北京市中国人民大学附属中学2023-2024学年高二下学期期中考试数学试题

学校:_____姓名：_____班级：_____考号：_____

一、单选题

1．已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2+1$，则122是该数列的（　）

A．第9项　　B．第10项　　C．第11项　　D．第12项

2．若函数$f(x)=x^2$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（　）

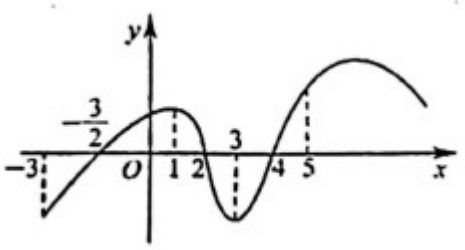
A．1　　B．2

C．3　　D．4

3．等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2+a_3=3$，$a_4+a_5+a_6=21$，则其公差等于（　）

A．2　　B．3　　C．6　　D．18

4．如图是函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$的图象，则下面判断正确的是（　）



A．$f(x)$是区间$[-3,1]$上的增函数　　B．$f(x)$是区间$[1,2]$上的减函数

C．1是$f(x)$的极大值点　　D．4是$f(x)$的极小值点

5．若S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_8>S_n\left(n\neq 8,n\in \mathrm{N}^*\right)$，则（　）

A．$a_8\geq 0,a_9<0$　　B．$a_8>0,a_9<0$

C．$a_8=0,a_9<0$　　D．$a_8>0,a_9=0$

6．若函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax$有极值，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$(-\infty,1]$　　B．$(-\infty,1)$

C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

7．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为2，若a_1,a_2,a_4成等比数列，则$a_2=$（　）

A．-10　　B．-6　　C．4　　D．-4

8．已知$f(x)$在$x=x_0$处可导，在x_0附近x的函数值$f(x)$，可以用“以直代曲”的方法求其近似代替值：$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$．对于函数$f(x)=\sqrt{x}$，利用这一方法，$m=f(4.001)$的近似代替值（　）

A．大于m　　B．小于m　　C．等于m　　D．与m的大小关系无法确定

9．设S_n为无穷等比数列$\{a_n\}$的前n项和，则“$\{a_n\}$有最大值”是“$\{S_n\}$有最大值”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

10．设函数$f(x)$定义域为D，若函数$f(x)$满足：对任意$c\in D$，存在$a,b\in D$，使得$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c)$成立，则称函数$f(x)$满足性质$\Gamma$.下列函数不满足性质$\Gamma$的是（　）

A．$f(x)=x^2$　　B．$f(x)=x^3$　　C．$f(x)=e^x$　　D．$f(x)=\ln x$

二、填空题

11．函数 $f(x)=\sin 2x$，则 $f'(x)=$____.

12．用数学归纳法证明命题“$\forall n\in \mathbf{N}^*$，$(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\times 1\times 3\times\cdots\times(2n-1)$ 时，假设 $n=k$ 时成立，证明 $n=k+1$ 时也成立，可在左边乘以一个代数式____.

13．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2ax-\ln x$，若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是_____.

14．小杰想测量一个卷纸展开后的总长度，卷纸中的纸是单层的，且卷纸整体呈一个空心圆柱形，即大圆柱在其正中间挖去了一个小圆柱，测得小圆柱底面的直径为 5 厘米，大圆柱底而的直径为 11 厘米．由于单层纸的厚度不易测量，小杰利用游标卡尺测得 10 层纸的总厚度为 0.3 厘米．试估算这个卷纸的总长度（单位：米）为____.（结果精确到个位，取 $\pi\approx 3.14$ ）

15．与曲线在某点处的切线垂直，且过该点的直线称为曲线在某点处的法线．关于曲线的法线有下列四种说法：

①存在一类曲线，其法线恒过定点；

②若曲线 $y=x^4$ 的法线的纵截距存在，则其最小值为 $\frac{3}{4}$；

③存在两条直线既是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的法线，也是曲线 $y=\ln x$ 的法线；

④曲线 $y=\sin x$ 的任意法线与该曲线的公共点个数均为 1．

其中所有说法正确的序号是____.

三、解答题

16．已知函数$f\left(x\right)=x^2-ax$，$f\left(x\right)$在$x=0$处取得极值．

(1)求$f\left(x\right)$在区间$\left[2023,2024\right]$上的平均变化率；

(2)求曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(2,f\left(2\right)\right)$处的切线方程；

(3)求曲线$y=f\left(x\right)$过点$\left(2,0\right)$的切线方程．

17．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_5=3$，$S_5=35$．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{|a_n|\}$的前n项和为T_n，求T_{10}．

18．已知函数$f\left(x\right)=ax^2-\left(a+2\right)x+\ln x$，其中$a\in\mathrm{R}$．

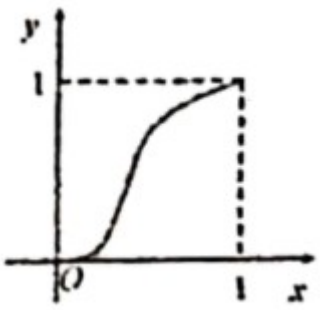
(1)当$a=-1$时，求$f\left(x\right)$的极值；

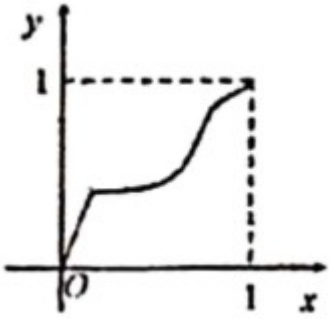
(2)讨论当$a>0$时函数$y=f(x)$的单调性；

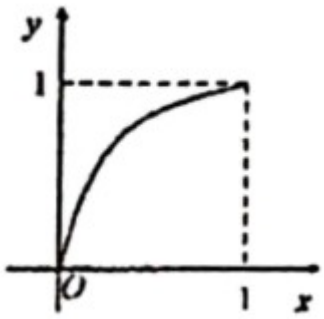
(3)若函数$g(x)=f(x)-ax^2$有两个不同的零点x_1、x_2，求实数a的取值范围．

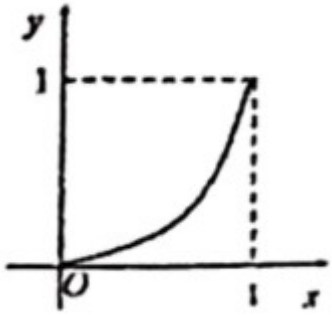
四、单选题

19．已知函数$y=f\left(x\right)$满足：对任意$a_1\in\left(0,1\right)$，由递推关系$a_{n+1}=f\left(a_n\right)$得到的数列$\{a_n\}$是单调递增的，则该函数的图象可以是（　）

A．

B．

C. 

D. 

20．设数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$S_n=n^2+n+3$，则（　）

A．数列$\{a_n\}$满足$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geq 2)$　B．数列$\{a_n\}$为递增数列

C．$a_n+\frac{S_n}{n}$的最小值为$\frac{17}{2}$　D．S_4-S_2，S_6-S_4，S_8-S_6不成等差数列

21．已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_2=3a_1,S_n$为$\{a_n\}$的前n项和，则“$\{a_n\}$是等差数列”是“$\sqrt{S_n}$为等差数列”的（　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件

C．充要条件　D．既不充分又不必要条件

22．已知无穷数列$\{a_n\}$，$a_1=1$．性质$s:\forall m$，$n\in\mathbf{N}^*$，$a_{m+n}>a_m+a_n$，性质$t:\forall m$，$n\in\mathbf{N}^*$，$2\leq m<n$，$a_{m-1}+a_{n+1}>a_m+a_n$，给出下列四个结论：

①若$a_n=3-2n$，则$\{a_n\}$具有性质s；

②若$a_n=n^2$，则$\{a_n\}$具有性质t；

③若$\{a_n\}$具有性质s，则$a_n\geq n$；

④若等比数列$\{a_n\}$既满足性质s又满足性质t，则其公比的取值范围为$(2,+\infty)$．

则所有正确结论的个数为（　）

A．1　B．2　C．3　D．4

五、填空题

23．写出一个满足$f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}$的函数$f(x)=$____.

24．已知函数$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(a>0)$，设曲线$y=f(x)$在点$(x_i,f(x_i))$处切线的斜率为$k_i(i=1,2,3)$，若$x_1$，$x_2$，$x_3$均不相等，且$k_2=-2$，则$\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_3}=$____.

25．若曲线$y=f(x)$上两个不同点处的切线重合，则称这条切线为曲线$y=f(x)$的“自公切线”，则下列曲线$y=f(x)$中，所有存在“自公切线”的序号为____.

①$y=x^2-2|x|$；

②$y=3\sin x+4\cos x$；

③$y=3x+\dfrac{1}{x}$；

④$y=\sqrt{x+|x|+1-x^2}$.

六、解答题

26．已知无穷数列$\{a_n\}$满足：

①$a_i\in\mathbf{N}^*(i=1,2,\cdots)$；

②$a_i+a_j\le a_{i+j}\le a_i+a_j+1(i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots,i+j\ge 3)$.

设a_i^*为$a_i(i=1,2,\cdots)$所能取到的最大值，并记数列$\{a_n^*\}$.

(1)若数列$\{a_n\}$为等差数列且$a_1=1$，直接写出其公差d的值；

(2)若$a_1=a_2=1$，求a_4^*的值；

(3)若$a_1=1$，$a_2=2$，求数列$\{a_n^*\}$的前100项和.

参考答案：

1．C

【分析】解方程$a_n=122$即可得.

【详解】由$a_n=n^2+1=122$得$n=11$（-11舍去）.

故选：C.

2．B

【分析】根据函数在某一点的导数的定义，由此可得结果.

【详解】因为$f(x)=x^2$，

则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

故选: B

3．A

【分析】根据等差数列的通项公式计算即可求解.

【详解】由题意知，设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

$a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=3, a_4+a_5+a_6=3a_1+12d=21$，

两式相减，得$9d=18$，所以$d=2$.

故选：A

4．D

【分析】由导函数图象与函数单调性的关系可得函数的单调性，即可得函数的极值点.

【详解】由图可知：当$x\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)\cup(2,4)$时，$f'(x)<0$，

当$x\in\left(-\dfrac{3}{2},2\right)\cup(4,+\infty)$时，$f(x)>0$，

故$f(x)$在$\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$、$(2,4)$上单调递减，在$\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$、$(4,+\infty)$上单调递增，

故 A 错误，B 错误，C 错误，D 正确.

故选：D.

5．B

【分析】根据 S_n 与 a_n 关系计算求解.

【详解】$\because S_8 > S_n\left(n \neq 8, n \in \mathrm{N}^*\right)$，

$\therefore S_8 > S_7, \therefore S_8 - S_7 = a_8 > 0, \therefore S_8 > S_9, \therefore S_9 - S_8 = a_9 < 0,$

故选：B.

6．B

【分析】由题意，$f'(x) = 0$ 有两个实数根求解即可.

【详解】$\because$ 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax$ 有极值点，

$\therefore f'(x) = x^2 - 2x + a = 0$ 有两个不同实数根，

$\therefore \Delta = 4 - 4a > 0$，解得 $a \in (-\infty, 1)$

故选：B

7．C

【分析】根据已知得出 $a_1 = a_2 - 2$，$a_4 = a_2 + 4$，即可根据等比中项结合已知列出式子，求解得出答案.

【详解】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，

$\therefore a_1 = a_2 - 2$，$a_4 = a_2 + 4$，

$\because a_1, a_2, a_4$ 成等比数列，

$\therefore a_2^2 = a_1 a_4$，即 $a_2^2 = (a_2 - 2)(a_2 + 4)$，解得 $a_2 = 4$，

故选：C.

8．A

【分析】原题等价于比较近似代替值与函数值本身的大小关系，由此我们可以构造函数

$g(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0),x\neq x_0$，通过导数得出$g(x)<0$即可得解.

【详解】对于$m=f(4.001)=\sqrt{4.001}$的近似代替值$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，

我们令$g(x)=m(x)-y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0),x\neq x_0$，其中$x$在$x_0$附近且使得

$g(x)$有意义，

又因为$g'(x)=f'(x)-f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$，

所以当$0<x<x_0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$x>x_0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

这意味着$g(x)<g(x_0)=0$，也就是说$m(x)<y(x)$，

即$m=f(4.001)$的近似代替值大于m.

故选：A.

9．D

【分析】分别考虑$a_n=1$和$a_n=-\frac{1}{2^n}$的情形，即可说明条件既不是充分的也不是必要的.

【详解】当$a_n=1$时，$S_n=n$，此时显然$\{a_n\}$有最大值1，

而$\{S_n\}$没有最大值，这表明条件不是充分的；

当$a_n=-\frac{1}{2^n}$时，由于$a_n=-\frac{1}{2^n}<-\frac{1}{2^{n+1}}=a_{n+1}$，故$\{a_n\}$是递增数列，从而$\{a_n\}$没有最大值.

又由于$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=-\frac{1}{2^{n+1}}<0$，故$\{S_n\}$是递减数列，

从而$\{S_n\}$有最大值S_1，这表明条件不是必要的.

故选：D.

10．B

【解析】构造函数$g(x)=f(x)-f'(c)x$，可得$g''(x)=f''(x)$，则$f''(x)$在定义域内正负号不变时满足性质Γ，若$f''(x)$有唯一变号零点x_0时不满足性质Γ，则通过计算$f''(x)$即可判断.

【详解】$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c)$可化为$f(a)-f'(c)a=f(b)-f'(c)b$，

令$g(x)=f(x)-f'(c)x$，

则$g'(x)=f'(x)-f'(c)$，$g''(x)=f''(x)$，

$\therefore$若$f''(x)$在定义域内正负号不变，那么$x=c$是$g'(x)$的变号零点，则$g(x)$在$x=c$的两侧的单调性不一致，因此满足性质Γ；

若$f''(x)$有唯一变号零点x_0，那么取$c=x_0$，则$g'(x)$在定义域内的正负号不变，进而函数$g(x)$在定义域内单调，因此不满足性质Γ.

对于A，$f'(x)=2x$，则$f''(x)=2>0$，所以满足性质Γ；

对于B，$f'(x)=3x^2$，则$f''(x)=6x$有唯一变号零点0，所以不满足性质Γ；

对于C，$f'(x)=e^x$，则$f''(x)=e^x>0$，所以满足性质Γ；

对于D，$f'(x)=\frac{1}{x}$，则$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，所以满足性质Γ.

故选：B.

【点睛】本题考查利用导数解决新定义问题，属于较难题.

11．$2\cos 2x$

【分析】利用简单复合函数求导公式进行计算.

【详解】令$y=\sin u$，$u=2x$，则$y_u'\cdot u_x'=2\cos u=2\cos 2x$，

故$f'(x)=2\cos 2x$.

故答案为：$2\cos 2x$

12．$4k+2$

【分析】由数学归纳法的定义，依次写出$n=k$，$n=k+1$时等号左边的情形，对比即可得解.

【详解】假设$n=k$时成立，即$(k+1)(k+2)\cdots(k+k)=2^k\times 1\times 3\times\cdots\times(2k-1)$，

当$n=k+1$时，等号左边为$(k+1+1)(k+1+2)\cdots(k+1+k)(k+1+k+1)$，

对比可知，证明$n=k+1$时也成立，可在左边乘以一个代数式$\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}=4k+2$.

故答案为：$4k+2$.

13．$\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$

【分析】由题意可得将问题转化为$f'(x)=x+2a-\frac{1}{x}\geq 0$在$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时恒成立，即$2a\geq\frac{1}{x}-x$

在$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时恒成立，然后求出$\frac{1}{x}-x$的最大值即可.

【详解】因为$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2ax-\ln x$在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上是增函数，

所以$f'(x)=x+2a-\frac{1}{x}\geq 0$在$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时恒成立，

即$2a\geq\frac{1}{x}-x$在$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时恒成立，

令$g(x)=\frac{1}{x}-x$，则$g'(x)=-\frac{1}{x^2}-1<0$，

所以$g(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调递减，

所以$g(x)_{\max}=g(\frac{1}{2})=\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

所以$2a\geq\frac{3}{2}$，得$a\geq\frac{3}{4}$，

即实数a的取值范围是$\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$，

故答案为：$\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$

14．25

【分析】借助等体积法计算卷纸整体的体积与展开后的体积即可得.

【详解】设卷纸的高为h厘米，展开后卷纸的总长度为x厘米，

卷纸的体积为：$V=\pi\times\left(\frac{11}{2}\right)^2\times h-\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times h=$ h 立方厘米，

每层纸的厚度为：$\frac{0.3}{10}=0.03$ 厘米，

则展开后的体积为 $hx\times0.03=0.03hx$ 立方厘米，

即有 $0.03hx$，即 $x=\frac{24\pi}{0.03}\approx\frac{3.14}{0.03}=2512$ 厘米，

即约为 25 米.

故答案为：25.

15．①②④

【分析】对于①，容易想到圆满足要求；对于②，将其纵截距表示出，然后利用均值不等式求解即可；对于③，求出两条曲线的所有公共法线即可；对于④，将直线和曲线的公共点个数问题转化为函数的零点问题，再使用导数工具求解.

【详解】对于①，圆的法线恒过圆心，故①正确；

对于②，由于曲线 $y=x^4$ 在 $\left(c,c^4\right)$ 处的切线斜率为 $4c^3$，故曲线 $y=x^4$ 在 $\left(c,c^4\right)$ 处的法线方程为 $x+4c^3y=c+4c^7$，该直线存在纵截距当且仅当 $c\neq0$，且此时纵截距为

$$\frac{c+4c^7}{4c^3}=c^4+\frac{1}{4c^2}.$$

此时 $c^4+\frac{1}{4c^2}=c^4+\frac{1}{8c^2}+\frac{1}{8c^2}\geq3\sqrt[3]{c^4\cdot\frac{1}{8c^2}\cdot\frac{1}{8c^2}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{3}{4}$，且当 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

$c^4+\frac{1}{4c^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，所以纵截距如存在，则最小值为 $\frac{3}{4}$，②正确；

对于③，假设曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $\left(u,\mathrm{e}^u\right)$ 处的法线和曲线 $y=\ln x$ 在 $\left(v,\ln v\right)$ 处的法线均为直线 l，

则 l 的斜率 k 满足 $k=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^u}=-\dfrac{1}{\dfrac{1}{v}}$，即 $k=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^u}=-v$，从而 $v=\mathrm{e}^u$，故 $u=\ln v$.

另一方面，点 $\left(u,\mathrm{e}^u\right)$ 和 $\left(v,\ln v\right)$ 确定的直线即为 l，从而 $k=\dfrac{\mathrm{e}^u-\ln v}{u-v}=\dfrac{v-\ln v}{u-v}=\dfrac{v-u}{u-v}=-1$.

所以 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^u}=-v=-1$，故 $u=0$，$v=1$，得到直线 l 为过 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 的直线.

上述推理表明 l 是唯一的，所以③错误；

④设曲线 $y=\sin x$ 在 $\left(t,\sin t\right)$ 处的法线为 l.

若 $t=k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，则 t 是 $y=\sin x$ 的极值点，从而 l 的方程为 $x=t$，该直线和曲线 $y=\sin x$ 显

然只有一个公共点 $\left(t,\sin t\right)$；

若 $t\neq k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，则 $\cos t\neq 0$，l 的斜率为 $-\dfrac{1}{\cos t}$，故该直线的方程为 $y=-\dfrac{1}{\cos t}\left(x-t\right)+\sin t$.

设 $f\left(x\right)=\sin x+\dfrac{1}{\cos t}\left(x-t\right)-\sin t$，则曲线 $y=\sin x$ 上的点 $\left(p,\sin p\right)$ 在 l 上当且仅当

$f\left(p\right)=0$.

求导得到 $f'\left(x\right)=\cos x+\dfrac{1}{\cos t}$，下面进行分类讨论：

如果 $\cos t>0$，则当 $\cos x>-1$ 时，即 $\left(2k-1\right)\pi<x<\left(2k+1\right)\pi$ $\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，有

$$f'\left(x\right)=\cos x+\frac{1}{\cos t}>-1+\frac{1}{\cos t}\geq -1+1=0.$$

所以$f(x)$在每个$\left[(2k-1)\pi,\ (2k+1)\pi\right]$上均单调递增$(k\in\mathbf{Z})$，从而在$\mathbf{R}$上单调递增；

如果$\cos t<0$，则当$\cos x<1$时，即$2k\pi<x<2\pi(k+1)$时$(k\in\mathbf{Z})$，有

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos t}<1+\frac{1}{\cos t}\le 1+(-1)=0.$$

所以$f(x)$在每个$\left[2k\pi,\ (2k+2)\pi\right]$上均单调递减$(k\in\mathbf{Z})$，从而在$\mathbf{R}$上单调递减.

综合以上两种情况，知$f(x)$一定是单调函数，而$f(t)=\sin t-\sin t=0$，所以$f(x)$只有唯一的零点t.

这表明曲线$y=\sin x$上只有唯一一个点$(t,\sin t)$在l上，即曲线$y=\sin x$和l有唯一公共点.

综上，曲线$y=\sin x$的任意法线与该曲线的公共点个数均为1，④正确.

故答案为：①②④.

【点睛】关键点点睛：本题的关键点在于，利用导数的几何意义，以及两条垂直的直线的斜率之间的数量关系，可得到曲线的法线方程.

16．(1)4047

(2)$y=4x-4$

(3)$y=0$或$y=8x-16$

【分析】（1）首先由极值的定义列方程求得参数a的值，再由平均变化率的公式即可求解；

（2）依次求出$f(2),f'(2)$的值即可求解；

（3）首先设出切点坐标，利用$f'(x_0)=\dfrac{x_0^2-0}{x_0-2}$可求出切点坐标，由此即可进一步求解.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/007163143032006103