



第3章 信号与系统的频域分析

- 本章首先以正弦、余弦或复指数函数为基本信号，通过傅里叶级数将信号分解为这些基本信号之和，引出**周期信号频谱**，并讨论其特点。
- 通过讨论周期信号周期趋于无穷大时频谱的变化，引出**傅里叶变换定义**，并学习常用基本信号的频谱密度函数（频谱）。
- 傅里叶变换**建立了信号时域与频域表示之间的联系**，而傅里叶变换的性质则揭示了信号时域变化相应地引起频域变化关系。
- 从**频谱密度**角度理解周期信号的频谱，使周期与非周期信号统一用傅里叶变换作为分析工具。



第3章 信号与系统的频域分析

- 本章介绍系统的**频域分析方法**。首先给出**系统频率特性**的概念和物理意义，从系统频率特性对输入信号频谱为达到特定功能而进行调整的角度，讨论输出信号的频谱，进而求系统对任意信号的响应。
- 通过学习**采样定理**，进一步理解时域和频域的对应关系。
- 本章还结合系统频域分析方法，介绍一些工程应用中非常重要的概念，例如，无失真传输系统、理想低通滤波器、信号的调制与解调等等。



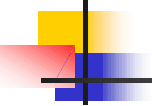
本章主要内容

- 3.1 周期信号的分解与合成
- 3.2 周期信号的频谱及特点
- 3.3 非周期信号的频谱
- 3.4 傅氏变换的性质与应用 (1)
- 3.5 傅氏变换的性质与应用 (2)



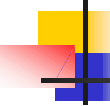
本章主要内容

- 3.6 周期信号的频谱
- 3.7 系统的频域分析
- 3.8 无失真传输系统与理想低通滤波器
- 3.9 取样定理及其应用
- 3.10 频域分析用于通信系统



第 18 讲

系统的频域分析法



1. 系统的频率响应

当系统的激励为复指数信号 $e^{j\omega t}$ ($-\infty < t < \infty$) 时, 系统响应由卷积积分可得

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau \\ &= e^{j\omega t} H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\omega t + \phi(\omega)} \end{aligned}$$

上式表明, 当一个复指数信号 $e^{j\omega t}$ 作用于线性系统时, 其响应仍为同频率的复指数信号, 不同的是响应比激励多乘了一个复函数 $H(\omega)$



1. 系统的频率响应

在频域，系统的激励和响应的象函数之间的关系可以表示为

$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega) = |H(j\omega)|F(j\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

可见系统频率特性改变了激励信号的频谱，根据设计要求对输入信号的频率分量进行加权，使某些频率分量增强，而使另一些频率分量削弱或不变，且每个频率分量在传输过程中都产生各自的相移。

由于 $H(j\omega)$ 的作用导致输出信号相对于输入信号在幅度和相位两个方面引起变化，这种改变的规律是针对输入信号要求产生相应的输出信号而设计的。

一个系统在频率域的特征**完全由频率特性 $H(j\omega)$ 决定**，它仅与系统本身特性有关，而与激励无关。

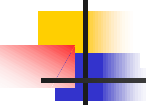
2.系统函数的求解方法

$$\begin{aligned}\frac{d^n y_{zs}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_{zs}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_{zs}(t)}{dt} + a_0 y_{zs}(t) \\ = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t)\end{aligned}$$

两边进行傅里叶变换，利用**线性**和**微分特性**可得：

$$\begin{aligned}[(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0]Y_{zs}(j\omega) = \\ [b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0]F(j\omega)\end{aligned}$$

$$Y_{zs}(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} F(j\omega)$$



2.系统函数的求解方法

$$\frac{Y_{zs}(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \Lambda + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \Lambda + a_1(j\omega) + a_0} = H(j\omega)$$

如果给定系统激励为单位冲激信号 $\delta(t)$ ，所得到的零状态响应即为系统的冲激响应 $h(t)$ 。

而：

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

因此，可得：

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(j\omega)$$



2. 系统函数的求法总结

(1) 对系统微分方程做傅里叶变换

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{Y_{zs}(j\omega)}{F(j\omega)} \\ &= \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \Lambda + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \Lambda + a_1(j\omega) + a_0} \end{aligned}$$

(2) 求冲激响应的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(j\omega)$$



实验方法测量系统频率响应

(3) 系统的频率响应的实验测量方法

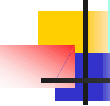
$$y(t) = |H(\omega)| \cos(\omega t + \theta + \varphi(\omega))$$

上式还为实验手段测量系统频率响应提供了理论依据。实验方法测量系统频率响应一般是让输入正弦信号幅度恒为1，改变输入正弦信号的频率，通过测量输出信号的幅度就可以得到系统的幅频响应，而通过测量输出信号与输入信号的相位差就可以得到系统的相频响应。



3. 系统的频域分析法步骤

- (1) 对输入信号进行傅里叶变换，得到其频谱函数；
- (2) 用上节介绍的方法之一求出系统频率特性；
- (3) 求系统响应的傅里叶变换；
- (4) 如果求输出的时域解，还要对其进行傅里叶反变换。



例1：某系统的微分方程为 $y'(t) + 2y(t) = f(t)$
求 $f(t) = e^t \varepsilon(t)$ 时的响应 $y_{zs}(t)$ 。

解：(1) 由微分方程求系统函数：
$$H(j\omega) = \frac{Y_{zs}(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + 2}$$

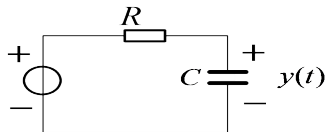
(2)
$$f(t) = e^t \varepsilon(t) \leftrightarrow F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

(3)
$$Y_{zs}(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 2)(j\omega + 1)} = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

(4)
$$y_{zs}(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y_{zs}(j\omega)] = [e^{-t} - e^{-2t}] \varepsilon(t)$$

4. 系统的频域分析

例3: 右图所示电路, 若激励为单位阶跃信号, 试求系统的频响特性和电容电压的零状态响应 $y(t)$

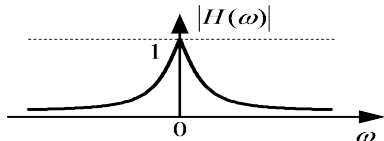


解答

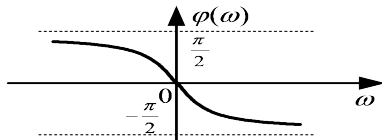
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}} = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha}$$

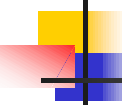
其中 $\alpha = \frac{1}{RC}$

$$|H(\omega)| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}$$



$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$$





4. 系统的频域分析

电容电压的零
状态响应的傅
里叶变换为

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) = [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} \\ &= \frac{\alpha\pi}{j\omega + \alpha} \delta(\omega) + \frac{\alpha}{j\omega(j\omega + \alpha)} \end{aligned}$$

利用冲激信号的抽样性质，并将第二项展开，得

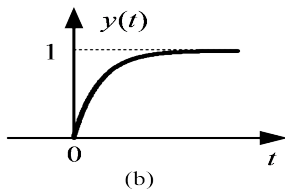
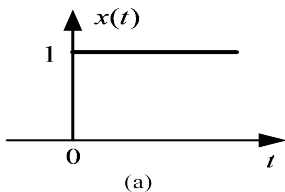
$$Y(\omega) = [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] - \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

求傅里叶反变换

$$y(t) = \varepsilon(t) - e^{-\alpha t} \varepsilon(t) = (1 - e^{-\alpha t}) \varepsilon(t)$$

4. 系统的频域分析

下图 (a) 和 (b) 分别画出了激励和零状态响应的波形。可以看出，由于频率响应抑制了 $u(t)$ 的高频成分，使得输出在原来跳变的地方变化缓慢。



需要说明的是，求解系统的零状态响应，傅里叶分析法远不如下一章要介绍的拉普拉斯变换法方便，所以，实际上很少用傅里叶分析法求系统的零状态响应。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/007144122134006141>