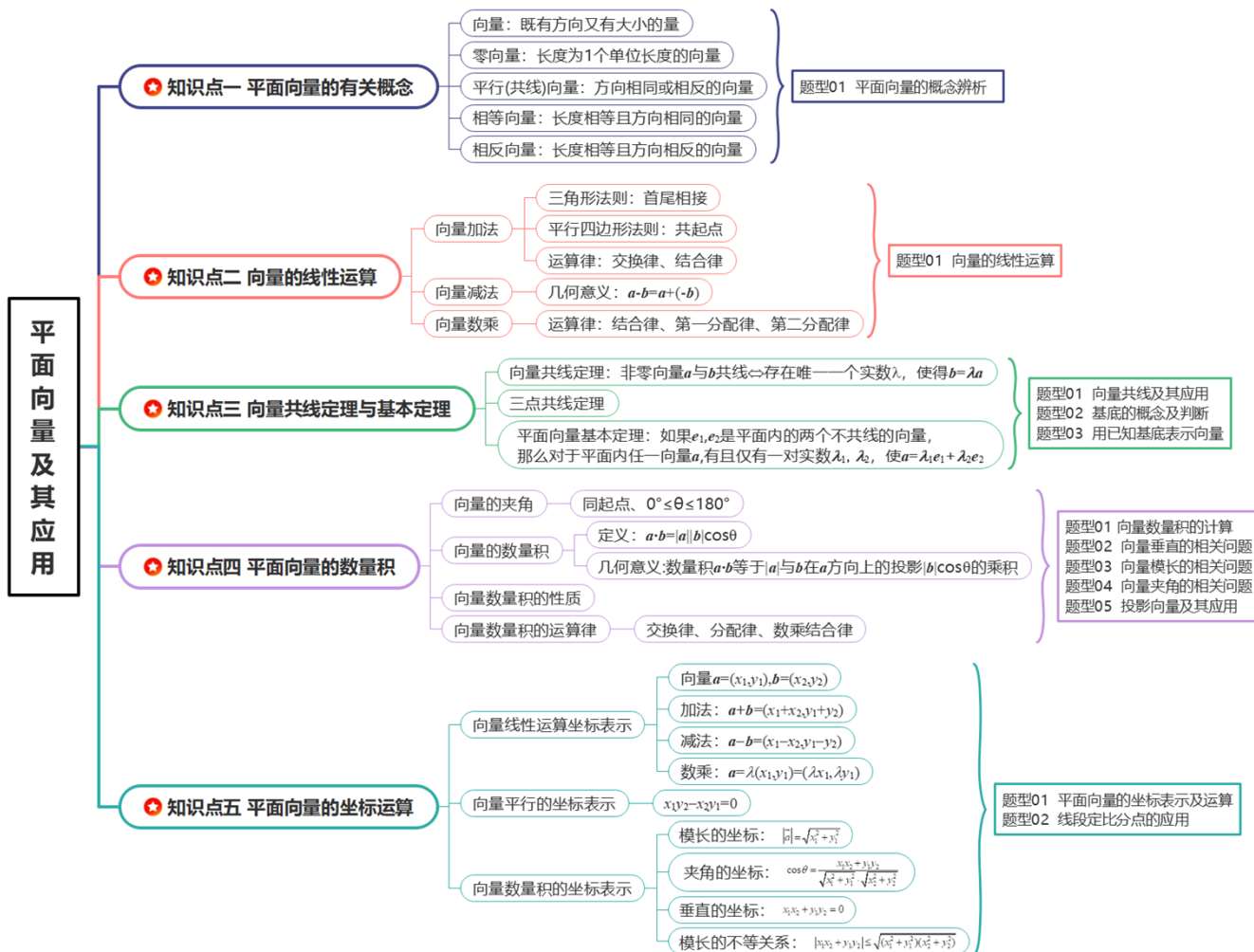


## 专题 09 平面向量及其应用

(思维构建+知识盘点+重点突破+方法技巧)

### 思维构建 · 理清脉络



### 知识盘点 · 查漏补缺

#### 知识点 1 向量的有关概念

- 1、向量：既有大小又有方向的量叫做向量，向量的大小叫做向量的模。
- 2、零向量：长度为0的向量，记作 $\vec{0}$ 。
- 3、单位向量：长度等于1个单位长度的向量。
- 4、平行向量：方向相同或相反的非零向量，又叫共线向量，规定： $\vec{0}$ 与任一向量平行。
- 5、相等向量：长度相等且方向相同的向量。
- 6、相反向量：长度相等且方向相反的向量。

**知识点 2 向量的线性运算**

向量运算	定义	法则(或几何意义)	运算律
加法	求两个向量和的运算	 三角形法则      平行四边形法则	交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ; 结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
减法	求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的相反向量 $-\vec{b}$ 的和的运算	 几何意义	$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
数乘	求实数 $\lambda$ 与向量 $\vec{a}$ 的积的运算	$ \lambda\vec{a}  =  \lambda   \vec{a} $ , 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$	结合律: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ ; 第一分配律: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ; 第二分配律: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

**知识点 3 向量共线定理与基本定理**

1、向量共线定理: 如果  $\vec{a} = \lambda\vec{b} (\lambda \in \mathbb{R})$ , 则  $\vec{a} // \vec{b}$ , 反之, 如果  $\vec{a} // \vec{b}$  且  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , 则一定存在唯一的实数  $\lambda$ , 使  $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ .

2、三点共线定理: 平面内三点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点共线的充要条件是: 存在实数  $\lambda, \mu$ , 使  $\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$ , 其中  $\lambda + \mu = 1$ ,  $O$  为平面内一点。

3、平面向量基本定理

(1) 定义: 如果  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任一向量  $\vec{a}$ , 有且只有一对实数  $\lambda_1, \lambda_2$ , 使  $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$

(2) 基底: 若  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  不共线, 我们把  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  叫做表示这一平面内所有向量的一个基底.

(3) 对平面向量基本定理的理解

①基底不唯一, 只要是同一平面内的两个不共线向量都可以作为基底. 同一非零向量在不同基底下的分解式是不同的.

②基底给定时, 分解形式唯一.  $\lambda_1, \lambda_2$  是被  $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$  唯一确定的数值.

③  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  是同一平面内所有向量的一组基底,

则当  $\vec{a}$  与  $\vec{e}_1$  共线时,  $\lambda_2 = 0$ ; 当  $\vec{a}$  与  $\vec{e}_2$  共线时,  $\lambda_1 = 0$ ; 当  $\vec{a} = \vec{0}$  时,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

④由于零向量与任何向量都是共线的, 因此零向量不能作为基底中的向量.

**知识点 4 平面向量的数量积**

### 1、向量的夹角

(1) 定义：已知两个非零向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$ ，作  $\vec{OA} = \vec{a}$ ， $\vec{OB} = \vec{b}$ ，则  $\angle AOB$  就是向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角。

(2) 范围：设  $\theta$  是向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角，则  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 。

(3) 共线与垂直：若  $\theta = 0^\circ$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  同向；若  $\theta = 180^\circ$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  反向；若  $\theta = 90^\circ$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  垂直。

### 2、平面向量的数量积

(1) 定义：已知两个非零向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$ ，它们的夹角为  $\theta$ ，则数量  $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$  叫做  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的数量积(或内积)，

记作  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ，规定零向量与任一向量的数量积为 0，即  $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$ 。

(2) 几何意义：数量积  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  等于  $\vec{a}$  的长度  $|\vec{a}|$  与  $\vec{b}$  在  $\vec{a}$  的方向上的投影  $|\vec{b}|\cos\theta$  的乘积。

**【注意】**(1) 数量积  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  也等于  $\vec{b}$  的长度  $|\vec{b}|$  与  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  方向上的投影  $|\vec{a}|\cos\theta$  的乘积，这两个投影是不同的。

(2)  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  方向上的投影也可以写成  $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ ，投影是一个数量，可正可负可为 0，取决于  $\theta$  角的范围。

### 3、向量数量积的性质

设  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  是两个非零向量， $\vec{e}$  是单位向量， $\alpha$  是  $\vec{a}$  与  $\vec{e}$  的夹角，于是我们就有下列数量积的性质：

(1)  $\vec{e} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}||\vec{e}|\cos\alpha = |\vec{a}|\cos\alpha$ 。

(2)  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。

(3)  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  同向  $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ ； $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  反向  $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ 。

特别地  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$  或  $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$ 。

(4) 若  $\theta$  为  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  的夹角，则  $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ 。

### 4、向量数量积的运算律

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (交换律)。

(2)  $\lambda\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \lambda\vec{b}$  (结合律)。

(3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  (分配律)。

**【注意】**对于实数  $a, b, c$  有  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ，但对于向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  而言， $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$  不一定成立，即不满足向量结合律。这是因为  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$  表示一个与  $\vec{c}$  共线的向量，而  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$  表示一个与  $\vec{a}$  共线的向量，而  $\vec{a}$  与  $\vec{c}$  不一定共线，所以  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$  不一定成立。

## 知识点 5 平面向量的坐标运算

### 1、向量线性运算坐标表示

(1) 已知  $\vec{a}=(x_1, y_1), \vec{b}=(x_2, y_2)$ , 则  $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$ ,  $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2)$ .

结论: 两个向量和与差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和与差.

(2) 若  $\vec{a}=(x, y)$ , 则  $\lambda\vec{a}=(\lambda x, \lambda y)$ ;

结论: 实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标.

2、向量平行坐标表示: 已知  $\vec{a}=(x_1, y_1), \vec{b}=(x_2, y_2)$ , 则向量  $\vec{a}, \vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0})$  共线的充要条件是  $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

3、向量数量积的坐标表示

已知非零向量  $\vec{a}=(x_1, y_1), \vec{b}=(x_2, y_2)$ ,  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\theta$ .

结论	几何表示	坐标表示
模	$ \vec{a}  = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$	$ \vec{a}  = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$
夹角	$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} }$	$\cos \theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$
$\vec{a} \perp \vec{b}$ 的充要条件	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$
$ \vec{a} \cdot \vec{b} $ 与 $ \vec{a}  \cdot  \vec{b} $ 的关系	$ \vec{a} \cdot \vec{b}  \leq  \vec{a}  \cdot  \vec{b} $	$ x_1x_2 + y_1y_2  \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$

## 重点突破 · 高分必抢

### 重难点 01 平面向量最值或范围问题

1、定义法: ①利用向量的概念及其基本运算将所求的问题转化为相应的等式关系; ②运用基本不等式求其最值问题; ③得出结论。

2、坐标法: ①根据题意建立适当的直角坐标系, 并推导关键点的坐标; ②将平面向量的运算坐标化; ③运用适当的数学方法如二次函数、基本不等式的思想、三角函数思想等求解。

3、基底法: ①利用基底转化向量; ②根据向量运算化简目标; ③运用适当的数学方法如二次函数、基本不等式的思想、三角函数等得出结论;

4、几何意义法: ①结合条件进行向量关系推导; ②利用向量之间的关系确定向量所表达的点的轨迹; ③结合图形, 确定临界位置的动态分析求出范围。

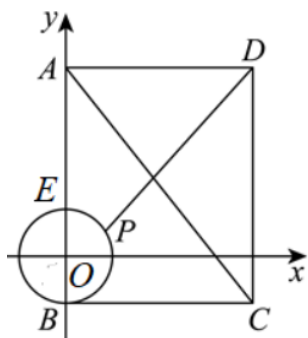
#### 类型 1 数量积的最值或范围

【典例 1】(2024·四川成都·三模) 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=5, AD=4$ , 点  $E$  满足  $2\vec{AE} = 3\vec{EB}$ , 在平面  $ABCD$  中, 动点  $P$  满足  $\vec{PE} \cdot \vec{PB} = 0$ , 则  $\vec{DP} \cdot \vec{AC}$  的最大值为 ( )

- A.  $\sqrt{41}+4$       B.  $\sqrt{41}-6$       C.  $2\sqrt{13}+4$       D.  $2\sqrt{13}-6$

【答案】A

【解析】以  $O$  为坐标原点 ( $O$  是  $BE$  中点), 建立如图所示的直角坐标系,



因为在矩形  $ABCD$  中,  $AB=5$ ,  $AD=4$ ,  $2\vec{AE} = 3\vec{EB}$ ,  $\vec{PE} \cdot \vec{PB} = 0$ ,

所以动点  $P$  在以  $O$  为圆心, 1 为半径的圆上运动, 故设  $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ,

则  $A(0,4), D(4,4), C(4,-1)$ ,

$$\vec{DP} \cdot \vec{AC} = (\cos\theta - 4, \sin\theta - 4) \cdot (4, -5) = 4(\cos\theta - 4) - 5(\sin\theta - 4) = \sqrt{41} \cos(\theta + \varphi) + 4,$$

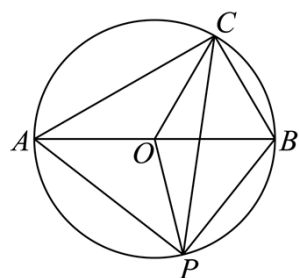
其中锐角  $\varphi$  满足  $\tan\varphi = \frac{5}{4}$ , 故  $\vec{DP} \cdot \vec{AC}$  的最大值为  $\sqrt{41} + 4$ , 故选: A.

【典例 2】(2024·江西鹰潭·二模) 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对应的边为  $a, b, c$ ,  $A = \frac{\pi}{6}$ ,  $C = \frac{\pi}{2}$ ,  $c = 2$ ,  $P$  是  $\triangle ABC$  外接圆上一点, 则  $\vec{PC} \cdot (\vec{PA} + \vec{PB})$  的最大值是 ( )

- A. 4                      B.  $2 + \sqrt{10}$                       C. 3                      D.  $1 + \sqrt{10}$

【答案】A

【解析】如图, 设  $\text{Rt}\triangle ABC$  的外心为  $O$ , 则点  $O$  是  $AB$  的中点,



$$\text{由 } \vec{PC} \cdot (\vec{PA} + \vec{PB}) = 2\vec{PC} \cdot \vec{PO} = 2(\vec{PO} + \vec{OC}) \cdot \vec{PO} = 2\vec{PO}^2 + 2\vec{PO} \cdot \vec{OC},$$

因  $c = 2$ , 故  $|\vec{PO}| = |\vec{OC}| = 1$ , 而  $\vec{PO} \cdot \vec{OC} = \cos\langle \vec{PO}, \vec{OC} \rangle$ ,

故  $\vec{PC} \cdot (\vec{PA} + \vec{PB}) \leq 2 + 2 = 4$ , 当且仅当  $\vec{PO}$  与  $\vec{OC}$  同向时取等号. 故选: A.

类型 2 模长的最值或范围

**【典例 1】** (2024·陕西西安·模拟预测) 已知向量  $\vec{a} = (m, m)$ ,  $m \in \mathbf{R}$ ,  $\vec{b} = (0, 2)$ , 则  $|\vec{a} + \vec{b}|$  的最小值为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\sqrt{2}$

**【解析】**  $\vec{a} + \vec{b} = (m, m+2)$ ,

$$\text{所以 } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{m^2 + (m+2)^2} = \sqrt{2m^2 + 4m + 4} = \sqrt{2(m+1)^2 + 2} \geq \sqrt{2}.$$

当  $m = -1$  时等号成立.

故答案为:  $\sqrt{2}$ .

**【典例 2】** (2024·江苏泰州·模拟预测) 在平行四边形  $ABCD$  中  $A = 45^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $AD = \sqrt{2}$ , 若  $\vec{AP} = \vec{AB} + x\vec{AD}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 则  $|\vec{AP}|$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C. 1                      D.  $\sqrt{2}$

**【答案】** B

**【解析】** 由  $\vec{AP} = \vec{AB} + x\vec{AD}$  可得  $|\vec{AP}|^2 = (\vec{AB} + x\vec{AD})^2 = |\vec{AB}|^2 + x^2|\vec{AD}|^2 + 2x\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

$$= 1 + 2x^2 + 2x \times 1 \times \sqrt{2} \cos 45^\circ = 2x^2 + 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

因  $x \in \mathbf{R}$ , 故  $x = -\frac{1}{2}$  时,  $|\vec{AP}|_{\min}^2 = \frac{1}{2}$ , 即  $|\vec{AP}|$  的最小值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 故选: B.

### 类型 3 向量夹角的最值或范围

**【典例 1】** (2024·广东江门·二模) 设向量  $\vec{OA} = (1, x)$ ,  $\vec{OB} = (2, x)$ , 则  $\cos \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$  的最小值为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  /  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

**【解析】**  $\cos \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \frac{2+x^2}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+4)}}$ , 令  $2+x^2 = t$  ( $t \geq 2$ ), 则  $x^2 = t-2$ ,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \frac{t}{\sqrt{(t-1)(t+2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}}} = \frac{1}{\sqrt{-2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}},$$

当  $\frac{1}{t} = \frac{1}{4}$ , 即  $t = 4, x^2 = 2$  时,  $\cos \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$  取得最小值, 且最小值为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

故答案为:  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

**【典例 2】** (23-24 高三上·山东菏泽·阶段练习) 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$ , 满足  $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=4$ , 若对任意模为 2 的向量  $\vec{c}$ , 均有  $|\vec{a} \cdot \vec{c}| + |\vec{b} \cdot \vec{c}| \leq 2\sqrt{21}$ , 则向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角的取值范围为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

**【解析】** 由  $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=4$ , 若对任意模为 2 的向量  $\vec{c}$ , 均有  $|\vec{a} \cdot \vec{c}| + |\vec{b} \cdot \vec{c}| \leq 2\sqrt{21}$ ,

由三角不等式得,  $|(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}| \leq |\vec{a} \cdot \vec{c}| + |\vec{b} \cdot \vec{c}| \leq 2\sqrt{21}$ , 因为向量  $\vec{c}$  为任意模为 2 的向量,

所以当向量  $\vec{a} + \vec{b}$  与向量  $\vec{c}$  夹角为 0 时, 上式也成立, 设向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $\alpha$ .

$$\therefore |(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 0 = 2|\vec{a} + \vec{b}| \leq 2\sqrt{21}, \quad |\vec{a} + \vec{b}| \leq \sqrt{21},$$

$$\text{平方得到 } \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 21, \quad \text{即 } 1^2 + 4^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 21,$$

$$\text{则 } \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 2, \quad \text{即 } 1 \times 4 \cos \alpha \leq 2, \quad \text{即 } \cos \alpha \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{同时 } |(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 0 = 2|\vec{a} - \vec{b}| \leq 2\sqrt{21}, \quad \text{所以 } |\vec{a} - \vec{b}| \leq \sqrt{21},$$

$$\text{平方得到 } \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 21, \quad \text{即 } 1^2 + 4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 21,$$

$$\text{解得 } \vec{a} \cdot \vec{b} \geq -2, \quad \text{即 } 1 \times 4 \cos \alpha \geq -2, \quad \cos \alpha \geq -\frac{1}{2},$$

$$\text{综上 } -\frac{1}{2} \leq \cos \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \text{又因为 } \alpha \in [0, \pi], \quad \text{即 } \frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \text{向量 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 的夹角的取值范围 } \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

$$\text{故答案为: } \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

#### 类型 4 线性系数的最值或范围

**【典例 1】** (2024·山西晋中·模拟预测) (多选) 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  为边  $AC$  上一点且满足  $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{DC}$ , 若  $P$  为边  $BD$  上一点, 且满足  $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$ ,  $\lambda, \mu$  为正实数, 则下列结论正确的是 ( )

A.  $\lambda\mu$  的最小值为 1

B.  $\lambda\mu$  的最大值为  $\frac{1}{12}$

C.  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\mu}$  的最大值为 12

D.  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\mu}$  的最小值为 4

**【答案】** BD

**【解析】** 因为  $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{DC}$ , 所以  $\vec{AC} = 3\vec{AD}$ ,

$$\text{又 } \vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} = \lambda \vec{AB} + 3\mu \vec{AD},$$

因为  $P$ 、 $B$ 、 $D$  三点共线，所以  $\lambda + 3\mu = 1$ ，

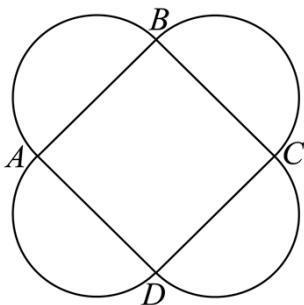
$$\text{又 } \lambda, \mu \text{ 为正实数，所以 } \lambda\mu = \frac{1}{3}\lambda \times 3\mu \leq \frac{1}{3} \times \left(\frac{\lambda+3\mu}{2}\right)^2 = \frac{1}{12},$$

当且仅当  $\lambda = 3\mu$ ，即  $\lambda = \frac{1}{2}$ ， $\mu = \frac{1}{6}$  时取等号，故 A 错误，B 正确；

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\mu} = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\mu}\right)(\lambda + 3\mu) = 2 + \frac{3\mu}{\lambda} + \frac{\lambda}{3\mu} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{3\mu}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{3\mu}} = 4,$$

当且仅当  $\frac{3\mu}{\lambda} = \frac{\lambda}{3\mu}$ ，即  $\lambda = \frac{1}{2}$ ， $\mu = \frac{1}{6}$  时取等号，故 C 错误，D 正确. 故选：BD

**【典例 2】** (23-24 高三下·安徽·阶段练习) 已知正方形  $ABCD$  的边长为 2，中心为  $O$ ，四个半圆的圆心均为正方形  $ABCD$  各边的中点 (如图)，若  $P$  在  $BC$  上，且  $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD}$ ，则  $\lambda + \mu$  的最大值为\_\_\_\_\_.



**【答案】**  $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

**【解析】** 如图，以线段  $BC$  所在直线为  $x$  轴，线段  $BC$  的垂直平分线为  $y$  轴建立平面直角坐标系，

$$\text{设 } P(\cos \theta, \sin \theta), \theta \in [\pi, 2\pi]$$

$$\text{又 } A(-1, 2), B(-1, 0), C(1, 0), D(1, 2),$$

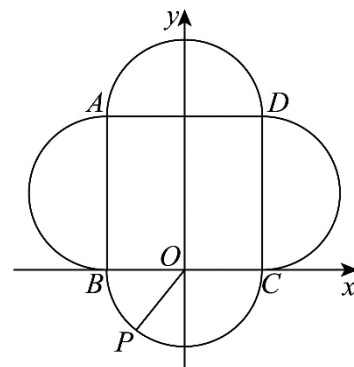
$$\text{则 } \vec{AP} = (\cos \theta + 1, \sin \theta - 2), \vec{AD} = (2, 0), \vec{AB} = (0, -2),$$

$$\text{Q } \vec{AP} = \lambda \vec{AD} + \mu \vec{AB}, \text{ 即 } (\cos \theta + 1, \sin \theta - 2) = \lambda(2, 0) + \mu(0, -2)$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \theta + 1 = 2\mu \\ \sin \theta - 2 = -2\lambda \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \mu = \frac{\cos \theta + 1}{2} \\ \lambda = \frac{2 - \sin \theta}{2} \end{cases},$$

$$\lambda + \mu = \frac{2 - \sin \theta}{2} + \frac{\cos \theta + 1}{2} = \frac{1}{2}(\cos \theta - \sin \theta + 3) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 3\right),$$

$$\text{因为 } \theta \in [\pi, 2\pi], \text{ 则 } \theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right],$$



所以当  $\theta + \frac{\pi}{4} = 2\pi$  时,  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$  取得最大值 1,

则  $\lambda + \mu$  的最大值为  $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ .

故答案为:  $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ .

### 重难点 02 运用向量表示三角形的重心、垂心、外心、内心

1、常见重心向量式: 设  $O$  是  $\triangle ABC$  的重心,  $P$  为平面内任意一点

$$\textcircled{1} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$$

$$\textcircled{2} \vec{PO} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC})$$

③若  $\vec{AP} = \lambda(\vec{AB} + \vec{AC})$  或  $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda(\vec{AB} + \vec{AC})$ ,  $\lambda \in [0, +\infty)$ , 则  $P$  一定经过三角形的重心

④若  $\vec{AP} = \lambda\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|\sin B} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|\sin C}\right)$  或  $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|\sin B} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|\sin C}\right)$ ,  $\lambda \in [0, +\infty)$  则  $P$  一定经过三角形的重心

2、常见垂心向量式:  $O$  是  $\triangle ABC$  的垂心, 则有以下结论:

$$\textcircled{1} \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA}$$

$$\textcircled{2} |\vec{OA}|^2 + |\vec{BC}|^2 = |\vec{OB}|^2 + |\vec{CA}|^2 = |\vec{OC}|^2 + |\vec{AB}|^2$$

③动点  $P$  满足  $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|\cos B} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|\cos C}\right)$ ,  $\lambda \in (0, +\infty)$ , 则动点  $P$  的轨迹一定通过  $\triangle ABC$  的垂心

3、常用外心向量式:  $O$  是  $\triangle ABC$  的外心,

$$\textcircled{1} |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| \Leftrightarrow \vec{OA}^2 = \vec{OB}^2 = \vec{OC}^2$$

$$\textcircled{2} (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{BC} = (\vec{OA} + \vec{OC}) \cdot \vec{AC} = 0$$

③动点  $P$  满足  $\vec{OP} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} + \lambda\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|\cos B} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|\cos C}\right)$ ,  $\lambda \in (0, +\infty)$ , 则动点  $P$  的轨迹一定通过  $\triangle ABC$  的外心.

④若  $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{BC} = (\vec{OC} + \vec{OA}) \cdot \vec{CA} = 0$ , 则  $O$  是  $\triangle ABC$  的外心.

4、常见内心向量式:  $P$  是  $\triangle ABC$  的内心,

$$\textcircled{1} |\vec{AB}|\vec{PC} + |\vec{BC}|\vec{PA} + |\vec{CA}|\vec{PB} = \vec{0} \quad (\text{或 } a\vec{PA} + b\vec{PB} + c\vec{PC} = \vec{0})$$

其中  $a, b, c$  分别是  $\triangle ABC$  的三边  $BC, AC, AB$  的长,

②  $\vec{AP} = \lambda\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}\right)$ ,  $\lambda \in [0, +\infty)$ , 则  $P$  一定经过三角形的内心.

**【典例 1】** (2024·四川南充·三模) 已知点  $P$  在  $\triangle ABC$  所在平面内, 若

$$PA \cdot \left(\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} - \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\right) = PB \cdot \left(\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} - \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|}\right) = 0, \text{ 则点 } P \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的 ( )}$$

- A. 外心                  B. 垂心                  C. 重心                  D. 内心

【答案】D

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由 $\vec{PA} \cdot \left( \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} - \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \right) = 0$ ，得 $\vec{PA} \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \vec{PA} \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ ，

即 $|\vec{AP}| \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = |\vec{AP}| \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ ，由 $\vec{PB} \cdot \left( \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} - \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} \right) = 0$ ，同理得 $|\vec{BP}| \cdot \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = |\vec{BP}| \cdot \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|}$ ，

显然 $\vec{AP} \neq \vec{0}$ ，即 $P$ 与 $A$ 不重合，否则 $\cos \angle ABC = 1$ ，同理 $\vec{BP} \neq \vec{0}$ ，

则 $|\vec{AP}| \cos \angle PAC = |\vec{AP}| \cos \angle PAB$ ，即 $\cos \angle PAC = \cos \angle PAB$ ， $\angle PAC = \angle PAB$ ，

于是 $AP$ 平分 $\angle BAC$ ，同理 $BP$ 平分 $\angle ABC$ ，

所以点 $P$ 是 $\triangle ABC$ 的内心.故选：D

【典例2】(23-24 高三上·全国·专题练习) 已知 $G, O, H$ 在 $\triangle ABC$ 所在平面内，满足 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ ， $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$ ， $\vec{AH} \cdot \vec{BH} = \vec{BH} \cdot \vec{CH} = \vec{CH} \cdot \vec{AH}$ ，则点 $G, O, H$ 依次为 $\triangle ABC$ 的( )

- A. 重心，外心，内心
- B. 重心、内心，外心
- C. 重心，外心，垂心
- D. 外心，重心，垂心

【答案】C

【解析】因为 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ ，所以 $\vec{GA} + \vec{GB} = -\vec{GC}$ ，

设 $AB$ 的中点 $D$ ，则 $\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GD}$ ，所以 $-\vec{GC} = 2\vec{GD}$ ，

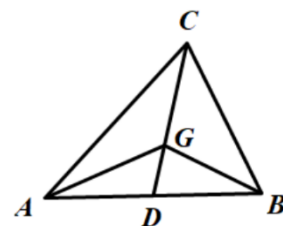
所以 $C, G, D$ 三点共线，即 $G$ 为 $\triangle ABC$ 的中线 $CD$ 上的点，且 $GC = 2GD$ ，

所以 $G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心.

因为 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$ ，所以 $|OA| = |OB| = |OC|$ ，所以 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心；

因为 $\vec{AH} \cdot \vec{BH} = \vec{BH} \cdot \vec{CH} = \vec{CH} \cdot \vec{AH}$ ，所以 $\vec{BH} \cdot (\vec{AH} - \vec{CH}) = 0$ ，即 $\vec{HB} \cdot \vec{AC} = 0$ ，

所以 $\vec{HB} \perp \vec{AC}$ ，同理可得： $\vec{HA} \perp \vec{BC}$ ， $\vec{HB} \perp \vec{AB}$ ，所以 $H$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心.故选：C.



### 重难点 03 奔驰定理及其应用

1、奔驰定理： $O$ 是 $\triangle ABC$ 内的一点，且 $x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC} = \vec{0}$ ，

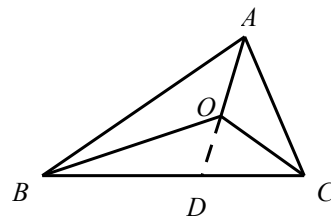
$$\text{则 } S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COA} : S_{\triangle AOB} = x : y : z$$

2、证明过程：已知 $O$ 是 $\triangle ABC$ 内的一点， $\triangle BOC$ ， $\triangle COA$ ， $\triangle AOB$ 的面积分别为 $S_A, S_B, S_C$ ，

求证： $S_A \cdot \vec{OA} + S_B \cdot \vec{OB} + S_C \cdot \vec{OC} = \vec{0}$ 。

延长 $OA$ 与 $BC$ 边相交于点 $D$ ，

$$\text{则 } \frac{BD}{DC} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COD}} = \frac{S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle ACD} - S_{\triangle COD}} = \frac{S_C}{S_B}$$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/007101036150006146>