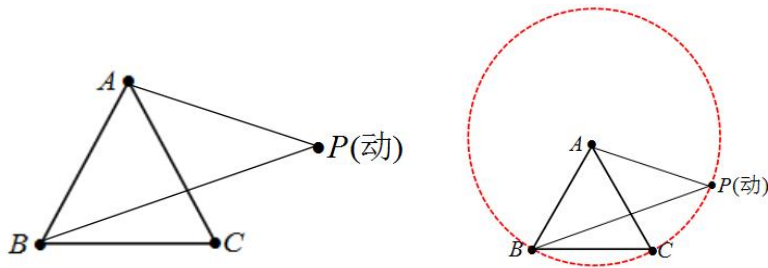


2024 中考数学常见几何模型归纳总结—圆中的重要模型之隐圆模型

隐圆是各地中考选择题和填空题、甚至解答题中常考题，题目常以动态问题出现，有点、线的运动，或者图形的折叠、旋转等，大部分学生拿到题基本没有思路，更谈不上如何解答。隐圆常见形式：动点定长、定弦对直角、定弦对定角、四点共圆等，上述四种动态问题的轨迹是圆。题目具体表现为折叠问题、旋转问题、角度不变问题等，此类问题综合性强，隐蔽性强，很容易造成同学们的丢分。本专题就隐圆模型的相关问题进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

模型 1、动点定长模型（圆的定义）

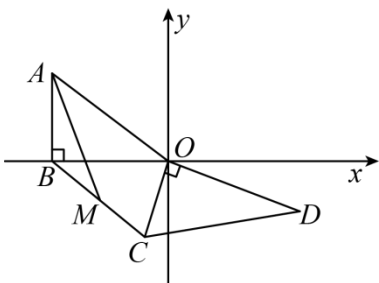
若 P 为动点，且 $AB=AC=AP$ ，则 B 、 C 、 P 三点共圆， A 圆心， AB 半径



圆的定义：平面内到定点的距离等于定值的所有点构成的集合。

寻找隐圆技巧：若动点到平面内某定点的距离始终为定值，则其轨迹是圆或圆弧。

例 1.（2023·山东泰安·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中， $\text{Rt}\triangle AOB$ 的一条直角边 OB 在 x 轴上，点 A 的坐标为 $(-6,4)$ ； $\text{Rt}\triangle COD$ 中， $\angle COD = 90^\circ$ ， $OD = 4\sqrt{3}$ ， $\angle D = 30^\circ$ ，连接 BC ，点 M 是 BC 中点，连接 AM 。将 $\text{Rt}\triangle COD$ 以点 O 为旋转中心按顺时针方向旋转，在旋转过程中，线段 AM 的最小值是（ ）



A. 3

B. $6\sqrt{2}-4$

C. $2\sqrt{13}-2$

D. 2

【答案】A

【分析】如图所示，延长 BA 到 E ，使得 $AE = AB$ ，连接 OE ， CE ，根据点 A 的坐标为 $(-6, 4)$ 得到 $BE = 8$ ，再证明 AM 是 $\triangle BCE$ 的中位线，得到 $AM = \frac{1}{2}CE$ ；解 $\text{Rt}\triangle COD$ 得到 $OC = 4$ ，进一步求出点 C 在以 O 为圆心，半径为 4 的圆上运动，则当点 M 在线段 OE 上时， CE 有最小值，即此时 AM 有最小值，据此求出 CE 的最小值，即可得到答案。

【详解】解：如图所示，延长 BA 到 E ，使得 $AE = AB$ ，连接 OE ， CE ，

$\because \text{Rt}\triangle AOB$ 的一条直角边 OB 在 x 轴上，点 A 的坐标为 $(-6, 4)$ ，

$\therefore AB = 4$ ， $OB = 6$ ， $\therefore AE = AB = 4$ ， $\therefore BE = 8$ ，

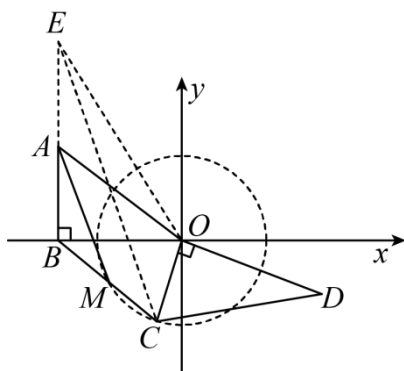
$\because$ 点 M 为 BC 中点，点 A 为 BE 中点， $\therefore AM$ 是 $\triangle BCE$ 的中位线， $\therefore AM = \frac{1}{2}CE$ ；

在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中， $\angle COD = 90^\circ$ ， $OD = 4\sqrt{3}$ ， $\angle D = 30^\circ$ ， $\therefore OC = \frac{\sqrt{3}}{3}OD = 4$ ，

$\therefore$ 将 $\text{Rt}\triangle COD$ 以点 O 为旋转中心按顺时针方向旋转， $\therefore$ 点 C 在以 O 为圆心，半径为 4 的圆上运动，

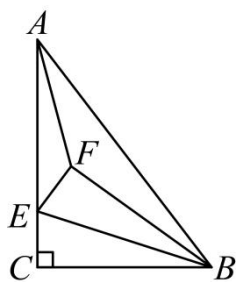
$\therefore$ 当点 M 在线段 OE 上时， CE 有最小值，即此时 AM 有最小值，

$\because OE = \sqrt{BE^2 + OB^2} = 10$ ， $\therefore CE$ 的最小值为 $10 - 4 = 6$ ， $\therefore AM$ 的最小值为 3，故选 A。



【点睛】本题主要考查了一点到圆上一点的最值问题，勾股定理，三角形中位线定理，坐标与图形，含 30° 度角的直角三角形的性质等等，正确作出辅助线是解题的关键。

例 2. (2023·广东清远·统考三模) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， E 为 AC 边上的任意一点，把 $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠，得到 $\triangle BFE$ ，连接 AF 。若 $BC = 6$ ， $AC = 8$ ，则 AF 的最小值为 ____。



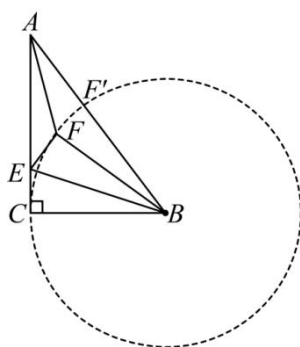
【答案】4

【分析】本题考查翻折变换，最短路线问题，勾股定理，先确定点 F 的运动路线，并确定 AF 最小时点 F 所在位置 F' ，再求出 AF' 的长度即可．确定点 F 的运动路线是解题的关键．

【详解】解：∵ $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠，得到 $\triangle BFE$ ，∴ $BF = BC = 6$ ，

∴ 点 F 在以 B 为圆心 6 为半径的圆上，设以 B 为圆心 6 为半径的圆与 AB 交于点 F' ，

则 $BF' = BC = 6$ ， AF 的最小值为 AF' 的长；

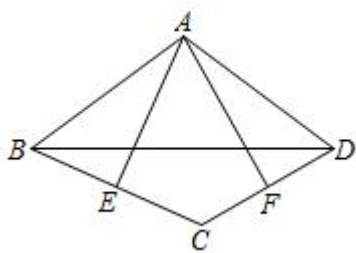


在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，∵ $BC = 6$ ， $AC = 8$ ，∴ $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，

∴ $AF' = AB - BF' = 10 - 6 = 4$ ，∴ AF 的最小值为 4，故答案为：4.

例 3. (2022·北京市·九年级专题练习) 如图，四边形 $ABCD$ 中， AE 、 AF 分别是 BC ， CD 的中垂线， $\angle EAF = 80^\circ$ ，

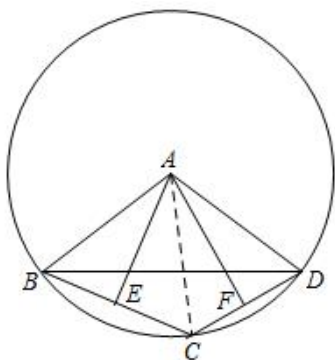
$\angle CBD = 30^\circ$ ，则 $\angle ABC = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\angle ADC = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 40° ; 60°

【分析】连接 AC ，根据线段垂直平分线的性质可得 $AB = AC = AD$ ，从而得到 B 、 C 、 D 在以 A 为圆心， AB 为半径的圆上，根据圆周角定理可得 $\angle DAC = 2\angle DBC = 60^\circ$ ，再由等腰三角形的性质可得，即可求解。

【详解】解：连接 AC ， $\angle DAF = \angle CAF = 30^\circ$



$\because AE$ 、 AF 分别是 BC 、 CD 的中垂线， $\therefore AB = AC = AD$ ，

$\therefore B$ 、 C 、 D 在以 A 为圆心， AB 为半径的圆上， $\because \angle CBD = 30^\circ$ ， $\therefore \angle DAC = 2\angle DBC = 60^\circ$ ，

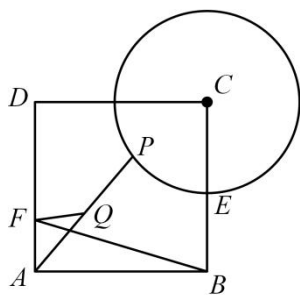
$\because AF \perp CD$ ， $CF = DF$ ， $\therefore \angle DAF = \angle CAF = 30^\circ$ ， $\therefore \angle ADC = 60^\circ$ ，

$\because AB = AC$ ， $BE = CE$ ， $\therefore \angle BAE = \angle CAE$ ，

又 $\because \angle EAC = \angle EAF - \angle CAF = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$ ， $\therefore \angle ABC = \angle ACE = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ 。故答案为： 40° ， 60° 。

【点睛】本题主要考查了圆周角定理，线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，根据题意得到 B 、 C 、 D 在以 A 为圆心， AB 为半径的圆上是解题的关键。

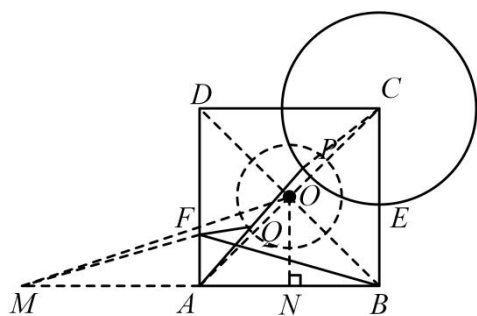
例 4. (2023 上·江苏无锡·九年级校联考期中) 如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， E 是 BC 的中点。以点 C 为圆心， CE 长为半径画圆，点 P 是 $\odot C$ 上一动点，点 F 是边 AD 上一动点，连接 AP ，若点 Q 是 AP 的中点，连接 BF ， FQ ，则 $BF + FQ$ 的最小值为_____。



【答案】 $3\sqrt{10} - \frac{3}{2}$

【分析】取点 B 关于直线 AD 的对称点 M ，连接 BD 、 AC 两线交于点 O ，连接 OQ ， CP ， MO ，过 O 作 $ON \perp AB$ 于点 N ，则 $OQ = \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$ ，所以点 Q 在以 O 为圆心， $\frac{3}{2}$ 为半径的 $\odot O$ 上运动，求出 $ON = AN = BN = \frac{1}{2}AB = 3$ ，则 $MN = 6 + 3 = 9$ ，由勾股定理得 $OM = \sqrt{MN^2 + ON^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$ ，由 $BF + FQ + OQ = MF + FQ + OQ \geq OM$ ，所以当 M 、 F 、 Q 、 O 四点共线时，
 $BF + FQ + OQ = MF + FQ + OQ = OM = 3\sqrt{10}$ 的值最小，所以 $BF + FQ$ 的最小值为
 $BF + FQ = OM - OQ = 3\sqrt{10} - \frac{3}{2}$ 。

【详解】解：取点 B 关于直线 AD 的对称点 M ，连接 BD 、 AC 两线交于点 O ，连接 OQ ， CP ， MO ，过 O 作 $ON \perp AB$ 于点 N ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， E 是 BC 的中点， $\therefore CE = \frac{1}{2}BC = 3$ ，

$\because$ 点 Q 是 AP 的中点，点 O 是 AC 的中点， $\therefore OQ = \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}CE = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 点 Q 在以 O 为圆心， $\frac{3}{2}$ 为半径的 $\odot O$ 上运动，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $\therefore AC \perp BD$ ， $OA = OB$ ， $\therefore ON = AN = BN = \frac{1}{2}AB = 3$ ，

$\because AM = AB = 6$ ， $\therefore MN = 6 + 3 = 9$ ， $\therefore OM = \sqrt{MN^2 + ON^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$ ， $\therefore BF + FQ + OQ = MF + FQ + OQ \geq OM$ ，

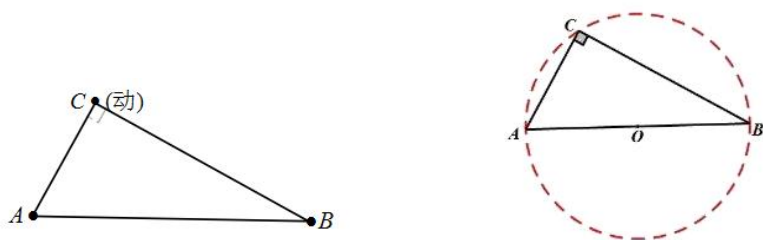
∴ 当 M 、 F 、 Q 、 O 四点共线时， $BF + FQ + OQ = MF + FQ + OQ = OM = 3\sqrt{10}$ 的值最小，

∴ $BF + FQ$ 的最小值为 $BF + FQ = OM - OQ = 3\sqrt{10} - \frac{3}{2}$ 。故答案为： $3\sqrt{10} - \frac{3}{2}$ 。

【点睛】本题考查圆的有关性质的应用，正方形的性质，两点之间线段最短公理的应用，勾股定理，解题的关键是正确确定点 Q 的运动路径。

模型 2、定边对直角模型（直角对直径）

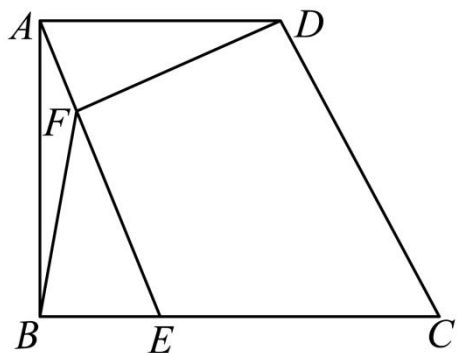
固定线段 AB 所对动角 $\angle C$ 恒为 90° ，则 A 、 B 、 C 三点共圆， AB 为直径



寻找隐圆技巧：一条定边所对的角始终为直角，则直角顶点轨迹是以定边为直径的圆或圆弧。

例 1.（2023·山东·统考中考真题）如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $AD = 4$ ， $AD < BC$ ，

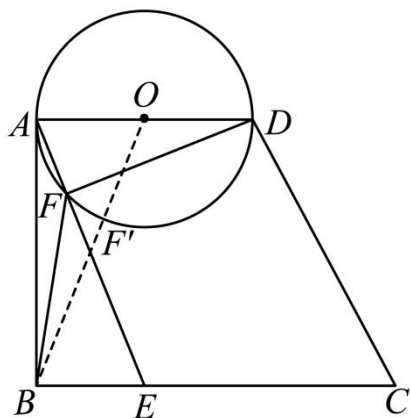
点 E 在线段 BC 上运动，点 F 在线段 AE 上， $\angle ADF = \angle BAE$ ，则线段 BF 的最小值为_____。



【答案】 $\sqrt{29} - 2$ 或 $-2 + \sqrt{29}$

【分析】设 AD 的中点为 O ，以 AD 为直径画圆，连接 OB ，设 OB 与 $\odot O$ 的交点为点 F' ，证明 $\angle DFA = 90^\circ$ ，可知点 F 在以 AD 为直径的半圆上运动，当点 F 运动到 OB 与 $\odot O$ 的交点 F' 时，线段 BF 有最小值，据此求解即可。

【详解】解：设 AD 的中点为 O ，以 AD 为直径画圆，连接 OB ，设 OB 与 $\odot O$ 的交点为点 F' ，



$\because \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ， $\therefore AD \parallel BC$ ， $\therefore \angle DAE = \angle AEB$ ，

$\because \angle ADF = \angle BAE$ ， $\therefore \angle DFA = \angle ABE = 90^\circ$ ， $\therefore$ 点 F 在以 AD 为直径的半圆上运动，

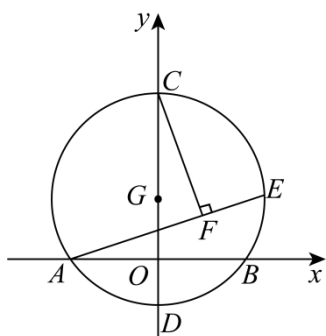
$\therefore$ 当点 F 运动到 OB 与 $\odot O$ 的交点 F' 时，线段 BF 有最小值，

$\because AD = 4$ ， $\therefore AO = OF' = \frac{1}{2}AD = 2$ ， $\therefore BO = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ ，

BF 的最小值为 $\sqrt{29} - 2$ ，故答案为： $\sqrt{29} - 2$ 。

【点睛】本题考查了平行线的性质，圆周角定理的推论，勾股定理等知识，根据题意分析得到点 F 的运动轨迹是解题的关键。

例 2. (2023 上·江苏苏州·九年级校考阶段练习) 如图，以 $G(0,1)$ 为圆心，半径为 2 的圆与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于 C, D 两点，点 E 为 $\odot G$ 上一动点，作 $CF \perp AE$ 于点 F 。当点 E 从点 B 出发，顺时针旋转到点 D 时，点 F 所经过的路径长为 ()



A. $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

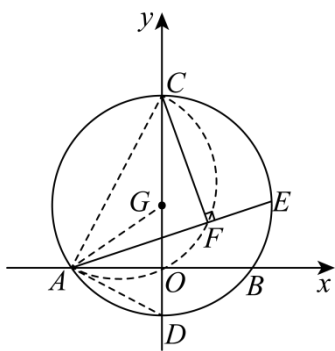
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

【答案】B

【分析】连接 AC ， AG ， AD ，先由圆周角定理得到点 F 的运动轨迹是以 AC 为直径的圆上，且点 O 在圆上，进而得到当点 E 从点 B 出发，顺时针旋转到点 D 时，点 F 所经过的路径长为 $\widehat{OA}$ 的长；根据勾股定理和锐角三角函数求得 $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 2\sqrt{3}$ ， $\angle ACO = 30^\circ$ ，则 $\widehat{OA}$ 所对的圆心角的度数为 60° ，利用弧长公式求得 $\widehat{OA}$ 的长即可求解。

【详解】解：连接 AC ， AG ， AD ，



$\because CF \perp AE$ ， $\therefore \angle AFC = \angle AOC = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 点 F 的运动轨迹是以 AC 为直径的圆上，且点 O 在圆上，当点 E 在点 B 处时， $CO \perp AE$ ，点 F 与 O 重合；

当点 E 在点 D 处时， $\because$ 以 $G(0,1)$ 为圆心，半径为 2 的圆与 x 轴交于 A ， B 两点，与 y 轴交于 C ， D 两点，

$\therefore \angle CAD = 90^\circ$ 即 $CA \perp AE$ ，点 F 与 A 重合，

$\therefore$ 当点 E 从点 B 出发，顺时针旋转到点 D 时，点 F 所经过的路径长为 $\widehat{OA}$ 的长；

$\because GO \perp AB$ ， $G(0,1)$ ， $AG = 2$ ， $\therefore OA = \sqrt{AG^2 - OG^2} = \sqrt{3}$ ，

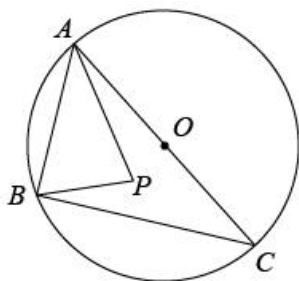
$\because OC = OG + CG = 1 + 2 = 3$ ， $\therefore \tan \angle ACO = \frac{OA}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore \angle ACO = 30^\circ$ ，则 $\widehat{OA}$ 所对的圆心角的度数为 60° ，

$\therefore \widehat{OA}$ 的长为 $\frac{60\pi \times \sqrt{3}}{180} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ，即点 F 所经过的路径长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ，故选：B.

【点睛】本题考查圆周角定理、解直角三角形、弧长公式、坐标与图形等知识，正确得到点 F 的运动轨迹以及点 F 所经过的路径长为 $\widehat{OA}$ 的长是解答的关键。

例3. (2022·内蒙古·中考真题) 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AC 为直径, 若 $AB=2\sqrt{3}$, $BC=3$, 点 P 从 B 点出发, 在 $\triangle ABC$ 内运动且始终保持 $\angle CBP = \angle BAP$, 当 C, P 两点距离最小时, 动点 P 的运动路径长为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

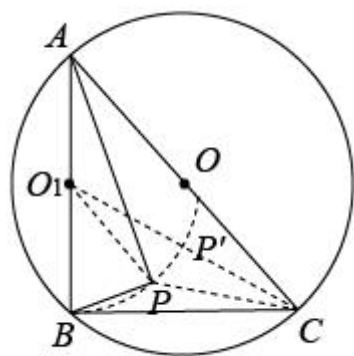
【分析】 根据题中的条件可先确定点 P 的运动轨迹, 然后根据三角形三边关系确定 CP 的长最小时点 P 的位置, 进而求出点 P 的运动路径长.

【详解】 解: $\because AC$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ABC = 90^\circ \therefore \angle ABP + \angle PBC = 90^\circ$.

$\because \angle PAB = \angle PBC, \therefore \angle PAB + \angle ABP = 90^\circ \therefore \angle APB = 90^\circ$.

$\therefore$ 点 P 在以 AB 为直径的圆上运动, 且在 $\triangle ABC$ 的内部,

如图, 记以 AB 为直径的圆的圆心为 O_1 , 连接 O_1C 交 $\odot O_1$ 于点 P' , 连接 O_1P, CP .



$\because CP \geq O_1C - O_1P, \therefore$ 当点 O_1, P, C 三点共线时, 即点 P 在点 P' 处时, CP 有最小值,

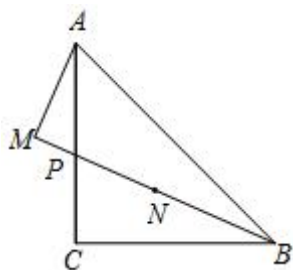
$\because AB=2\sqrt{3} \therefore O_1B=\sqrt{3}$ 在 $Rt\triangle BCO_1$ 中, $\tan \angle BO_1C = \frac{BC}{O_1B} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

$\therefore \angle BO_1C = 60^\circ \therefore \overset{\frown}{BP'} = \frac{60\pi \times \sqrt{3}}{180} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi. \therefore C, P$ 两点距离最小时, 点 P 的运动路径长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

【点睛】 本题主要考查了直径所对圆周角是直角, 弧长公式, 由锐角正切值求角度, 确定点 P 的路径是解

答本题的关键.

例 4. (2023·广东·九年级课时练习) 如图, $\triangle ACB$ 中, $CA=CB=4$, $\angle ACB=90^\circ$, 点 P 为 CA 上的动点, 连 BP , 过点 A 作 $AM \perp BP$ 于 M . 当点 P 从点 C 运动到点 A 时, 线段 BM 的中点 N 运动的路径长为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ B. $\sqrt{2}\pi$ C. $\sqrt{3}\pi$ D. 2π

【答案】A

【详解】解: 设 AB 的中点为 Q , 连接 NQ , 如图所示:

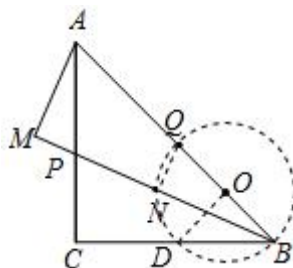
$\because N$ 为 BM 的中点, Q 为 AB 的中点, $\therefore NQ$ 为 $\triangle BAM$ 的中位线,

$\because AM \perp BP$, $\therefore QN \perp BN$, $\therefore \angle QNB = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 N 的路径是以 QB 的中点 O 为圆心, $\frac{1}{4}AB$ 长为半径的圆交 CB 于 D 的 $\widehat{QD}$,

$\because CA=CB=4$, $\angle ACB=90^\circ$, $\therefore AB=\sqrt{2}CA=4\sqrt{2}$, $\angle QBD=45^\circ$, $\therefore \angle DOQ=90^\circ$,

$\therefore \widehat{QD}$ 为 $\odot O$ 的 $\frac{1}{4}$ 周长, $\therefore$ 线段 BM 的中点 N 运动的路径长为: $\frac{90\pi \times \frac{1}{4} \times 4\sqrt{2}}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$, 故选: A.



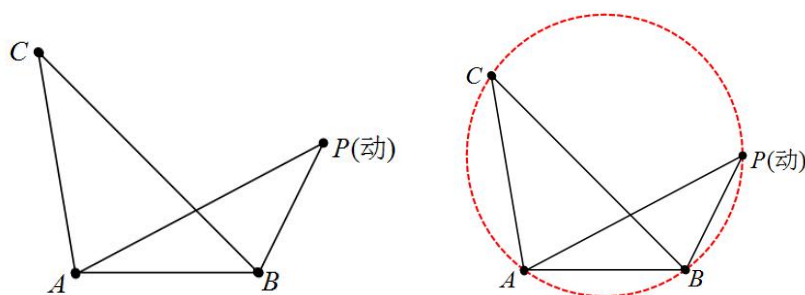
在 $\triangle APC$ 中, $\because$ 点 M 、 F 为 PC 、 AC 的中点, $\therefore MF \parallel AP$, $MF = \frac{1}{2}AP$,

$\therefore ME \perp MF$, 即 $\angle EMF = 90^\circ$, $\therefore$ 点 M 在以 EF 为直径的半圆上,

$\therefore EF = \frac{1}{2}AB = 10$ ， $\therefore$ 点 M 的运动路径长为 $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 5 = 5\pi$ ，故答案为： 5π 。

模型 3、定边对定角模型（定弦定角模型）

固定线段 AB 所对同侧动角 $\angle P = \angle C$ ，则 A 、 B 、 C 、 P 四点共圆

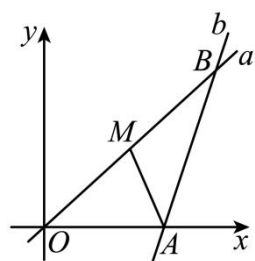


根据圆周角定理：同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角都相。

寻找隐圆技巧： AB 为定值， $\angle P$ 为定角，则 P 点轨迹是一个圆。

1. (2023·四川自贡·统考中考真题) 如图，分别经过原点 O 和点 $A(4,0)$ 的动直线 a ， b 夹角 $\angle OBA = 30^\circ$ ，点

M 是 OB 中点，连接 AM ，则 $\sin \angle OAM$ 的最大值是 ()



- A. $\frac{3+\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

【答案】A

【分析】根据已知条件， $\angle OBA = 30^\circ$ ，得出 B 的轨迹是圆，取点 $D(8,0)$ ，则 AM 是 $\triangle OBD$ 的中位线，则求得 $\angle ODB$ 的正弦的最大值即可求解，当 BD 与 $\odot C$ 相切时， $\angle ODB$ 最大，则正弦值最大，据此即可求解。

【详解】解：如图所示，以 OA 为边向上作等边 $\triangle OAC$ ，过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E ，则 $OC = OA = AC = 4$ ，则 C 的横坐标为 2，纵坐标为 $CE = OC \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ ， $\therefore C(2, 2\sqrt{3})$ ，

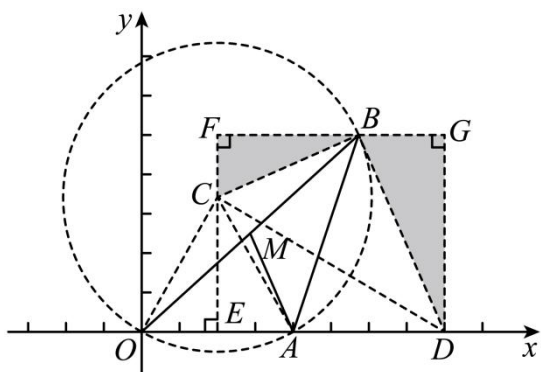
取点 $D(8,0)$ ，则 AM 是 $\triangle OBD$ 的中位线， $\therefore CD = \sqrt{(8-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$ ，

$\because \angle OBA = 30^\circ$, $\therefore$ 点 B 在半径为 4 的 $\odot C$ 上运动, $\because AM$ 是 $\triangle OBD$ 的中位线, $\therefore AM \parallel BD$,

$\therefore \angle OAM = \angle ODB$, 当 BD 与 $\odot C$ 相切时, $\angle ODB$ 最大, 则正弦值最大,

在 $Rt\triangle BCD$ 中, $BD = \sqrt{CD^2 - BC^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4^2} = 4\sqrt{2}$,

过点 B 作 $FB \parallel x$ 轴, 过点 C 作 $CF \perp FG$ 于点 F , 过点 D 作 $DG \perp FG$ 于点 G , 则 $\angle F = \angle G$



$\because BD$ 与 $\odot C$ 相切, $\therefore BD \perp CB$, $\therefore \angle FBC + \angle FCB = \angle FBC + \angle DBG = 90^\circ$,

$\therefore \angle FCB = \angle DBG$, $\therefore \triangle CFB \sim \triangle BGD$, $\therefore \frac{CF}{GB} = \frac{FB}{GD} = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

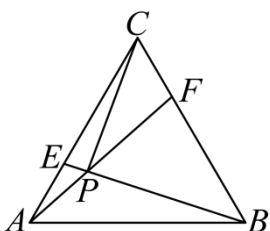
设 $CF = a$, $FB = b$, 则 $BG = \sqrt{2}a$, $DG = \sqrt{2}b$. $\therefore F(2, 2\sqrt{3} + a)$, $G(8, \sqrt{2}b)$. $\therefore FG = 8 - 2 = 6$, $DG = a + 2\sqrt{3}$

$\therefore \begin{cases} 2 + b + \sqrt{2}a = 8 \\ a + 2\sqrt{3} = \sqrt{2}b \end{cases}$ 解得: $b = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{6}$. $\therefore \sin \angle ODB = \sin \angle GBD = \frac{DG}{BD} = \frac{\sqrt{2}b}{4\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}$

$\therefore \sin \angle OAM$ 的最大值为 $\frac{3 + \sqrt{6}}{6}$, 故选: A.

【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定, 求正弦, 等边三角形的性质。圆周角定理, 得出点 B 的轨迹是解题的关键。

例 2. (2023·广东深圳·校考模拟预测) 如图, 在边长为 6 的等边 $\triangle ABC$ 中, 点 E 在边 AC 上自 A 向 C 运动, 点 F 在边 CB 上自 C 向 B 运动, 且运动速度相同, 连接 BE , AF 交于点 P , 连接 CP , 在运动过程中, 点 P 的运动路径长为 ()



A. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

B. $\frac{4\pi}{3}$

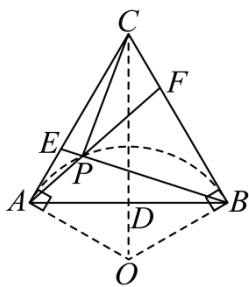
C. $3\sqrt{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】A

【分析】过点 A 作 $OA \perp AC$ 于 A ，作 $OB \perp BC$ 于 B ，连接 OC ，交 AB 于 D ，证明 $\text{Rt}\triangle ACO \cong \text{Rt}\triangle BCO$ (HL)，得 $OA = OB$ ，再证明 $\triangle ACF \cong \triangle BAE$ (SAS)，可得 $\angle APB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，确定点 P 的运动路径是以点 O 为圆心，以 OA 为半径的弧 AB ，再由弧长公式求解即可。

【详解】解：如图，过点 A 作 $OA \perp AC$ 于 A ，作 $OB \perp BC$ 于 B ，连接 OC ，交 AB 于 D ，



$\because \triangle ACB$ 是等边三角形， $\therefore AC = BC = AB$ ， $\angle ACB = \angle CAB = 60^\circ$ ， $\therefore \angle AOB = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ$ ，

$\because OC = OC$ ， $\therefore \text{Rt}\triangle ACO \cong \text{Rt}\triangle BCO$ (HL)， $\therefore OA = OB$ ， $\therefore OC$ 是 AB 的垂直平分线， $AD = BD = \frac{1}{2}AB = 3$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADO$ 中， $\angle DAO = 30^\circ$ ， $\therefore OD = AD \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3}$ ， $OA = 2OD = 2\sqrt{3}$ ，

$\because AE = CF$ ， $\therefore \triangle ACF \cong \triangle BAE$ (SAS)， $\therefore \angle CAF = \angle ABE$ ，

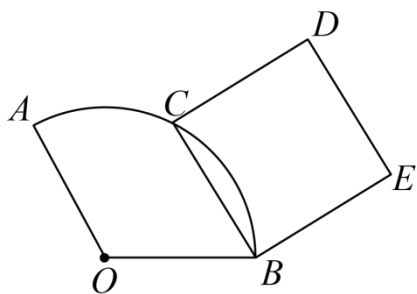
$\because \angle CAF + \angle BAP = 60^\circ$ ， $\therefore \angle ABE + \angle BAP = 60^\circ$ ， $\therefore \angle APB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，

$\therefore$ 点 P 的运动路径是以点 O 为圆心，以 OA 为半径的弧 AB ，

$\therefore$ 点 P 的运动路径长为 $\frac{120 \times \pi \times 2\sqrt{3}}{180} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ 。故选：A。

【点睛】本题考查了等边三角形的性质和判定，扇形的面积，动点 P 的运动轨迹等知识，确定点 P 的运动轨迹是解本题的关键。

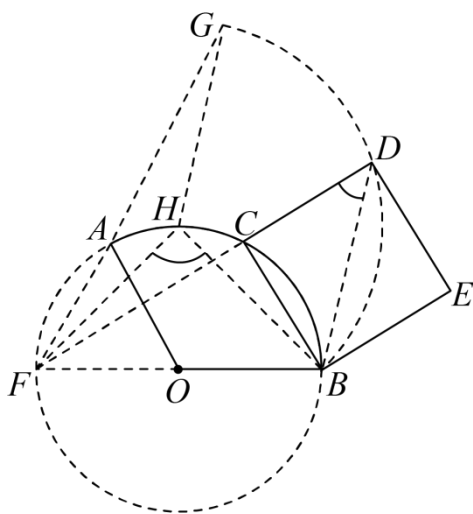
例 3. (2023·成都市·九年级专题练习) 如图所示，在扇形 AOB 中， $OA = 3$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ，点 C 是 $\widehat{AB}$ 上的动点，以 BC 为边作正方形 $BCDE$ ，当点 C 从点 A 移动至点 B 时，求点 D 经过的路径长。



【答案】点 D 经过的路径长为 $2\sqrt{2}\pi$.

【分析】如图，由此 BO 交 $\odot O$ 于 F ，取 $\widehat{BF}$ 的中点 H ，连接 FH 、 HB 、 BD 。易知 $\triangle FHB$ 是等腰直角三角形， $HF=HB$ ， $\angle FHB=90^\circ$ ，由 $\angle FDB=45^\circ=\frac{1}{2}\angle FHB$ ，推出点 D 在 $\odot H$ 上运动，轨迹是 $\widehat{GB}$ （图中红线），易知 $\angle HFG=\angle HGF=15^\circ$ ，推出 $\angle FHG=150^\circ$ ，推出 $\angle GHB=120^\circ$ ，易知 $HB=3\sqrt{2}$ ，利用弧长公式即可解决问题。

【详解】解：如图，由此 BO 交 $\odot O$ 于 F ，取 $\widehat{BF}$ 的中点 H ，连接 FH 、 HB 、 BD 。



易知 $\triangle FHB$ 是等腰直角三角形， $HF=HB$ ， $\angle FHB=90^\circ$ ，

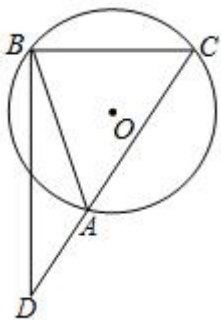
$\because \angle FDB=45^\circ=\frac{1}{2}\angle FHB$ ， $\therefore$ 点 D 在 $\odot H$ 上运动，轨迹是 $\widehat{GB}$ （图中红线），

易知 $\angle HFG=\angle HGF=15^\circ$ ， $\therefore \angle FHG=150^\circ$ ， $\therefore \angle GHB=120^\circ$ ，易知 $HB=3\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 点 D 的运动轨迹的长为 $\frac{120 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2}}{180} = 2\sqrt{2}\pi$ 。

【点睛】本题考查轨迹、弧长公式、圆的有关知识、正方形的性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，正确寻找点 D 的运动轨迹，属于中考填空题中的压轴题。

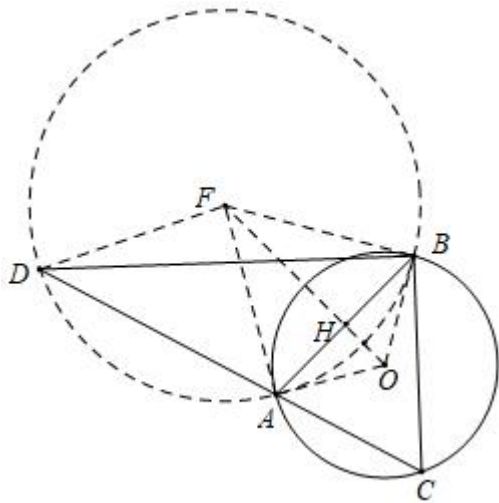
例 4. (2023 上·湖北武汉·九年级校考阶段练习) 如图, $\odot O$ 的半径为 2, 弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$, 点 C 是优弧 AB 上的一动点, $BD \perp BC$ 交直线 AC 于点 D , 当点 C 从 $\triangle ABC$ 面积最大时运动到 BC 最长时, 点 D 所经过的路径长为_____.



【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

【分析】如图, 以 AB 为边向上作等边三角形 $\triangle ABF$, 连接 OA, OB, OF, DF , OF 交 AB 于 H . 说明点 D 的运动轨迹是以 F 为圆心, FA 为半径的圆, 再利用弧长公式求解即可.

【详解】如图, 以 AB 为边向上作等边三角形 $\triangle ABF$, 连接 OA, OB, OF, DF , OF 交 AB 于 H .



$$\because FA=FB, OA=OB, \therefore OF \perp AB, AH=BH=\sqrt{3}, \therefore \sin \angle BOH = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle BOH = \angle AOH = 60^\circ, \therefore \angle AOB = 120^\circ \therefore \angle C = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ,$$

$$\because DB \perp BC, \therefore \angle DBC = 90^\circ, \therefore \angle CDB = 30^\circ,$$

$$\because \angle AFB = 60^\circ, \therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AFB, \therefore \text{点 } D \text{ 的运动轨迹是以 } F \text{ 为圆心, } FA \text{ 为半径的圆,}$$

$$\because \text{当点 } C \text{ 从 } \triangle ABC \text{ 面积最大时运动到 } BC \text{ 最长时, } BC \text{ 绕点 } B \text{ 顺时针旋转了 } 30^\circ,$$

$\therefore BD$ 绕点 B 也旋转了 30° , $\therefore$ 点 D 的轨迹所对的圆心角为 60° ,

$\therefore$ 运动路径的长 $= \frac{60\pi \times 2\sqrt{3}}{180} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$, 故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$.

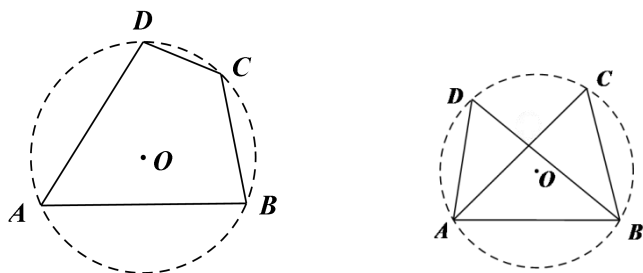
【点睛】本题考查轨迹, 垂径定理, 等边三角形的性质, 勾股定理, 锐角三角函数等知识, 解题的关键是学会用转化的思想思考问题, 属于中考填空题中的压轴题.

模型 4、四点共圆模型

四点共圆模型我们在上一专题中已经详细讲解了, 本专题就不在赘述了。在此就针对几类考查频率高的模型作相应练习即可。

1) 若平面上 A 、 B 、 C 、 D 四个点满足 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, 则 A 、 B 、 C 、 D 四点共圆。

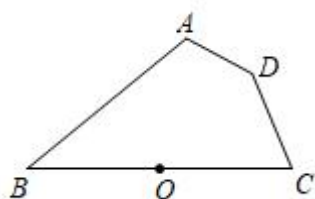
条件: 1) 四边形对角互补; 2) 四边形外角等于内对角。



2) 若平面上 A 、 B 、 C 、 D 四个点满足 $\angle ADB = \angle ACB$, 则 A 、 B 、 C 、 D 四点共圆。

条件: 线段同侧张角相等。

例 1. (2023·安徽阜阳·九年级校考期中) 如图, O 为线段 BC 的中点, 点 A , C , D 到点 O 的距离相等, 则 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的数量关系为 ()



- A. $\angle A = \angle C$ B. $\angle A = 2\angle C$ C. $\angle A - \angle C = 90^\circ$ D. $\angle A + \angle C = 180^\circ$

【答案】D

【分析】根据题意可得四边形为 $\odot O$ 的圆内接四边形，即可求解。

【详解】解： $\because O$ 为线段 BC 的中点，点 A, C, D 到点 O 的距离相等，

$\therefore$ 点 A, B, C, D 到点 O 的距离相等，

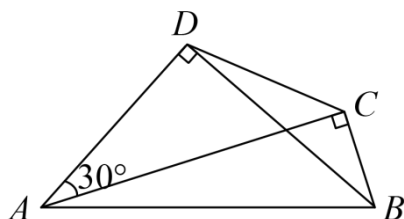
$\therefore$ 点 A, B, C, D 在以 O 为圆心的圆上，即四边形为 $\odot O$ 的圆内接四边形，

$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$ 。故选：D

【点睛】本题主要考查了圆内接四边形的性质，熟练掌握圆内接四边形的性质是解题的关键。

例2.（2023·山西临汾·九年级统考期末）如图在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$ ，若 $\angle DAC = 30^\circ$ ，则

$\frac{DC}{AB}$ 的值为（ ）



A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{1}{4}$

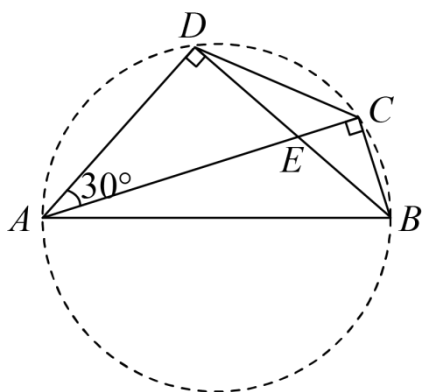
C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【分析】首先根据题意得到点 A, B, C, D 四点共圆，然后证明出 $\triangle CED \sim \triangle BEA$ ，进而得到 $\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{AE}$ ，然后利用 30° 直角三角形的性质得到 $\frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$ ，进而求解即可。

【详解】如图所示， $\because \angle ADB = \angle ACB = 90^\circ \therefore$ 点 A, B, C, D 四点共圆，

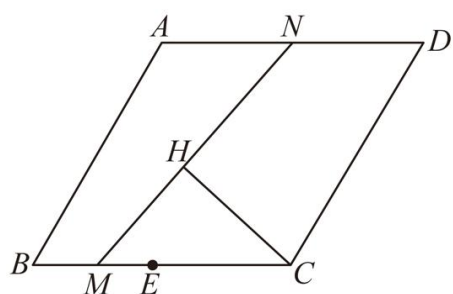


$\because \widehat{CB} = \widehat{CB} \therefore \angle BAC = \angle BDC \because \angle DEC = \angle AEB \therefore \triangle CED \sim \triangle BEA \therefore \frac{CD}{AB} = \frac{DE}{AE}$

$\because \angle ADB = 90^\circ$, $\angle DAC = 30^\circ \therefore DE = \frac{1}{2}AE \therefore \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2} \therefore \frac{CD}{AB} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$. 故选: D.

【点睛】此题考查了四点共圆，同弧所对的圆周角相等，相似三角形的性质等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

例 3. (2023·江苏镇江·校联考一模) 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 12， $\angle B = 60^\circ$ ，点 E 为 BC 边的中点. 点 M 从点 E 出发，以每秒 1 个单位的速度向点 B 运动，点 N 同时从点 A 出发，以每秒 2 个单位的速度向点 D 运动，连接 MN ，过点 C 作 $CH \perp MN$ 于点 H . 当点 M 到达点 B 时，点 N 也停止运动，则点 H 的运动路径长是 ()

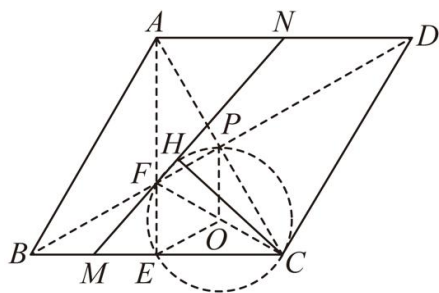


- A. 6 B. 12 C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

【答案】D

【分析】如图，连接 AE 、 AC 、 BD ，设 AC 、 BD 交于点 P ， AE 交 MN 于点 F ，连接 CF ，设 CF 中点为 O ，连接 OP 、 OE ，根据菱形及等边三角形性质可得 $AE \perp BC$ ， $\triangle ANF \sim \triangle EBF$ ，可得出 $\frac{EF}{AF} = \frac{1}{2}$ ，可得 MN 必经过点 F ，根据 $\angle FEC = \angle CHF = 90^\circ$ ，可得点 H 在以 CF 为直径的圆上，根据 M 、 N 的速度及菱形性质可得当点 M 达到点 B 时，点 N 达到点 D ， $AC \perp BD$ ，可得点 H 点运动路径长是 $\frac{1}{2}CF$ 的长，利用勾股定理可求出 CF 的长，根据圆周角定理可得 $\angle EOP = 120^\circ$ ，利用弧长公式即可得答案.

【详解】如图，连接 AE 、 AC 、 BD ，设 AC 、 BD 交于点 P ， AE 交 MN 于点 F ，连接 CF ，设 CF 中点为 O ，连接 OP 、 OE ，



∵ 菱形 $ABCD$ 的边长为 12, $\angle B = 60^\circ$, $\therefore AB = BC = 12$, $\triangle ABC$ 是等边三角形,

∵ 点 E 为 BC 边的中点, $\therefore AE \perp BC$, $BE = CE = \frac{1}{2}AB = 6$, $AE = 6\sqrt{3}$,

∵ 点 M 的速度为每秒 1 个单位, 点 N 的速度为每秒 2 个单位, $\therefore \frac{ME}{AN} = \frac{1}{2}$,

∵ $AN \parallel ME$, $\therefore \triangle ANF \sim \triangle EBF$, $\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{ME}{AN} = \frac{1}{2}$,

$\therefore FE = \frac{1}{3}AE = 2\sqrt{3}$, $CF = \sqrt{FE^2 + CE^2} = 4\sqrt{3}$, $\therefore MN$ 必经过点 F ,

∵ $CH \perp MN$, $AE \perp BC$, $\therefore$ 点 H 在以 CF 为直径的圆上, 且 F 、 E 、 C 、 H 四点共圆,

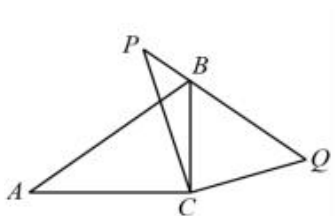
∵ 当点 M 达到点 B 时, 点 N 达到点 D , $AC \perp BD$, $\therefore$ 点 H 点运动路径长是 $\widehat{EP}$ 的长,

∵ $\angle BCA = 60^\circ$, $\widehat{EP} = \widehat{EP}$, $\therefore \angle EOP = 2\angle BCA = 120^\circ$,

$\therefore \widehat{EP} = \frac{120\pi \cdot 2\sqrt{3}}{180} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$, 即点 H 点运动路径长是 $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$. 故选: D.

【点睛】本题考查菱形的性质、等边三角形的判定与性质、四点共圆的证明、勾股定理、圆周角定理及弧长公式, 正确得出点 H 的运动轨迹是解题关键.

例 4. (2023.江苏九年级期末) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, 点 P 为平面内一点, 且 $\angle CPB = \angle A$, 过 C 作 $CQ \perp CP$ 交 PB 的延长线于点 Q , 则 CQ 的最大值为 ()



A. $\frac{17}{5}$

B. $\frac{15}{4}$

C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【分析】根据题意可得 A、B、C、P 四点共圆，由 AA 定理判定三角形相似，由此得到 CQ 的值与 PC 有关，当 PC 最大时 CQ 即取最大值.

【详解】解：∵在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CPB = \angle A$ ， $BC = 3$ ， $AC = 4$

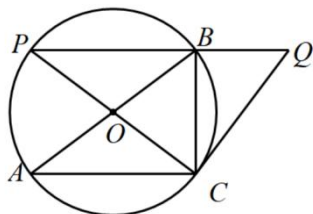
∴A、B、C、P 四点共圆，AB 为圆的直径， $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 5$

∵ $CQ \perp CP$ ∴ $\angle ACB = \angle PCQ = 90^\circ$ ∴ $\triangle ABC \sim \triangle PQC$

∴ $\frac{AC}{BC} = \frac{PC}{CQ}$ ， $\frac{4}{3} = \frac{PC}{CQ}$ ，即 $CQ = \frac{3}{4}PC$

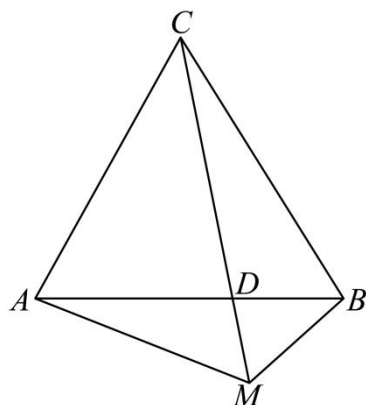
∴当 PC 取得最大值时，CQ 即为最大值

∴当 $PC = AB = 5$ 时，CQ 取得最大值为 $\frac{15}{4}$ 故选：B.



【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质以及四点共圆，掌握同圆或等圆中，同弧所对的圆周角相等确定四点共圆，利用相似三角形性质得到线段间等量关系是解题关键.

例 5. (2023·河南周口·校考三模) 在 $\triangle ABC$ 中， $CA = CB$ ，M 是 $\triangle ABC$ 外一动点，满足 $\angle CAM + \angle CBM = 180^\circ$ ，若 $\angle CMA = 60^\circ$ ， $MA = 4$ ， $MB = 2$ ，则 MD 的长度为_____.

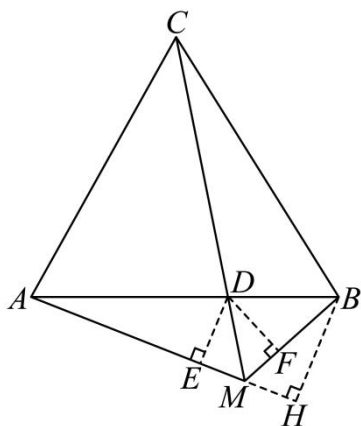


【答案】 $\frac{4}{3}$ / $1\frac{1}{3}$

【分析】过点 B 作 $BH \perp AM$ 交 AM 的延长线于点 H，过点 D 作 $DE \perp AM$ 于点 E，过点 D 作 $DF \perp MB$ 于点

F , 点 A, M, B, C 四点共圆, 得 $\angle AMC = \angle BMC = 60^\circ$, 解直角三角形 $DE = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}MD$, $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}MB$, 面积法求解, $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}AM \cdot DE + \frac{1}{2}BM \cdot DF = \frac{1}{2}AM \cdot BH$, 得 $MD = \frac{4}{3}$.

【详解】解析: 过点 B 作 $BH \perp AM$ 交 AM 的延长线于点 H , 过点 D 作 $DE \perp AM$ 于点 E , 过点 D 作 $DF \perp MB$ 于点 F , 如图所示:



$\because \angle CAM + \angle CBM = 180^\circ \therefore$ 点 A, M, B, C 四点共圆

$\because CA = CB \therefore \angle AMC = \angle BMC = 60^\circ \therefore DE = DF = MD \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}MD$, $\angle AMB = 120^\circ$

$\therefore \angle BMH = 60^\circ$, $\therefore BH = MB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}MB$,

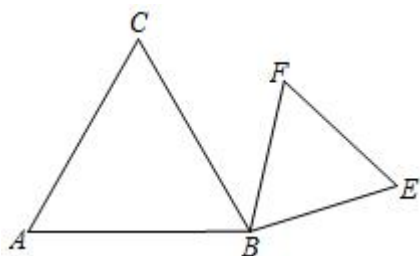
$\because MA = 4$, $MB = 2 \therefore S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}AM \cdot DE + \frac{1}{2}BM \cdot DF = \frac{1}{2}AM \cdot BH$,

$\therefore 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}MD + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}MD = 4 \times \sqrt{3}$, $\therefore MD = \frac{4}{3}$

【点睛】本题考查四点共圆, 圆周角定理, 解直角三角形, 角平分线性质的定理, 添加辅助构造直角三角形是解题的关键.

课后专项训练

1. (2023 上·江苏南通·九年级校考阶段练习) 如图, 等边三角形 ABC 与等边三角形 EFB 共端点 B , $BC=2$, $BF=\sqrt{3}$, $\triangle EFB$ 绕点 B 旋转, $\angle BCF$ 的最大度数 ()



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【答案】C

【分析】由旋转的性质可得点 F 在以点 B 为圆心, BF 长为半径的圆上, 可得当 CF 与 $\odot B$ 相切时, $\angle BCF$ 的度数有最大值, 由三边关系得 $\triangle CBF'$ 是含 30° 度角的直角三角形, 即可求解.

【详解】解: 如图,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/007140165135010000>