第4章 图像几何变换

杨淑莹

本章目录

基础知识介绍--图像几何变换

设变换矩阵 *T* 为

$$T=\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$$

则上述变换可以用公式表示为

$$\begin{bmatrix} Hx'_1 & Hx'_2 & \cdots & Hx'_n \\ Hy'_1 & Hy'_2 & \cdots & Hy'_n \\ H & H & \cdots & H \end{bmatrix}_{3\times n} = T \times \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{3\times n}$$

基础知识介绍--常用的几何变换

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & \Delta x\\ 0 & 1 & \Delta y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad S=\begin{bmatrix}S_x & 0 & 0\\ 0 & S_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad R=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

平移变换　　放缩变换　　旋转变换

基础知识介绍——平移变换矩阵

将2×3阶变换矩阵T进一步扩充为3×3方阵

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & \Delta x\\ 0 & 1 & \Delta y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

这样一来，平移变换可以用如下形式表示：

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \Delta x\\ 0 & 1 & \Delta y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ 1\end{bmatrix}$$

天津理工大学

平移变换的表示法

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$P = T \cdot P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + \Delta y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

变换后的点集矩阵=变换矩阵 *T*× 变换前的点集矩阵

平移变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

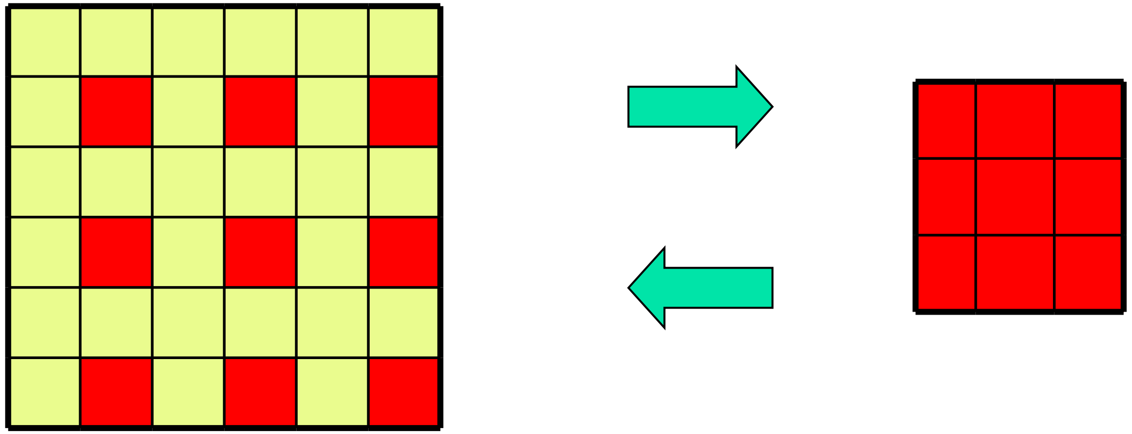
注意：平移后的景物与原图像相同，但“画布”一定是扩大了。否则就会丢失信息。

比例缩放变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fx & 0 & 0 \\ 0 & fy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

图像的缩小一般分为按比例缩小和不按比例缩小两种。不按比例缩小一定会带来几何畸变。

比例缩放变换



缩小后，信息量小，所以画布可相应缩小。

放大将原图像的一个像素添到新图像的一个k1*k2的子块中去。

应用

水平镜像

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & fWidth \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

垂直镜像

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & fHeight \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

旋转变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

图像旋转之后，会出现许多的空白点，对这些空白点必须进行**填充**处理，否则画面效果不好，称这种操作为插值处理。

旋转变换

最简单的方法是行插值或是列插值：

1) 插值的方法是：空点的像素值等于前一点的像素值。

2) 同样的操作重复到所有行。

复合变换

对给定的图像连续施行若干次如前所述的平移、镜像、比例、旋转等基本变换F_1，F_2，…，F_N后，所完成的变换。

复合变换的矩阵等于基本变换的矩阵按顺序依次相乘得到的组合矩阵，又叫级联变换。

$$T = T_N T_{N-1} \cdots T_1。$$

若干次基本变换仍可用3×3阶表示。

复合平移

$$T = T_1 T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

复合比例

$$T = T_1 T_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

复合旋转

$$T = T_1 T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

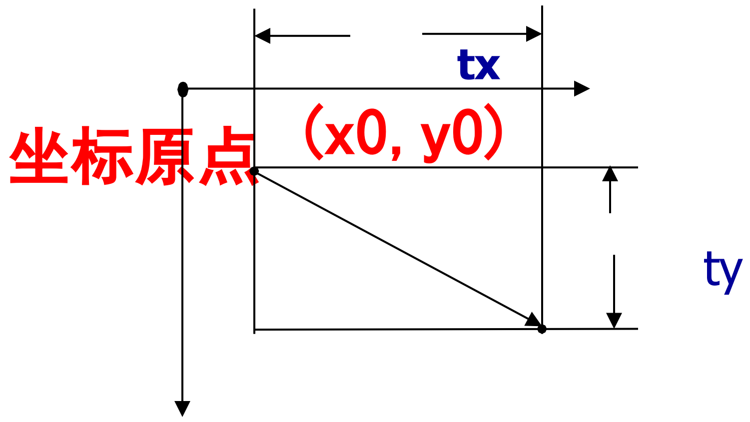
$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基础知识介绍—— 图像的平移

图像中所有的点都按照指定的平移量水平、垂直移动。设初始坐标为（x0, y0）的点经过平移（tx. ty）后，则点(x0, y0)坐标变为(x1, y1）。

$$P = T \cdot P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + \Delta y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

基础知识介绍--图像平移变换



（x0, y0）和（x1, y1）的关系：

$$\begin{cases} x1 = x0 + tx \\ y1 = y0 + ty \end{cases}$$

图像的镜像变换

水平镜像：垂直中轴线为中心，将图像分为左右两部分；

垂直镜像：水平中轴线为中心，将图像分为上下两部分。

镜像变换后图的高和宽都不变。

图像水平镜像变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & fWidth \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x1=Width-x0 \\ y1=y0 \end{cases}$$

图像垂直镜像变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & fHeight \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x1=x0 \\ y1=Height-y0 \end{cases}$$

效果对比图