7.1复数的概念

课程目标

1.了解引进虚数单位i的必要性，了解数集的扩充过程.

2.理解复数的概念、表示法及相关概念.

3.掌握复数的分类及复数相等的充要条件.

4.复数的几何意义 .

一、复数的概念

1.复数的概念

(1)我们把形如$a+bi(a,b\in R)$的数叫做复数，其中i叫做虚数单位，且$i^2=-1$

(2)全体复数构成的集合$C=\{a+bi|a,b\in R\}$叫做复数集。

复数的代数形式

复数通常用字母z表示，即$z=a+bi(a,b\in R)$

复数$z=a+bi$都有$a,b\in R$。其中的a与b分别叫做复数的实部与虚部

即复数$z=a+bi(a,b\in R)$

a为实部

b为虚部

i为虚数单位且$i^2=-1$

2.复数的相等

在复数集 $C=\{a+bi \mid a,b\in R\}$ 中任取两个数 $a+bi, c+di(a,b,c,d\in R)$

我们规定：$a+bi$ 与 $c+di$ 相等当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$

3.复数的分类

(1)对于复数 $a+bi(a,b\in R)$，当且仅当 $b=0$ 时，$z=a$，它是实数

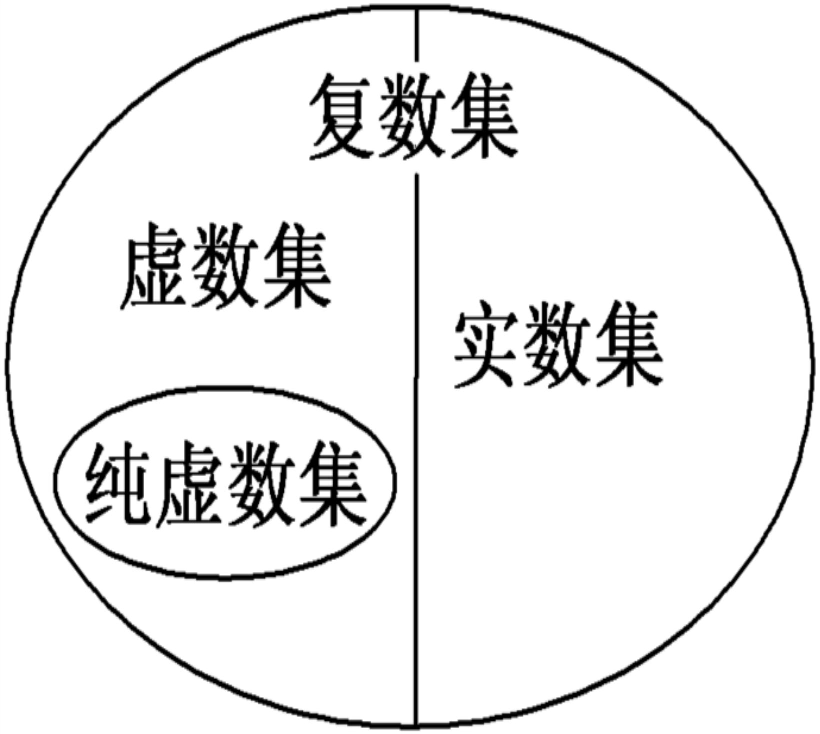
当且仅当 $a=b=0$ 时，$z=0$，它是实数 0;

(2)对于复数 $a+bi(a,b\in R)$，当 $b\neq 0$ 时，$z=a+bi$，它叫做虚数

当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，$z=bi$，它叫做纯虚数。

$$\text{复数 } Z=a+bi\begin{cases}\text{实数} & (b=0)\\ \text{虚数} & (b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数} & (a=0,\ b\neq 0)\\ \text{非纯虚数} & (a\neq 0,\ b\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

4. 复数集、实数集、虚数集、纯虚数集之间的关系



数系的扩充

计数的需要 ⇒ 自然数

(正整数和零)

整数

表示相反意义的量 ⇒ 负整数

有理数

测量、分配中的等分 ⇒ 分数

实数

度量 ⇒ 无理数

复数

负数开方 ⇒ 虚数

基础练习

1.判断下列命题是否正确.(正确的打“√”，错误的打“X”)

(1)若 a，b 为实数，则 $z=a+bi$ 为虚数. （ × ）

(2)若 a 为实数，则 $z=a$ 一定不是虚数. （ √ ）

(3)如果两个复数的实部的差和虚部的差都等于0，那么这两个复数相等. （ √ ）

基础练习

2、判断以下复数哪些是虚数？哪些是纯虚数；并说出实部和虚部。

(1) $3+2i$　　是虚数但不是纯虚数，实部是3，虚部是2.

(2) $\frac{1}{2}-\sqrt{3}i$　　是虚数但不是纯虚数，实部是$\frac{1}{2}$，虚部是$-\sqrt{3}$.

(3) $-\sqrt{3}-\frac{1}{2}i$　　是虚数但不是纯虚数，实部是$-\sqrt{3}$，虚部是$-\frac{1}{2}$.

(4) $-0.2i$　　是虚数也是纯虚数；实部是0，虚部是-0.2.

例1、当实数m取什么值时，复数$z=m+1+(m-1)i$是下列数？

(1)实数；(2)虚数；(3)纯虚数。

解：(1)当$m-1=0$，即$m=1$时，复数z是实数。

(2)当$m-1\neq 0$，即$m\neq 1$时，复数z是虚数。

(3)当$m+1=0$，且$m-1\neq 0$，即$m=-1$时，复数z是纯虚数。

例 2 实数 x 分别取什么值时，复数 $z=\dfrac{x^2-x-6}{x+3}+(x^2-2x-15)\mathrm{i}$ 是(1)实数；(2)虚数；(3)纯虚数.

$$\text{复数 } \boldsymbol{Z=a+bi}\begin{cases}\text{实数}(b=0)\\ \text{虚数}(b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0,\ b\neq 0)\\ \text{非纯虚数}(a\neq 0,\ b\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

解析 (1)当 x 满足 $\begin{cases} x^2-2x-15=0, \\ x+3\neq 0, \end{cases}$ 即 $x=5$ 时，z 是实数．

(2)当 x 满足 $\begin{cases} x^2-2x-15\neq 0, \\ x+3\neq 0, \end{cases}$ 即 $x\neq -3$ 且 $x\neq 5$ 时，z 是虚数

(3)当 x 满足 $\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x+3}=0, \\ x^2-2x-15\neq 0, \end{cases}$

即 $x=-2$ 或 $x=3$ 时，z 是纯虚数．

例 3 根据下列条件，分别求实数 x，y 的值.

(1) $x^2-y^2+2xyi=2i$；

(2) $(2x-1)+i=y-(3-y)i$.

解析 (1) $\because x^2-y^2+2xyi=2i$，且 $x, y\in \mathbb{R}$，

$\therefore \begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-1. \end{cases}$

(2) $\because (2x-1)+i=y-(3-y)i$，且 $x, y\in \mathbb{R}$，

$\therefore \begin{cases} 2x-1=y, \\ 1=-(3-y), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{5}{2}, \\ y=4. \end{cases}$

作业

1. 已知 $(2x-1)+i=y-(3-y)i$，

其中x、$y\in R$，求x与y的值。

解得$x=\frac{5}{2}, y=4$

2. 实数 m 分别取什么数值时，复数 $z=(m^2+5m+6)+(m^2-2m-15)i$

(1)实数；(2)虚数；(3)纯虚数；(4)是 0？

(1)$m=5$ 或 -3.(2) $m\neq5$ 且 $m\neq-3$.(3)$m=-2$. (4)$m=-3$.

作业

3．已知 $M=\{2, m^2-2m+(m^2+m-2)\mathrm{i}\}$，$N=\{-1,2,4\mathrm{i}\}$，若 $M\cup N=N$，求实数 m 的值.

解析 因为 $M\cup N=N$，所以 $M\subseteq N$，

所以 $m^2-2m+(m^2+m-2)\mathrm{i}=-1$ 或 $m^2-2m+(m^2+m-2)\mathrm{i}=4\mathrm{i}$.

由复数相等的充要条件得

$$\begin{cases} m^2-2m=-1, \\ m^2+m-2=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} m^2-2m=0, \\ m^2+m-2=4, \end{cases}$$

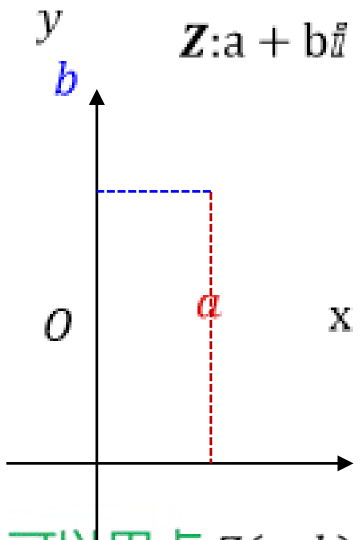
解得 $m=1$ 或 $m=2$.

所以实数 m 的值是 1 或 2.

二、复数的几何意义

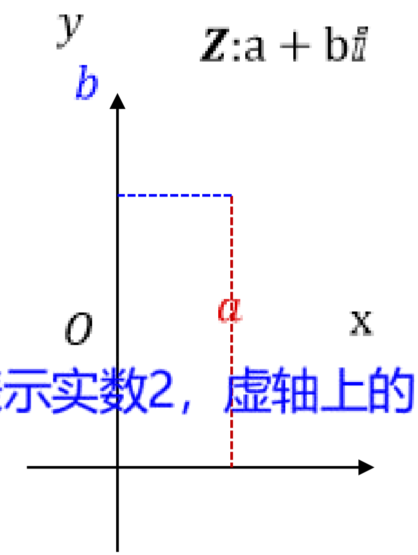
1、复平面

因为任何一个复数 $\boldsymbol{z}=a+b\boldsymbol{i}$ 都可以用一个有序实数对 (a,b) 唯一确定，并且任意给一个复数也可以唯一确定一个有序数对，所以复数 $\boldsymbol{z}=a+b\boldsymbol{i}$ 与有序数对 (a,b) 是一一对应的，而有序数对 (a,b) 与平面直角坐标系中的点是一一对应的，所以复数与平面直角坐标系中的点集之间可以建立一一对应的关系。



如图，点Z的横坐标是 a，纵坐标是 b，复数 $\boldsymbol{z}=a+b\boldsymbol{i}$ 可以用点 $Z(a,b)$ 表示.这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面，x 轴叫做实轴，y 轴叫做虚轴.显然，实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数.

1、复平面



实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数，象限内的点都表示非纯虚数.反之，表示实数的点都在实轴上，表示纯虚数的点都在虚轴上，表示非纯虚数的点都在象限内.

附注：复平面内原点(0,0)表示实数0，实轴上的点(2,0)表示实数2，虚轴上的点(0,-1)表示纯虚数 $-i$， 点(-2,3)表示复数 $-2+3i$ 等.

复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 在复平面内对应点的坐标为 (a,b)，而不是 (a,bi)，也就是说，复平面内虚轴上的单位长度是1，而不是 i .

注意：

2、复数的几何意义

（1）复数的几何意义——与点对应

由上可知，每个复数，有复平面内唯一的一个点和它对应；反过来，复平面内的每一个点，有唯一的一个复数与它对应.复数集 C 中的数与复平面内的点建立了一 一对应的关系，即

复数 $z=a+bi$ $\xleftrightarrow{\text{一 一对应}}$ 复平面内的点 $Z(a,b)$

这是复数的一种几何意义.

(2) 复数 $z=a+bi\ (a,b\in R)$ 中的 z，书写时应小写；复平面内点 $Z(a,b)$ 中的 Z，书写时要大写.

(1) 复数的实质是有序数对；

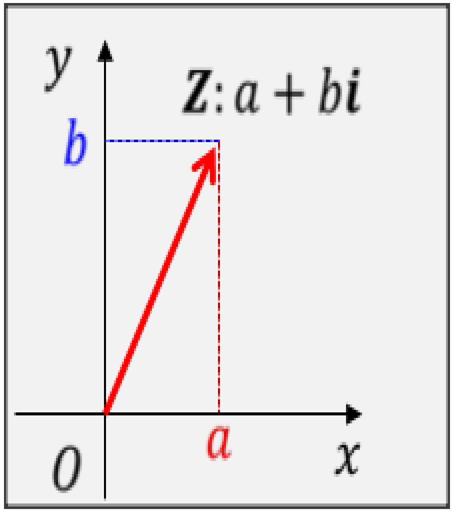
2、复数的几何意义

（2）复数的几何意义——与向量对应

在平面直角坐标系中，每一个平面向量都可以用一个有序实数对来表示，而有序数对和复数又是一 一对应的. 这样我们就可以用平面向量来表示复数.

复平面上的点 $Z(a, b)$ 唯一对应向量 $\overrightarrow{OZ}=(a, b)$;

复平面上的点 $Z(a, b)$ 唯一 对应复数 $z=a+bi$.



因此复数可以用复平面上的起点为原点的向量表示.

复数 C 与复平面内的向量所成的集合一一对应.

复数 $z=a+bi$ $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 平面向量 $\overrightarrow{OZ}$

为了方便起见，我们常把复数 $z=a+bi$ 说成点 Z 或说成向量 $\overrightarrow{OZ}$，并且规定，相等的向量表示同一个复数.

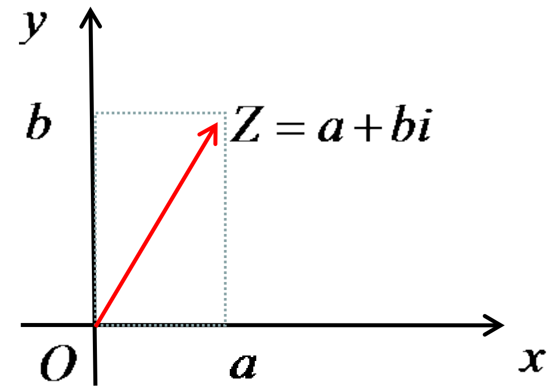
3、复数的模

为方便起见，我们常把复数$z=a+bi$说成点Z或说成$\overrightarrow{OZ}$，并且规定，相等的向量表示同一个复数。

如图，图中$\overrightarrow{OZ}$的模叫做复数$z=a+bi$的模或绝对值

记作$|z|$或$|a+bi|$

即$|z|$或$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，其中$a,b\in R$



如果$b=0$，那么$z=a+bi$是一个实数a，它的模就等于$|a|$（a的绝对值）

复数模的几何意义：

复数 $z=a+bi$的模r就是复数 $z=a+bi$在复平面上对应的点$Z(a, b)$到原点的距离.