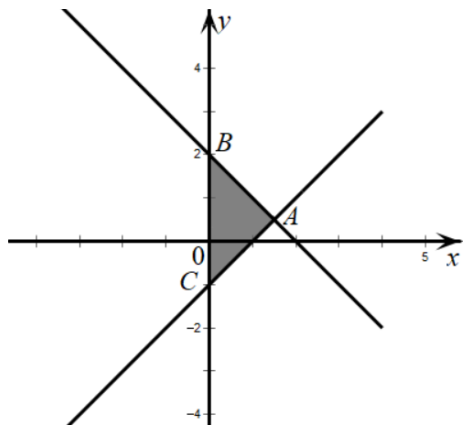
先根据约束条件画出可行域，再利用几何意义求最值.

【详解】

解：由变量 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，画出相应图形如下：

可知点 $A(1,1), B(0,2)$ ，

$2x-y$ 在 B 处有最小值，最小值为 -2 。



故选：B.

【点睛】

本题主要考查简单的线性规划，运用了数形结合的方法，属于基础题.

6、D

【解析】

利用等比中项性质可得等差数列的首项，进而求得 S_n ，再利用二次函数的性质，可得当 $n=4$ 或 5 时， S_n 取到最小值.

【详解】

根据题意，可知 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d=2$ ，

由 a_1, a_3, a_4 成等比数列，可得 $a_3^2 = a_1 a_4$ ，

$\therefore (a_1 + 4)^2 = a_1(a_1 + 6)$ ，解得 $a_1 = -8$ 。

$$\therefore S_n = -8n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 9n = \left(n - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}.$$

根据单调性，可知当 $n = 4$ 或 5 时， S_n 取到最小值，最小值为 -20 。

故选：D.

【点睛】

本题考查等差数列通项公式、等比中项性质、等差数列前 n 项和的最值，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，求解时注意当 $n = 4$ 或 5 时同时取到最值。

7、B

【解析】

求得直线 AB 的方程，画出曲线表示的下半圆，结合图象可得 P 位于 $(-1, 0)$ ，结合点到直线的距离公式和两点的距离公式，以及三角形的面积公式，可得所求最小值。

【详解】

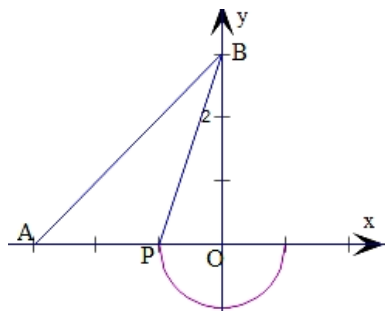
解：曲线 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 表示以原点 O 为圆心，1 为半径的下半圆(包括两个端点)，如图，

直线 AB 的方程为 $x - y + 3 = 0$ ，

可得 $|AB| = 3\sqrt{2}$ ，由圆与直线的位置关系知 P 在 $(-1, 0)$ 时， P 到直线 AB 距离最短，即为 $\frac{|-1-0+3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，

则 $\triangle PAB$ 的面积的最小值为 $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$ 。

故选：B.



【点睛】

本题考查三角形面积最值，解题关键是掌握直线与圆的位置关系，确定半圆上的点到直线距离的最小值，这由数形结合思想易得。

8、B

【解析】

由数量积的定义表示出向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为 60° ，再由 $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ ， $|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b}$ 代入表达式中即可求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 。

【详解】

由向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为 60° ，

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{a} + \vec{b}| \cos 60^\circ,$$

$$\text{所以 } |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \sqrt{(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)},$$

$$\text{又 } |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a}|^2 = 1, |\vec{b}|^2 = 3,$$

$$\text{所以 } 1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{1 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3}, \text{ 解得 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查向量数量积的运算和向量的模长平方等于向量的平方，考查学生的计算能力，属于基础题。

9、C

【解析】

试题分析：化简集合 $A = [-2, 2]$, $B = (-\infty, 0]$, $\therefore A \cap B = [-2, 0]$

故选 C.

考点：集合的运算.

10、B

【解析】

模拟程序框图运行分析即得解.

【详解】

$$k=1, S=0; k=2, S=0+\frac{1}{2^2+2}=\frac{1}{6};$$

$$k=3, S=\frac{1}{6}+\frac{1}{3^2+3}=\frac{1}{4}; k=4, S=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2+4}=\frac{3}{10}.$$

所以①处应填写“ $k \geq 3$?”

故选：B

【点睛】

本题主要考查程序框图，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

11、C

【解析】

化简得到 $z = -3 - 4i$ ，得到答案.

【详解】

$$(1+i)z = 1-7i, \text{ 故 } z = \frac{1-7i}{1+i} = \frac{(1-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-6-8i}{2} = -3-4i, \text{ 对应点在第三象限.}$$

故选：C.

【点睛】

本题考查了复数的化简和对应象限，意在考查学生的计算能力.

12、A

【解析】

求得抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，解得两交点，由三角形的面积公式，计算即可得到所求值.

【详解】

抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的准线为 $y = -\frac{p}{2}$ ，双曲线 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的两条渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，可得两交点为

$$\left(-\frac{p}{4}, -\frac{\sqrt{2}p}{8}\right), \left(-\frac{p}{4}, \frac{\sqrt{2}p}{8}\right), \text{ 即有三角形的面积为 } \frac{1}{2} \times \frac{p}{4} \times \frac{\sqrt{2}p}{4} = 2\sqrt{2}, \text{ 解得 } p = 8, \text{ 故选 } A.$$

【点睛】

本题考查三角形的面积的求法，注意运用抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，考查运算能力，属于基础题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、18

【解析】

先由 $a_7 = -2a_1$ ，可得 $a_1 = -2d$ ，再结合等差数列的前 n 项和公式求解即可.

【详解】

$$\text{解：因为 } a_7 = a_1 + 6d = -2a_1, \text{ 所以 } a_1 = -2d, \frac{S_9}{a_4} = \frac{9a_5}{a_4} = \frac{9(a_1 + 4d)}{a_1 + 3d} = \frac{9 \times 2d}{d} = 18.$$

故答案为：18.

【点睛】

本题考查了等差数列基本量的运算，重点考查了等差数列的前 n 项和公式，属基础题.

$$14、\frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/006113203040010232>