第六章　平面向量及其应用

§6.1　平面向量的概念

1

PART ONE

知识梳理

知识点一　向量的概念及表示

1.向量的概念

(1)向量：既有__大小__又有__方向__的量叫做向量.

(2)数量：只有__大小__没有__方向__的量称为数量.

2.向量的表示

(1)有向线段

具有__方向__的线段叫做有向线段，它包含三个要素：__起点__、__方向__、__长度__.

以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$，线段 AB 的长度叫做有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度，记作$|\overrightarrow{AB}|$.

(2)向量的表示

①几何表示：向量可以用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，向量$\overrightarrow{AB}$的大小称为向量$\overrightarrow{AB}$的长度(或称模)，记作$|\overrightarrow{AB}|$.

②字母表示：向量可以用字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…表示(印刷用黑体 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，书写时用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$).

思考　“向量就是有向线段，有向线段就是向量”的说法对吗？

答案　错误.理由是：①向量只有长度和方向两个要素，与起点无关，只要长度和方向相同，则这两个向量就是相同的向量；②有向线段有起点、长度和方向三个要素，起点不同，尽管长度和方向相同，也是不同的有向线段.

知识点二　向量的相关概念

向量名称	定义
零向量	长度为0的向量，记作**0**
单位向量	长度等于<u>1个单位</u>长度的向量
平行向量(共线向量)	方向<u>相同或相反</u>的非零向量；向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$平行，记作$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，规定：零向量与任意向量<u>平行</u>
相等向量	长度<u>相等</u>且方向<u>相同</u>的向量；向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$相等，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

思考　(1)平行向量是否一定方向相同？

答案　不一定；

(2)不相等的向量是否一定不平行？

答案　不一定；

(3)与任意向量都平行的向量是什么向量？

答案　零向量；

(4)若两个向量在同一直线上，则这两个向量一定是什么向量？

答案　平行(共线)向量.

[归纳]

解决与向量概念有关问题的关键是突出向量的核心——**方向和长度**.

如：

1.共线向量的核心是方向相同或相反，长度没有限制；

2.相等向量的核心是方向相同且长度相等；

3.单位向量的核心是方向没有限制，但长度都是一个单位长度；

4.零向量的核心是方向没有限制，长度是0；

5.规定零向量与任一向量共线.

思考辨析 判断正误

SI KAO BIAN XI PAN DUAN ZHENG WU

1.如果$|\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{CD}|$，那么$\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{CD}$.(×)

2.力、速度和质量都是向量.(×)

3.零向量的大小为0，没有方向.(×)

2

PART TWO

题型探究

一、向量的概念

例1　(多选)下列说法错误的是

A.向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\overrightarrow{BA}$的长度相等

B.两个有共同起点，且长度相等的向量，它们的终点相同

C.零向量都是相等的

D.若两个单位向量平行，则这两个单位向量相等

解析　两个有共同起点，且长度相等的向量，它们的方向不一定相同，终点也不一定相同；

零向量的模都是0，但方向不确定；

两个单位向量也可能反向，则不相等，故B，C，D都错误，A正确.

反思感悟

解决向量概念问题一定要紧扣定义，对单位向量与零向量要特别注意方向问题.

跟踪训练1　下列说法中正确的是

A.向量的模都是正实数

B.单位向量都是相等向量

C.向量的大小与方向无关

D.方向不同的向量不能比较大小，但同向的向量可以比较大小

解析　零向量的模为0，故A不正确；

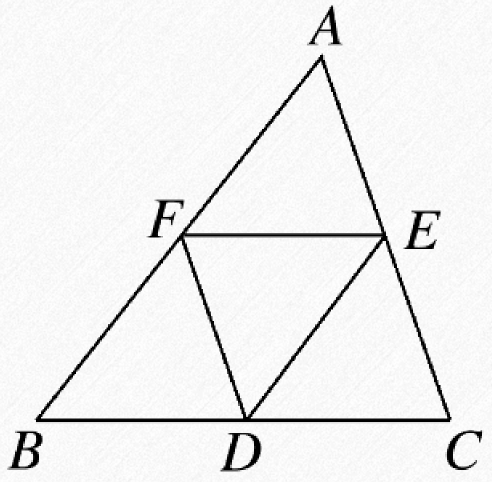
单位向量的方向可以是任意的，故B不正确；

向量的大小即为向量的模，指的是有向线段的长度，与方向无关，故C正确；

不管向量的方向如何，它们都不能比较大小，故D不正确.

二、相等向量与共线向量

例2　如图所示，$\triangle ABC$的三边均不相等，E，F，D分别是AC，AB，BC的中点.



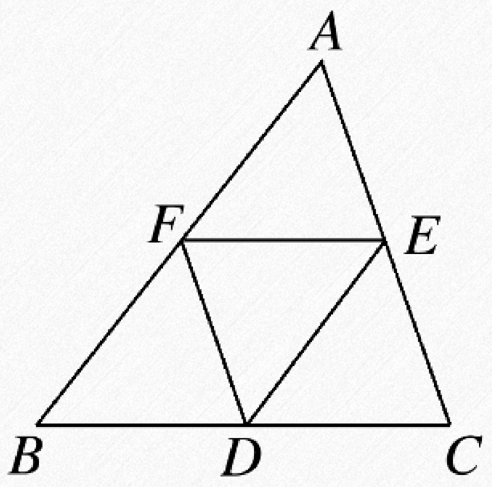
(1)写出与$\overrightarrow{EF}$共线的向量；

(2)写出模与$\overrightarrow{EF}$的模相等的向量；

(3)写出与$\overrightarrow{EF}$相等的向量.

二、相等向量与共线向量

例2 如图所示，$\triangle ABC$的三边均不相等，E，F，D分别是AC，AB，BC的中点.



(1)写出与$\overrightarrow{EF}$共线的向量；

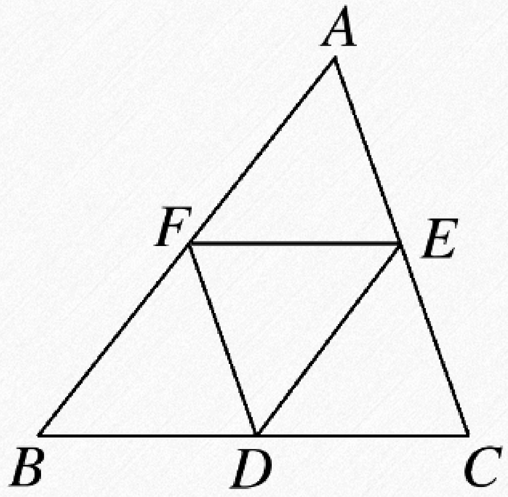
解 因为E，F分别是AC，AB的中点，

所以 $EF\parallel BC$，$EF=\frac{1}{2}BC$.

又因为D是BC的中点，

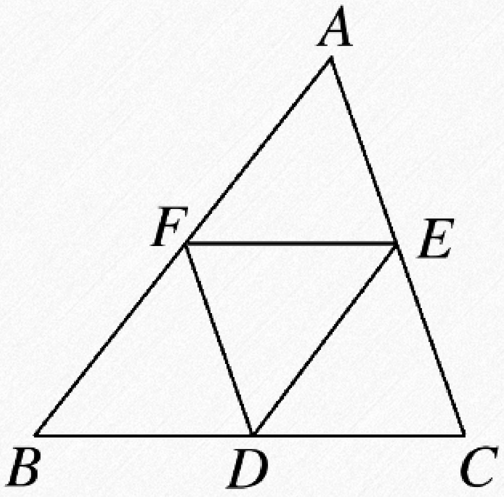
所以与$\overrightarrow{EF}$共线的向量有$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$.

(2)写出模与$\overrightarrow{EF}$的模相等的向量；



解　模与$\overrightarrow{EF}$的模相等的向量有$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CD}$.

(3)写出与$\overrightarrow{EF}$相等的向量.



解　与$\overrightarrow{EF}$相等的向量有$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}$.

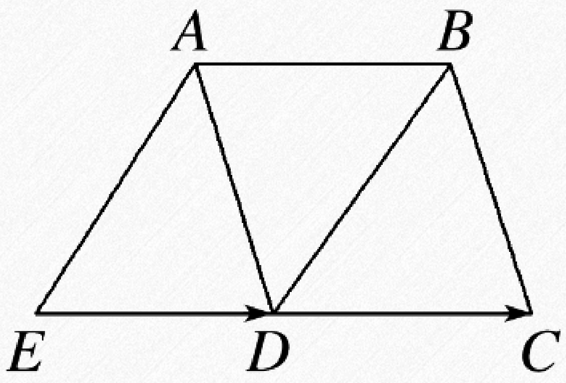
反思感悟

相等向量与共线向量的探求方法

(1)寻找相等向量：先找与表示已知向量的有向线段长度相等的向量，再确定哪些是同向共线.

(2)寻找共线向量：先找与表示已知向量的有向线段平行或共线的线段，再构造同向与反向的向量，注意不要漏掉以表示已知向量的有向线段的终点为起点，起点为终点的向量.

跟踪训练2 如图所示，四边形$ABCD$和$ABDE$都是平行四边形.



(1)与向量$\overrightarrow{ED}$相等的向量为__$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$__；

解析 在▱$ABCD$和▱$ABDE$中，$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\therefore \overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DC}$.

(2)若$|\overrightarrow{AB}|=3$，则$|\overrightarrow{EC}|=$__6__.

解析 由(1)知，$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DC}$，

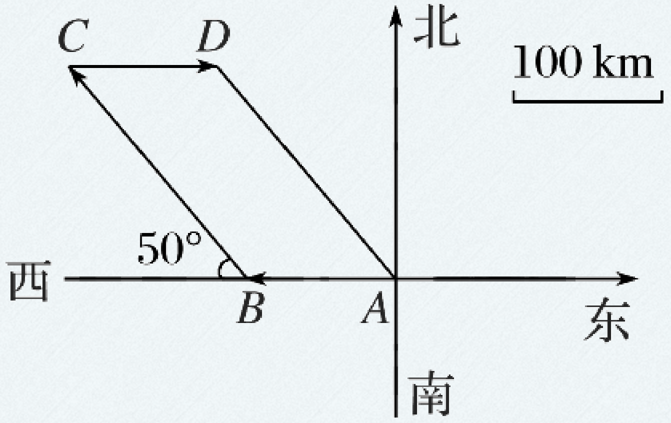
$\therefore E$，D，C三点共线，$|\overrightarrow{EC}|=|\overrightarrow{ED}|+|\overrightarrow{DC}|=2|\overrightarrow{AB}|=6$.

三、向量的表示及应用

例3　一辆汽车从A点出发向西行驶了100 km到达B点，然后又改变方向，向西偏北50°的方向走了200 km到达C点，最后又改变方向，向东行驶了100 km到达D点.

(1)作出向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$；　　　(2)求$|\overrightarrow{AD}|$.

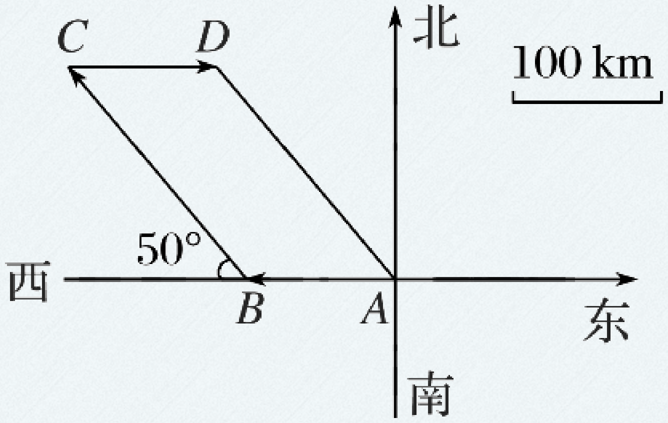
解　向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$如图所示.



(2)求$|\overrightarrow{AD}|$.

解　由题意，可知$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$方向相反，故$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，

$\because |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$,



$\therefore$在四边形$ABCD$中，$AB /\!/ CD$且$AB=CD$,

$\therefore$四边形$ABCD$为平行四边形，

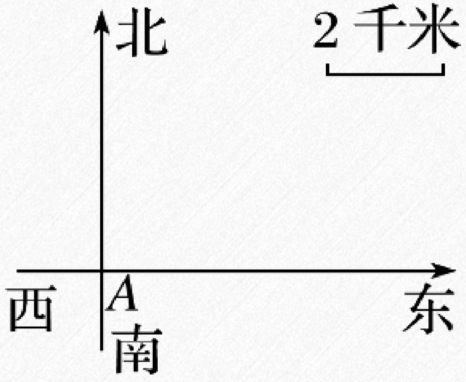
$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\therefore |\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=200(\text{km})$.

反思感悟

作向量的方法

准确画出向量的方法是先确定向量的起点，再确定向量的方向，然后根据向量的大小确定向量的终点.

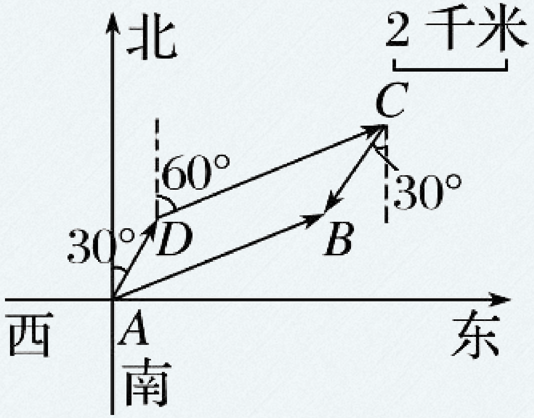
跟踪训练3 一辆消防车从A地去B地执行任务，先从A地向北偏东30°方向行驶2千米到D地，然后从D地沿北偏东60°方向行驶6千米到达C地，从C地又向南偏西30°方向行驶2千米才到达B地.



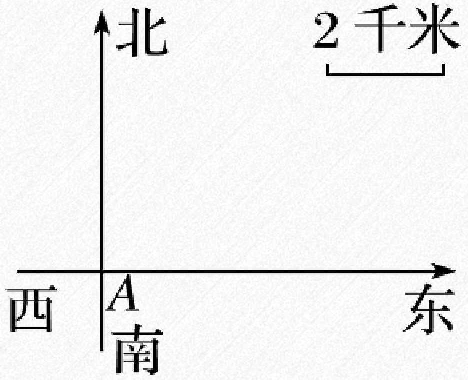
(1)在图中作出$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AB}$；

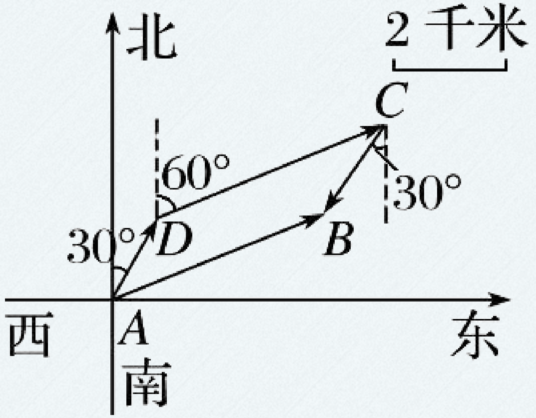
(2)求B地相对于A地的位置.

解 向量$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AB}$，如图所示.



(2)求B地相对于A地的位置.



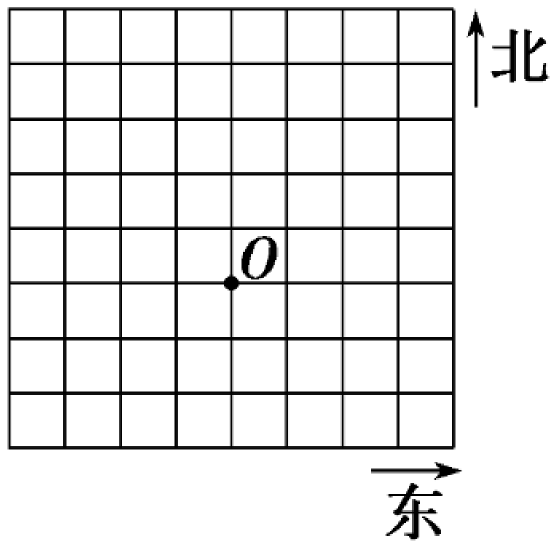


解　由题意知$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\therefore AD=BC$，$AD\,/\!/\,BC$，

则四边形$ABCD$为平行四边形，

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,则 B 地相对于 A 地的位置为“北偏东 60°,距离为 6 千米”.

【对点练习】❷　在如图的方格纸中，画出下列向量.

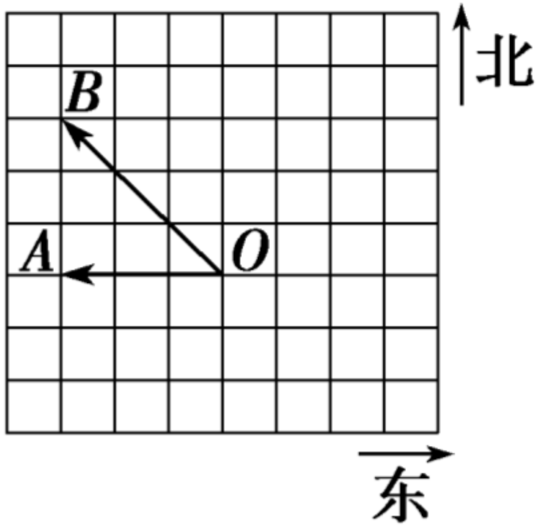


(1)$|\overrightarrow{OA}|=3$，点 A 在点 O 的正西方向；

(2)$|\overrightarrow{OB}|=3\sqrt{2}$，点 B 在点 O 北偏西 45°方向；

(3)求出$|\overrightarrow{AB}|$的值.

[解析]　取每个方格的单位长为 1，依题意，结合向量的表示可知，(1)(2)的向量如图所示.



(3)由图知，$\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2}=3.$$

特殊向量的作用

典例　给出下列命题：

①若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的方向相同或相反；②若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$；

③若两个模相等的向量互相平行，则这两个向量相等；

④若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$，

其中正确的是___④___.(填序号)

解析　由于零向量的方向是任意的，且规定零向量与任意向量平行，

故取$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则对于任意的向量$\boldsymbol{b}$，都有$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，知①错误；

取$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则对于任意的向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$都有$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，知②错误；

两个模相等的向量互相平行，方向可能相反，知③错误；

由两个向量相等的概念可知④正确.

素养提升

(1)特殊向量的性质往往与一般向量有所不同，在解题中应单独加以验证，不能混淆.

例如：零向量与任意向量平行，解题时要验证取零向量时是否成立.

(2)本题主要考查相等向量，共线向量与零向量的概念，需要准确理解概念进行推理，这体现了数学中逻辑推理的核心素养.

3

PART THREE

随堂演练

1.在同一平面内，把所有长度为1的向量的起点固定在同一点，那么这些向量的终点形成的图形是

A.单位圆　　B.一段弧

C.线段　　D.直线