

2025 年高考第三次模拟考试

高三数学（新高考 I 卷）·全解全析

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 58 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x \leq 1\}$ ， $B = \{y | y = 2^x, x \leq 2\}$ ，则（ ）

- A. $A \cup B = B$ B. $A \cup B = A$ C. $A \cap B = B$ D. $A \cup (C_R B) = R$

【答案】A

【解析】由 $\log_2 x \leq 1$ ，则 $\log_2 x \leq \log_2 2$ ，所以 $0 < x \leq 2$ ，

所以 $A = \{x | \log_2 x \leq 1\} = \{x | 0 < x \leq 2\}$ ，又 $B = \{y | y = 2^x, x \leq 2\} = \{y | 0 < y \leq 4\}$ ，

所以 $A \subseteq B$ ，则 $A \cup B = B$ ， $A \cap B = A$ 。

故选：A。

2. 若复数 z 满足 $iz = 1 + i$ ，其共轭复数为 $\bar{z}$ ，则下列说法正确的是（ ）

- A. z 对应的点在第一象限 B. $\bar{z} = 1 + i$
C. z 的虚部为 $-i$ D. $|z| = 2$

2. 【答案】B

【解析】由 $iz = 1 + i$ 两边乘以 $-i$ 得， $z = 1 - i$ ，

所以 z 对应点 $(1, -1)$ 在第四象限，

z 的虚部为 -1 ， $\bar{z} = 1 + i$ ， $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ，

所以 B 选项正确，ACD 选项错误。

故选：B

3. 一组数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ 满足 $x_i - x_{i-1} = 2 (2 \leq i \leq 10)$ ，若去掉 x_1, x_{10} 后组成一组新数据. 则新数据与原数据相比（ ）

- A. 极差变大 B. 平均数变大 C. 方差变小 D. 第 25 百分位数变小

3. 【答案】C

3. 【解析】由于 $x_i - x_{i-1} = 2 (2 \leq i \leq 10)$,

故 $x_2 = x_1 + 2$, $x_3 = x_1 + 4$, $\dots$, $x_9 = x_1 + 16$, $x_{10} = x_1 + 18$,

A 选项, 原来的极差为 $x_{10} - x_1 = 18$, 去掉 x_1, x_{10} 后, 极差为 $x_9 - x_2 = 14$, 极差变小, A 错误;

B 选项, 原来的平均数为 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} = \frac{10x_1 + 90}{10} = x_1 + 9$,

去掉 x_1, x_{10} 后的平均数为 $\frac{x_2 + x_3 + \dots + x_9}{8} = \frac{8x_1 + 72}{8} = x_1 + 9$, 平均数不变, B 错误;

C 选项, 原来的方差为 $\frac{(x_1 - x_1 - 9)^2 + (x_2 - x_1 - 9)^2 + \dots + (x_{10} - x_1 - 9)^2}{10} = 33$,

去掉 x_1, x_{10} 后的方差为 $\frac{(x_2 - x_1 - 9)^2 + (x_3 - x_1 - 9)^2 + \dots + (x_9 - x_1 - 9)^2}{8} = 21$,

方差变小, C 正确;

D 选项, $10 \times 25\% = 2.5$, 从小到大排列, 选第 3 个数作为第 25 百分位数, 即 x_3 ,

$8 \times 25\% = 2$, 故从小到大排列, 选择第 3 个数作为第 25 百分位数, 即 x_4 ,

由于 $x_3 < x_4$, 第 25 百分位数变大, D 错误.

故选: C

4. 将甲、乙等 8 名同学分配到 3 个体育场馆进行冬奥会 志愿服务, 每个场馆不能少于 2 人, 则不同的安排方法有 ()

A. 2720

B. 3160

C. 3000

D. 2940

4. 【答案】D

【解析】共有两种分配方式, 一种是 4:2:2, 一种是 3:3:2,

故不同的安排方法有 $\left(\frac{C_8^4 C_4^2 C_2^2}{2!} + \frac{C_8^3 C_3^3 C_2^2}{2!} \right) A_3^3 = 2940$.

故选: D

5. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 $c=4$, $A=\frac{\pi}{3}$, 且 BE 为边 AC 上的高, AD

为边 BC 上的中线, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的值为 ()

A. 2

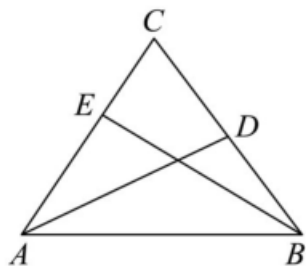
B. -2

C. 6

D. -6

5. 【答案】D

【解析】



因为 AD 为边 BC 上的中线，所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ，

又 BE 为边 AC 上的高，

所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ ，且在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{AB}| \cos \angle BAE = 4 \times \cos \frac{\pi}{3} = 2$ ，

所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}| \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$

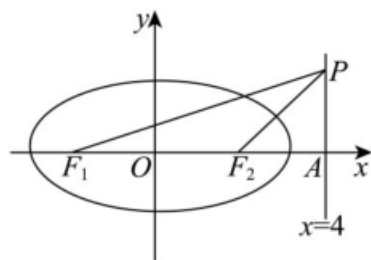
$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 16 = -6$

故选：D.

6. 古希腊数学家阿基米德利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘

积. 如图， F_1, F_2 为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，中心为原点，椭圆 E 的面积为 $\sqrt{5}\pi$ ，

直线 $x=4$ 上一点 P 满足 $\triangle F_1PF_2$ 是等腰三角形，且 $\angle F_1F_2P = 120^\circ$ ，则 E 的离心率为 ()



A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

6. 【答案】B

【解析】由题可知， $\sqrt{5}\pi = \pi ab$ ，即 $ab = \sqrt{5}$ ， $\triangle F_1PF_2$ 是以 $\angle F_1F_2P = 120^\circ$ 为顶角的等腰三角形，

则有： $|F_1F_2| = |PF_2|$ ， $\angle PF_1F_2 = \angle F_2PF_1 = 30^\circ$ ， $\angle F_2PA = 30^\circ$ ，

所以 $|PF_2| = 2|AF_2| = 2(4-c) = 8-2c$ ，又因为 $|F_1F_2| = 2c$ ，即 $2c = 8-2c$ ， $c = 2$ ，

可得: $\begin{cases} ab = \sqrt{5} \\ c = 2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = \sqrt{5} \\ c = 2 \\ b = 1 \end{cases}$, 故离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选: B.

7. 若 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -2$, 则 $\frac{\sin\alpha(1 - \sin 2\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha} = (\quad)$

- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{6}{5}$

7. 【答案】C

【解析】因为 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\alpha \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha} = -2$, 解得 $\tan\alpha = 3$,

所以, $\frac{\sin\alpha(1 - \sin 2\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha}$

$$= \frac{\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{3 - 9}{1 + 9} = -\frac{3}{5}.$$

故选: C.

8. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $g'(x)$ 为 $g(x)$ 的导函数且 $f(x) + g'(x) = 3, f(x) - g'(4 - x) = 3$,

若 $g(x)$ 为偶函数, 则下列结论一定成立的是 ()

- A. $f(-1) = f(-3)$ B. $f(1) + f(3) = 5$
- C. $g'(2) = 3$ D. $f(4) = 3$

8. 【答案】D

【解析】对于 D, $\because g(x)$ 为偶函数, 则 $g(x) = g(-x)$,

两边求导可得 $g'(x) = -g'(-x)$, 则 $g'(x)$ 为奇函数,

则 $g'(0) = 0$, 令 $x = 4$, 则 $f(4) - g'(0) = 3$, $f(4) = 3$, D 对;

对于 C, 令 $x = 2$, 可得 $\begin{cases} f(2) + g'(2) = 3 \\ f(2) - g'(2) = 3 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} f(2) = 3 \\ g'(2) = 0 \end{cases}$, C 错;

对于 B, $\because f(x) + g'(x) = 3$, 可得 $f(2+x) + g'(2+x) = 3$,

$f(x) - g'(4-x) = 3$ 可得 $f(2-x) - g'(2+x) = 3$,

两式相加可得 $f(2+x) + f(2-x) = 6$,

令 $x=1$, 即可得 $f(1) + f(3) = 6$, B 错;

又 $\because f(x) + g'(x) = 3$,

则 $f(x-4) + g'(x-4) = f(x-4) - g'(4-x) = 3$,

$f(x) - g'(4-x) = 3$, 可得 $f(x) = f(x-4)$,

所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数,

所以根据以上性质不能推出 $f(-1) = f(-3)$, A 不一定成立.

故选: D

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 下列命题正确的是 ()

A. 若 A, B 两组成对数据的样本相关系数分别为 $r_A = 0.97, r_B = -0.99$, 则 A 组数据比 B 组数据的相关性较强

B. 若样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的方差为 2, 则数据 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_6 - 1$ 的方差为 8

C. 已知互不相同的 30 个样本数据, 若去掉其中最大和最小的数据, 剩下 28 个数据的 22% 分位数不等于原样本数据的 22% 分位数

D. 某人解答 5 个问题, 答对题数为 X , 若 $X \sim B(5, 0.6)$, 则 $E(X) = 3$

9. 【答案】BCD

【解析】对于 A, 因为 $|r_A| = 0.97 < |r_B| = 0.99$, 即 A 组数据比 B 组数据的相关性较弱, 故 A 错误;

对于 B, 若样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 方差为 $s^2 = 2$, 则数据 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_6 - 1$ 的方差为 $s_1^2 = 2^2 s^2 = 8$, 故 B 正确;

对于 C, 将这原来的 30 个数从小大大排列为 $a_1, a_2, \dots, a_{30}$, 则 $30 \times 22\% = 6.6$, 所以原来的 22% 分位数为

$$\frac{a_6 + a_7}{2},$$

若去掉其中最大和最小的数据, 剩下 28 个数据为 $a_2, \dots, a_{29}$, 则 $28 \times 22\% = 6.16$, 所以剩下 28 个数据的

22%分位数为 $\frac{a_7 + a_8}{2}$,

由于 $a_1, a_2, \dots, a_{30}$ 互不相同, 所以 C 正确;

对于 D, 某人解答 5 个问题, 答对题数为 X , 若 $X \sim B(5, 0.6)$, 则 $E(X) = 5 \times 0.6 = 3$, 故 D 正确.

故选: BCD.

10. 已知定义域在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1)$ 是奇函数, 且 $f(-1+x) = f(-1-x)$, 当 $x \in [-1, 1]$,

$f(x) = x^2 - 1$, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(x)$ 的周期 $T = 4$

B. $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}$

C. $f(x)$ 在 $[-5, -4]$ 上单调递增

D. $f(x+2)$ 是偶函数

10. 【答案】BC

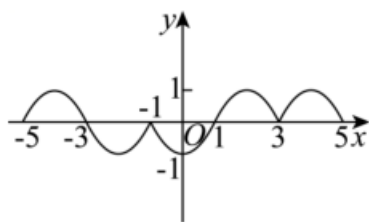
【解析】由于 $f(x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(x+1) = -f(-x+1)$, 则 $f(x) = -f(2-x)$

又 $f(-1+x) = f(-1-x)$, 则 $f(2-x) = f(x-4)$, 所以 $f(x) = -f(x-4) = -[-f(x-8)] = f(x-8)$,

所以 $f(x)$ 的周期为 8, A 错误, ,

$f\left(\frac{5}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] = \frac{3}{4}$, 故 B 正确,

根据函数的性质结合 $x \in [-1, 1]$, $f(x) = x^2 - 1$, 作出函数图象为:



由图象可知: $f(x)$ 在 $[-5, -4]$ 上单调递增, C 正确,

由于 $f(x)$ 的图象不关于 $x=2$ 对称, 所以 $f(x+2)$ 不是偶函数, D 错误

故选: BC

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n S_{n+1} + S_{n+1} = 3$, $a_1 = \alpha (0 < \alpha < 1)$, 则 ()

A. 当 $0 < \alpha < \frac{\sqrt{13}-1}{4}$ 时, $a_2 > a_1$

B. $a_3 > a_2$

C. 数列 $\{S_{2n-1}\}$ 单调递增, $\{S_{2n}\}$ 单调递减

D. 当 $\alpha = \frac{3}{4}$ 时, 恒有 $\sum_{k=1}^n |S_k - 1| < \frac{5}{4}$

11. 【答案】ACD

【解析】由题意可得: $S_{n+1} = \frac{3}{2S_n + 1}$, $a_1 = \alpha$,

由 $S_{n+1} = \frac{3}{2S_n + 1}$ 可知: $S_{n+1} = 1 \Leftrightarrow S_n = 1$, 但 $S_1 = \alpha \in (0, 1)$,

可知对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $S_n \neq 1$,

对于选项 A: 若 $0 < \alpha < \frac{\sqrt{13}-1}{4}$,

则 $a_2 - a_1 = S_2 - 2a_1 = \frac{3}{2\alpha+1} - 2\alpha = \frac{3-2\alpha-4\alpha^2}{2\alpha+1} = \frac{(4\alpha+1+\sqrt{13})\left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}-\alpha\right)}{2\alpha+1} > 0$,

即 $a_2 > a_1$, 故 A 正确;

对于选项 B: $a_3 - a_2 = S_3 - 2S_2 + S_1 = \frac{6\alpha+3}{2\alpha+7} - \frac{6}{2\alpha+1} + \alpha = \frac{(\alpha-1)(4\alpha^2+32\alpha+39)}{(2\alpha+1)(2\alpha+7)} < 0$,

即 $a_3 < a_2$, 故 B 错误.

对于选项 C: 因为 $S_{n+1} - 1 = -\frac{2(S_n - 1)}{2S_n + 1}$, $S_{n+1} + \frac{3}{2} = \frac{3\left(S_n + \frac{3}{2}\right)}{2S_n + 1}$,

则 $\frac{S_{n+1}-1}{S_{n+1}+\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{S_n-1}{S_n+\frac{3}{2}}$, 且 $\frac{S_1-1}{S_1+\frac{3}{2}} = \frac{\alpha-1}{\alpha+\frac{3}{2}} < 0$,

可知 $\left\{\frac{S_n-1}{S_n+\frac{3}{2}}\right\}$ 是等比数列, 则 $\frac{S_n-1}{S_n+\frac{3}{2}} = \frac{\alpha-1}{\alpha+\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

设 $A = \frac{\alpha-1}{\alpha+\frac{3}{2}} < 0$, $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}$,

可得 $S_{2n} = \frac{3-3At}{3+2At} = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3+2At} - 1 \right)$, $S_{2n-1} = \frac{1+\frac{3}{2}At}{1-At} = \frac{5}{2(1-At)} - \frac{3}{2}$,

因为 $At = A\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}$ ，可知 $\left\{A\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}\right\}$ 为递增数列，

所以数列 $\{S_{2n-1}\}$ 单调递增， $\{S_{2n}\}$ 单调递减，故 C 正确；

对于选项 D：因为 $S_{n+1} = \frac{3}{2S_n+1}$ ， $S_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2S_n+1} - \frac{3}{4} = \frac{3(3-2S_n)}{4(2S_n+1)}$ ，

由 $S_1 = \alpha = \frac{3}{4}$ ，可得 $S_2 - \frac{3}{4} > 0$ ，即 $S_2 > \frac{3}{4}$ ，则 $S_2 \leq \frac{6}{5}$ ，即 $\frac{3}{4} < S_2 \leq \frac{6}{5}$ ；

由 $\frac{3}{4} < S_2 \leq \frac{6}{5}$ ，可得 $S_3 - \frac{3}{4} > 0$ ，即 $S_3 > \frac{3}{4}$ ，则 $S_3 < \frac{6}{5}$ ，即 $\frac{3}{4} < S_3 < \frac{6}{5}$ ；

以此类推，可得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ，都有 $S_n \geq S_1 = \alpha = \frac{3}{4}$ ，

又因为 $\left|\frac{S_{n+1}-1}{S_n-1}\right| = \frac{2}{2S_n+1}$ ，则 $|S_{n+1}-1| \leq \frac{2}{2\alpha+1}|S_n-1| = \frac{4}{5}|S_n-1|$ ，

所以 $\sum_{k=1}^n |S_k-1| \leq \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right] < \frac{5}{4}$ ，故 D 正确。

故选：ACD。

第二部分（非选择题 共 92 分）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知向量 $\vec{a} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ， $\vec{b}$ 为单位向量，且满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b} - 2\vec{a}|$ ，则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向的投影向量为

12. 【答案】 $\left(\frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right)$

【解析】因为 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}|$ ，所以 $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b}^2$ ，

又 $\vec{a} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ， $\vec{b}$ 为单位向量，则 $|\vec{a}| = 1$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ，

所以向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向的投影向量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{2}\vec{a} = \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right)$ 。

故答案为： $\left(\frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right)$

13. 若函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{5}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ 内没有零点, 则正数 ω 的取值范围是_____.

13. 【答案】 $\left(0, \frac{3}{5}\right]$

【解析】由 $\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{5}\right) = 0, \omega > 0$, 可得 $\omega x + \frac{\pi}{5} = k\pi$, 即 $x = \frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{5\omega}, k \in \mathbb{Z}$,

令 $\frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{5\omega} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, 则 $\frac{\omega}{3} + \frac{1}{5} < k < \frac{4\omega}{3} + \frac{1}{5}$

又 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ 内没有零点,

则区间 $\left(\frac{\omega}{3} + \frac{1}{5}, \frac{4\omega}{3} + \frac{1}{5}\right)$ 内不存在整数,

又 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$, 则正数 ω 满足 $0 < \omega \leq 1$,

则 $\left(\frac{\omega}{3} + \frac{1}{5}, \frac{4\omega}{3} + \frac{1}{5}\right) \subseteq (0, 1)$, 则 $\frac{4\omega}{3} + \frac{1}{5} \leq 1$, 解之得 $\omega \leq \frac{3}{5}$,

则正数 ω 的取值范围是 $\left(0, \frac{3}{5}\right]$.

故答案为: $\left(0, \frac{3}{5}\right]$

14. 函数 $f(x) = 2x - \frac{2}{x} + \ln x$, 若 $f(m) + f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$, 则 $3m + \frac{1}{n^2}$ 的最小值为_____.

14. 【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】因为 $f(x) = 2x - \frac{2}{x} + \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f'(x) = 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 2 + x}{x^2} = \frac{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}}{x^2} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x} - \frac{2}{\frac{1}{x}} + \ln \frac{1}{x} = \frac{2}{x} - 2x - \ln x, \text{ 所以 } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

$$\text{又 } f(m) + f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0, \text{ } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 为增函数, 所以 } m \cdot \frac{1}{n^2} = 1, \text{ 即 } \frac{m}{n^2} = 1,$$

$$\text{因为 } m > 0, \frac{1}{n^2} > 0, \quad 3m + \frac{1}{n^2} = 3m + \frac{1}{m} \geq 2\sqrt{3m \cdot \frac{1}{m}} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{当且仅当 } 3m = \frac{1}{m}, \text{ 即 } m = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\text{所以 } 3m + \frac{1}{n^2} \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{3}.$$

故答案为: $2\sqrt{3}$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 满足 $\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} = 3\cos C$, 且 $a, \frac{\sqrt{30}}{5}c, b$ 成等比数列.

(1) 求 $\cos C$;

(2) 若 $A > B$, 求 $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$.

【解析】(1) 由正弦定理及 $\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} = 3\cos C$, 得 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3\cos C$, (2 分)

$$\text{即 } a^2 + b^2 = 3ab\cos C, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{由余弦定理得 } a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos C,$$

$$\text{所以 } c^2 = ab\cos C, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } a, \frac{\sqrt{30}}{5}c, b \text{ 成等比数列, 所以 } \frac{6}{5}c^2 = ab, \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{5}{6}. \quad (7 \text{ 分})$$

(2) 因为 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3\cos C = \frac{5}{2}$, 整理得 $(a-2b)\left(a-\frac{1}{2}b\right) = 0$, (8分)

因为 $A > B$, 所以 $a > b$, 所以 $a = 2b$, (10分)

代入 $\frac{6}{5}c^2 = ab$ 得 $\frac{b^2}{c^2} = \frac{3}{5}$, (12分)

则根据正弦定理有 $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{3}{5}$. (13分)

16. (15分)

已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的渐近线在第一象限的交点为 Q ,

且 Q 点的横坐标为 6.

(1) 求抛物线 E 的方程;

(2) 过点 $M(-3, 0)$ 的直线 l 与抛物线 E 相交于 A, B 两点, B 关于 x 轴的对称点为 B' , 证明: 直线 AB' 必过定点.

【解析】(1) 设点 Q 的坐标为 $(6, y_0)$, 因为点 Q 在第一象限, 所以 $y_0 > 0$, (1分)

双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$, (2分)

因为点 Q 在双曲线的渐近线上, 所以 $y_0 = 4\sqrt{3}$, (3分)

所以点 Q 的坐标为 $(6, 4\sqrt{3})$, (4分)

又点 $Q(6, 4\sqrt{3})$ 在抛物线 $y^2 = 2px$ 上, 所以 $48 = 2p \times 6$, 所以 $p = 4$, (5分)

故抛物线的标准方程为: $y^2 = 8x$; (6分)

(2) 设直线 AB 的方程为 $x = my - 3$, 联立 $y^2 = 8x$, 消 x 得, $y^2 - 8my + 24 = 0$, (8分)

方程 $y^2 - 8my + 24 = 0$ 的判别式 $\Delta = 64m^2 - 96 > 0$, 即 $2m^2 - 3 > 0$, (9分)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 8m, y_1 y_2 = 24$, (10分)

设 B 关于 x 轴的对称点为 $B'(x_2, -y_2)$, (11分)

则直线 AB' 的方程为 $y + y_2 = \frac{-y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$, (12分)

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/007123152032010056>