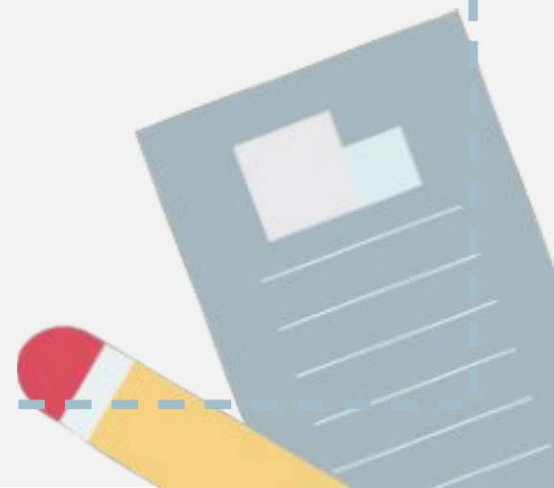
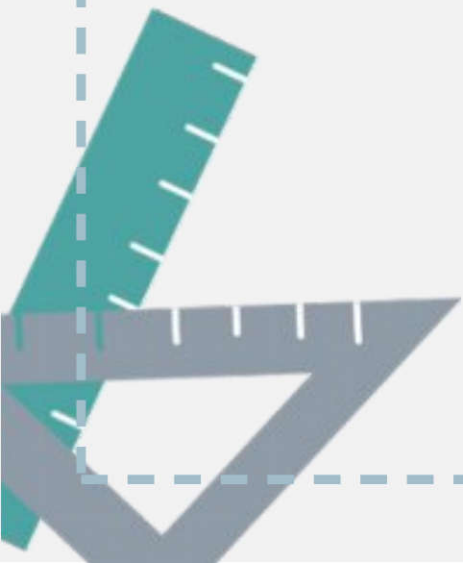
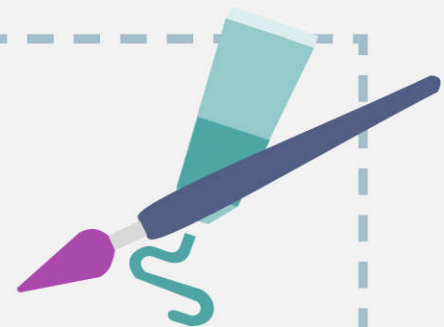


3.2.1 函数的单调性



引入

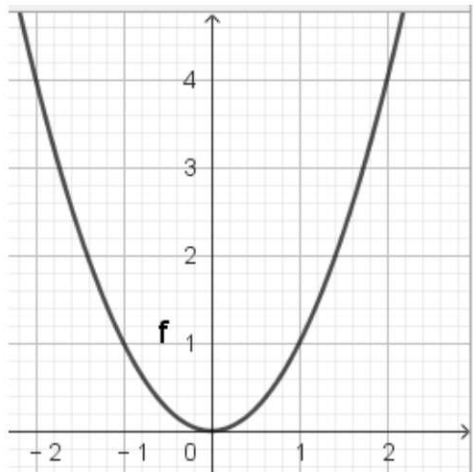
问题：回看以往问题：求以下函数值域

$$\textcircled{1} f(x) = x + \sqrt{x+1}, \textcircled{2} g(x) = x - \sqrt{x+1}, \textcircled{3} h(x) = 1 + \frac{x^3 - 4x}{\sqrt{x+1}}$$



一、单调性定义

问题:画出 $y = x^2$ 图象,从图象角度说清楚其走势



具象描述

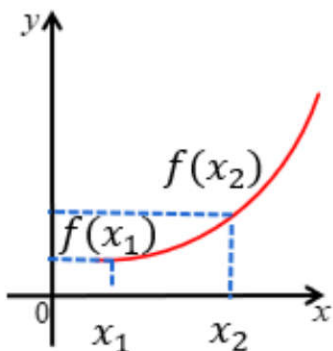
y 轴左侧, 图象从左到右下降,
 y 随 x 增大而增大

y 轴右侧, 图象从左到右上升
 y 随 x 增大而减小

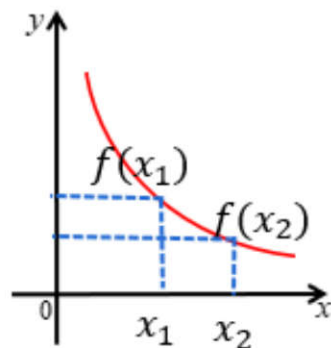
思考:能画出图象就能说清楚函数增减性,遇到 $h(x) = 1 + \frac{x^3 - 4x}{\sqrt{x+1}}$ 这样难以画出图象的函数怎么办呢? 能否用抽象的代数语言表示呢?



一、单调性定义



无数点 $\rightarrow$ 两个点
几何描述 $\rightarrow$ 代数表示



一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，区间为 $D \subseteq I$ ：

无数点从左到右上升

如果 $\forall x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增. D 就叫做函数 $f(x)$ 的单调递增区间，简称增区间.

无数点从左到右下降

如果 $\forall x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减. D 就叫做函数 $f(x)$ 的单调递减区间，简称减区间.



一、单调性定义

特别地，当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时，我们就称它为增函数.

如： $f(x) = x$ 就是在 $\mathbb{R}$ 上的增函数.

特别地，当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时，我们就称它为减函数.

如： $f(x) = -x$ 就是在 $\mathbb{R}$ 上的减函数.

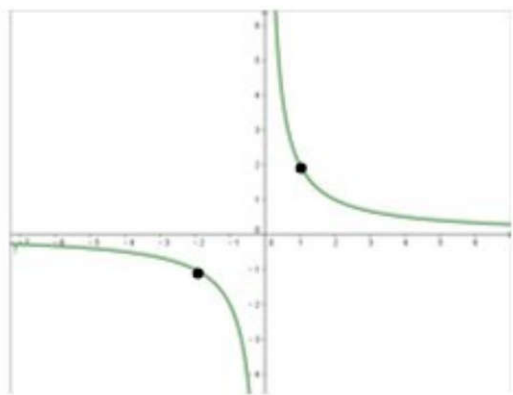
思考：一个函数要么是增函数，要么是减函数吗？一个函数一定具有单调性吗？

函数 $\rightarrow$ 特殊情况 $\rightarrow \begin{cases} \text{减函数} \\ \text{增函数} \end{cases}$



一、单调性定义

例1：反比例函数 $f(x) = \frac{2}{x}$ 是减函数吗？



注意：增函数、减函数是针对的是函数的整个定义域，是函数的整体性质，而函数的单调性是对定义域下的某个区间，是函数的局部性质。一个函数在定义域下的某个区间具有单调性，但在整个定义上不一定具有单调性。

注：若函数的单调区间有多个，则函数的单调区间不能用“U”连接，只能用“，”或“和”连接。

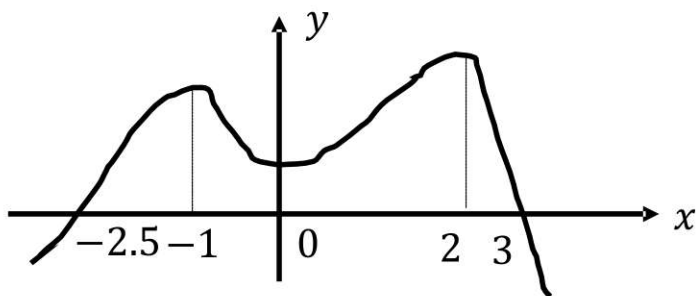


一、单调性定义

练习:

(1)说出 $f(x) = |x|, g(x) = -x^2$ 的单调性。

(2)说出函数 $f(x)$ 的增区间.



注意:端点值于单调区间不重要, 只要明确端点是否在义域内.



二、定义法证明单调性

例2：根据定义证明 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，在 $(0, 1)$ 上单调递减

定义法证明单调性的步骤

取值

做差

定号

下结论



二、定义法证明单调性

练习

(1) 根据定义证明 $f(x) = x^2 - 2x$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减

因式分解

(2) 根据定义证明 $f(x) = x^2$ 在 R 上单调递增

因式分解

(3) 根据定义证明 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增

分子有理化



三、复合函数

问题：

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$, $h(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$ 是以前学过的函数吗？

可以由以前学过的函数经过多次对应操作得到吗？



大米



粉碎机



面粉



米团



磨具机

粉丝

$$x \xrightarrow{t(x)=x^2+1} x^2 + 1 \xrightarrow{h(t)=\frac{1}{t}} \frac{1}{x^2 + 1}$$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/008010002057006125>