第一章 集合与常用逻辑用语

1.3 集合的基本运算

必备知识解读

知识点1 并集

例1-1 ［教材改编P10例1］(2024·四川省德阳市期末)集合$A=\{-1,0,1\}$，集合$B=\{1,2,3\}$，则集合$A\cup B=$(**D**)

A.$\{0,1\}$　　B.$\{-1,0,1,2\}$

C.$\{-1,0,2,3\}$　　D.$\{-1,0,1,2,3\}$

【解析】由题意知，$A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$．

例1-2 ［教材改编P10例2］(2024·黑龙江省绥化市肇东四中期末)设集合$A=\{x|1\leq x\leq 3\}$,$B=\{x|2<x<4\}$，则$A\cup B=$(　C　)

A.$\{x|2<x\leq 3\}$　　B.$\{x|2\leq x\leq 3\}$　　C.$\{x|1\leq x<4\}$　　D.$\{x|1<x<4\}$

【解析】在数轴上表示出集合A,B，如图1.3-5所示，则$A\cup B=\{x|1\leq x<4\}$.

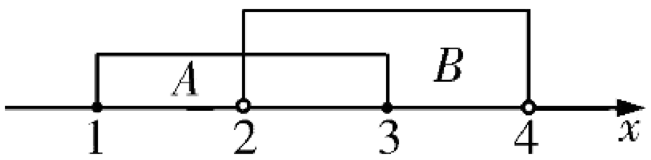


图1.3-5

知识点2 交集

例2-3 [教材改编P12 T1](2024·北京市海淀区期中)已知集合$A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{-3,-1,1,3,5\}$，则$A\cap B=$(C)

A.$\{1,3\}$　　B.$\{0,1,3\}$

C.$\{-1,1,3\}$　　D.$\{-1,0,1,2,3,5\}$

【解析】由题意可知，找到集合A，B中的公共元素$-1,1,3$，可知$A\cap B=\{-1,1,3\}$.

例2-4 (2024·安徽省合肥市期中)已知集合$M = \{x| -1 \leq x < 3\}$,$N = \{x| -2 < x < 1\}$,则$M \cap N =$(B)

A.$\{x| -2 < x < 1\}$　B.$\{x| -1 \leq x < 1\}$　C.$\{x|1 < x < 3\}$　D.$\{x| -2 < x < 3\}$

【解析】在数轴上表示出集合M，N,如图1.3-6所示，

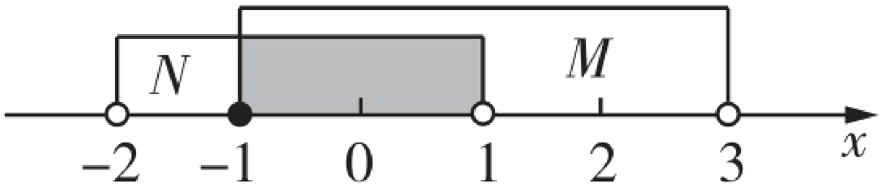


图1.3-6

由图知$M \cap N = \{x| -1 \leq x < 1\}$.

知识点3 全集与补集

例3-5 [教材改编P13例5] (2024·湖南省永州市期末)设集合$U = \{0，1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,3，5\}$,则$\complement_U A =$(C)

A.$\{2,4\}$　　B.$\{1,3,5\}$　　C.$\{0，2,4\}$　　D.$\{0,1，2,3,4，5\}$

【解析】因为集合$U = \{0,1,2,3,4,5\}$,$A = \{1，3,5\}$，所以$\complement_U A = \{0,2,4\}$.

例3-6 (2024·北京市东城区期末)若全集$U=\{x|-2\leq x\leq 2\}$，则集合$A=\{x|-2\leq x\leq 0\}$的补集$\complement_U A$为(C)

A.$\{x|0<x<2\}$ B.$\{x|0\leq x<2\}$ C.$\{x|0<x\leq 2\}$ D.$\{x|0\leq x\leq 2\}$

【解析】借助数轴（如图1.3-7）易得$\complement_U A=\{x|0<x\leq 2\}$.

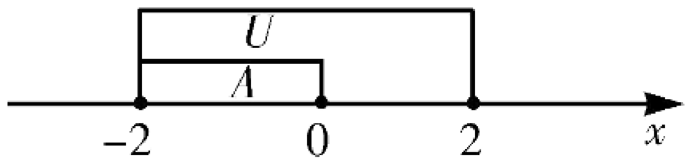


图1.3-7

知识点4 德·摩根定律与容斥原理

例4-7 ［教材改编P13 T1］(2024·河南省部分学校质检)设集合$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$M=\{1,2,3\}$,$N=\{3,4,5\}$，则$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=$(**D**)

A.$\{2,3,4,5\}$　B.$\{1,2,4,5,6\}$　C.$\{1,2,6\}$　D.$\{6\}$

【解析】方法1$\complement_U M=\{4,5,6\}$，

$\complement_U N=\{1,2,6\}$，故$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{6\}$.

方法2 根据题意易得$M\cup N=\{1,2,3,4,5\}$,故$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\complement_U(M\cup N)=\{6\}$.

例4-8 为了解某市市民在阅读报纸方面的情况，某单位调查了500位市民，调查结果显示：订阅日报的有334人，订阅晚报的有297人，其中两种都订的有150人（假定只有这两种报纸）.则至少订一种报纸的有__**481**__人，有__**19**__人不订报纸.

【解析】方法1 设$I=\{x|x$是调查的500位市民$\}$，$A=\{x|x$是订阅日报的人$\}$，

$B=\{x|x$是订阅晚报的人$\}$，则$\mathrm{card}(A\cap B)=150,\mathrm{card}(A)=334,\mathrm{card}(B)=297$.

$A\cup B=\{x|x$是至少订一种报纸的人$\}$，

则$\mathrm{card}(A\cup B)=334+297-150=481$.

$\complement_I(A\cup B)=\{x|x$是不订报纸的人$\}$，

则$\mathrm{card}\left(\complement_I(A\cup B)\right)=500-481=19$.

方法2 设不订报纸的有x人，如图1.3-8所示，

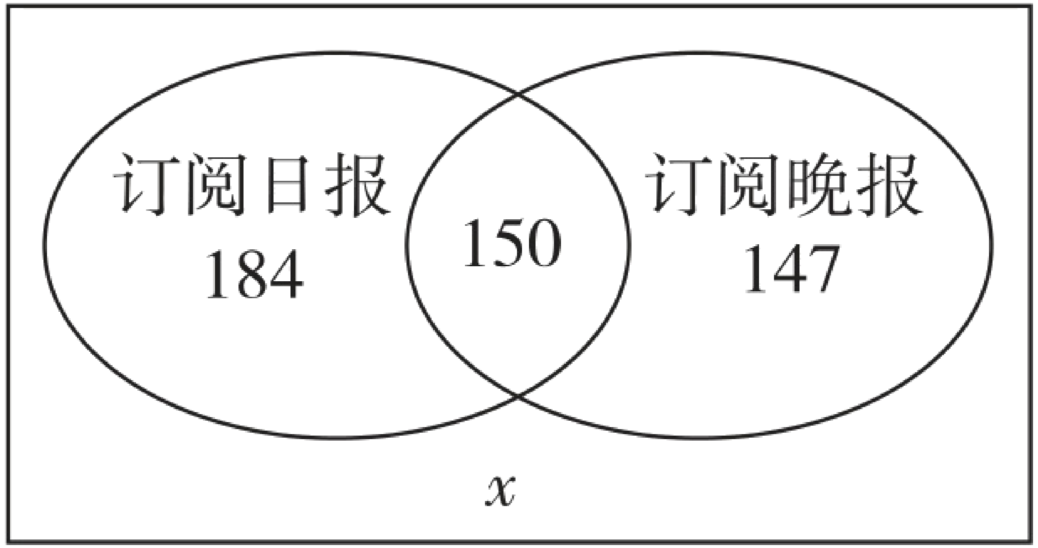


图1.3-8

则由图可得，$184+150+147+x=500$，解得$x=19$,

$500-19=481$,则至少订一种报纸的有481人.

关键能力构建

题型1 集合间的运算

例9（1）（2024·天津市宁河区期末）设集合$A=\{-3,-2,-1,0,1\}$，$B=\{-1,0,1\}$，$C=\{x|-2\leq x<0\}$，则$(A\cap C)\cup B=$（ **D** ）

A.$\{-1\}$ B.$\{-2,-1\}$ C.$\{-2,-1,1\}$ D.$\{-2,-1,0,1\}$

【解析】由题易得$A\cap C=\{-2,-1\}$，

则$(A\cap C)\cup B=\{-2,-1,0,1\}$．

(2) (2024·山东省滨州市期末)设全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$，集合$A=\{x\in\mathbf{Z}|-1\leq x\leq 4\}$，$B=\{2,3\}$，则$(\complement_U A)\cup B=$(**A**)

A.$\{-2,2,3\}$

B.$\{-2,-1,2,3\}$

C.$\{-2,-1,0,2,3\}$

D.$\varnothing$

【解析】集合$A=\{x\in\mathbf{Z}|-1\leq x\leq 4\}=\{-1,0,1,2,3,4\}$，所以$\complement_U A=\{-2\}$，则$(\complement_U A)\cup B=\{-2,2,3\}$.

例10 [教材改编P14 T4] 已知全集$U=\{x|x\leq 4\}$，集合$A=\{x|-2<x<3\}$, $B=\{x|-3\leq x\leq 2\}$，求$A\cap B$,$(\complement_U A)\cup B$,$A\cap(\complement_U B)$,$\complement_U(A\cup B)$.

【解析】如图1.3-9，在数轴上表示集合A，B，U.

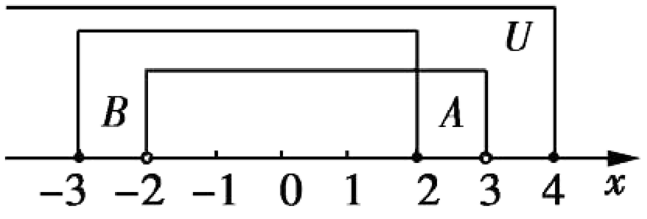


图1.3-9

易得$A \cup B = \{x| -3 \leq x < 3\}$,$A \cap B = \{x| -2 < x \leq 2\}$,

$\complement_U A = \{x|x \leq -2或3 \leq x \leq 4\}$，

$\complement_U B = \{x|x < -3或2 < x \leq 4\}$.

$\therefore (\complement_U A) \cup B = \{x|x \leq 2或3 \leq x \leq 4\}$，

$A \cap (\complement_U B) = \{x|2 < x < 3\}$,

$\complement_U (A \cup B) = \{x|x < -3或3 \leq x \leq 4\}$.

例11 [教材改编P14 T6] 已知全集$U=\{x|x$取不大于20的质数$\}$，A，B是U的两个子集，且$A\cap(\complement_U B)=\{3,5\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{7,19\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2,17\}$，则集合$A=$<u>$\{3,5,11,13\}$</u>，$B=$<u>$\{7,11,13,19\}$</u>．

【解析】全集$U=\{x|x$取不大于20的质数$\}=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$，

由$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2,17\}$，可知$\complement_U(A\cup B)=\{2,17\}$，这说明元素2,17既不属于$A$又不属于$B$，

由$A\cap(\complement_U B)=\{3,5\}$，可知元素3,5属于集合$A$，但不属于集合$B$，

由$(\complement_U A)\cap B=\{7,19\}$，可知元素7,19属于集合$B$，但不属于集合$A$，

元素11,13既属于集合A，又属于集合B，检验可知符合题意.

画出Venn图，如图1.3-10所示.

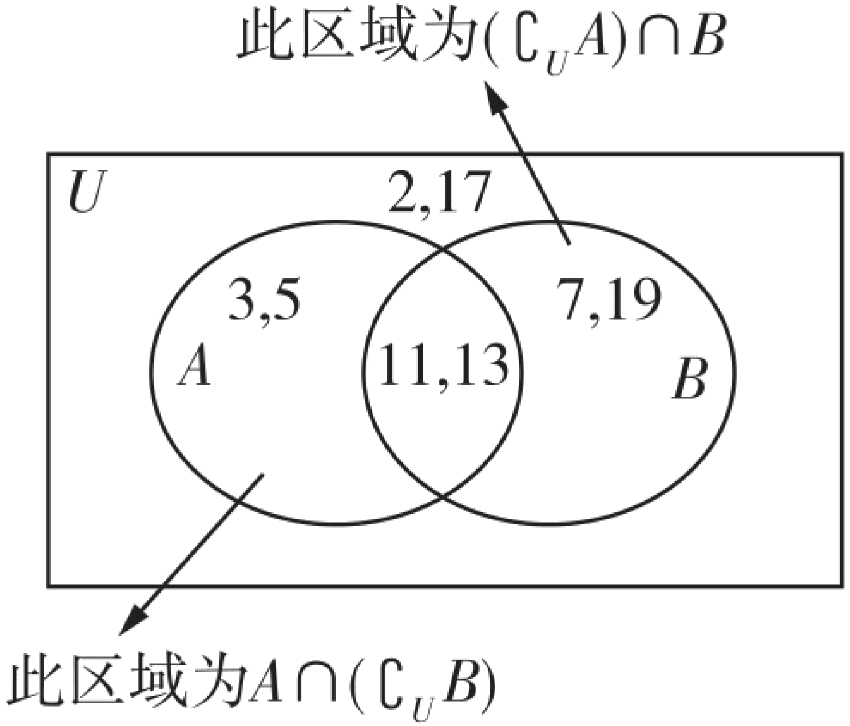


图1.3-10

故由图可知$A=\{3,5,11,13\}$，$B=\{7,11,13,19\}$.

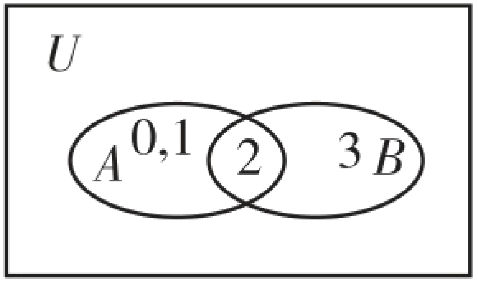
【学会了吗|变式题】

1.(2024·浙江省杭州二中期末)已知全集$U=\{0,1,2,3,4\}$，集合$A=\{0,1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则集合$\{3\}=$(C)

A.$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$　　B.$\complement_U(A\cap B)$　　C.$(\complement_U A)\cap B$　　D.$(\complement_U B)\cap A$

【解析】方法1 因为$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{3,4\}\cap\{0,1,4\}=\{4\}$，所以A错误；因为$\complement_U(A\cap B)=\{0,1,3,4\}$，所以B错误；因为$(\complement_U A)\cap B=\{3,4\}\cap\{2,3\}=\{3\}$，所以C正确；因为$(\complement_U B)\cap A=\{0,1,4\}\cap\{0,1,2\}=\{0,1\}$，所以D错误.

方法2 画出Venn图，如图D 1.3-1所示，$\{3\}=(\complement_U A)\cap B$.



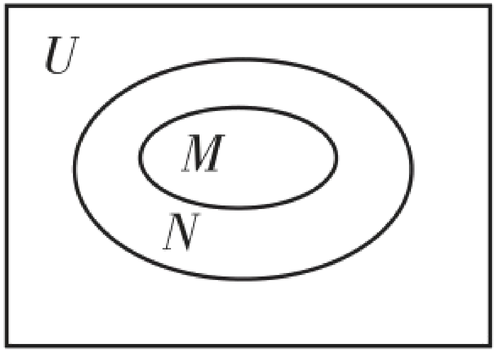
图D 1.3-1

2.(2024·湖南师大附中期末)已知全集为U，集合M，N满足$M\subsetneqq N\subsetneqq U$，则下列运算结果为$U$的是(　**D**　)

A.$M\cup N$　　B.$(\complement_U N)\cup(\complement_U M)$　　C.$M\cup(\complement_U N)$　　D.$N\cup(\complement_U M)$

【解析】$M\cup N=N\neq U$，故A不符合题意；

$(\complement_U N)\cup(\complement_U M)=\complement_U(M\cap N)=\complement_U M\neq U$，故B不符合题意；画出Venn图，如图D 1.3-2，$M\cup(\complement_U N)\neq U$，$N\cup(\complement_U M)=U$，故C不符合题意，D符合题意．



图D　1.3-2

题型2 集合运算的参数问题

例12 (2024·北京市海淀区期中)若$A=\{x^2,2x-1,-4\}$，$B=\{x-5,1-x,9\}$，$A\cap B=\{9\}$，则$x=$__-3__.

【解析】由$A\cap B=\{9\}$可知$9\in A$，则$x^2=9$或$2x-1=9$，解得$x=\pm 3$或$x=5$.

(【明易错】必须检验集合元素是否满足互异性)

①当$x=3$时，$x-5=1-x=-2$,

集合B中元素不满足互异性，故舍去$x=3$;

②当$x=-3$时，$A=\{9,-7,-4\}$，$B=\{-8,4,9\}$，满足题意;

③当$x=5$时，$A=\{25,9,-4\}$，$B=\{0,-4,9\}$，此时$A\cap B=\{-4，9\}$，这与$A\cap B=\{9\}$矛盾，故舍去$x=5$.

综上可知，$x=-3$.

例13 (2024·广东省惠州市期中)设集合$A=\{x|2a+1\leq x\leq 3a-5\}$，$B=\{x|3\leq x\leq 22\}$,则使$A\subseteq(A\cap B)$成立的实数$a$的取值集合为(C)

A.$\{a|1\leq a\leq 9\}$　　B.$\{a|6\leq a\leq 9\}$　　C.$\{a|a\leq 9\}$　　D.$\varnothing$

【解析】由$A\subseteq(A\cap B)$，得$A\subseteq B$，则

（1）当$A=\varnothing$时，$2a+1>3a-5$，解得$a<6$；

（【明易错】虽然集合A表示一个明确的不等式解集，但它仍有可能为空集，不能漏解）

（2）当$A\neq\varnothing$时，$\begin{cases}2a+1\leq 3a-5,\\ 2a+1\geq 3,\\ 3a-5\leq 22,\end{cases}$解得$6\leq a\leq 9$.

综合（1）（2）可知,使$A\subseteq(A\cap B)$成立的a的取值集合为$\{a|a\leq 9\}$.

例14 (2024·福建省福州屏东中学月考)设集合$A=\{x|x+m\geq 0\}$，$B=\{x|-2<x<4\}$，全集$U=R$，且$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，求实数$m$的取值范围为$\underline{\{m|m\geq 2\}}$.

【解析】方法1（直接法） 由$A=\{x|x+m\geq 0\}=\{x|x\geq -m\}$，得$\complement_U A=\{x|x<-m\}$，

因为$B=\{x|-2<x<4\}$，$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，

结合数轴（如图1.3-11）得$-m\leq -2$，即$m\geq 2$.

所以实数m的取值范围为$\{m|m\geq 2\}$.

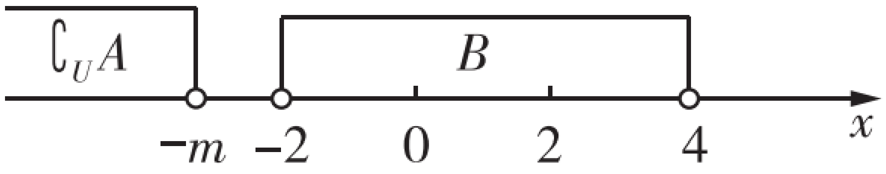


图1.3-11

方法2（转化法） 由$(\complement_U A) \cap B = \varnothing$ 可知$B \subseteq A$.

又$B = \{x | -2 < x < 4\}$，$A = \{x | x + m \geq 0\} = \{x | x \geq -m\}$，结合数轴（如图1.3-12）

得$-m \leq -2$，即$m \geq 2$.

所以实数m的取值范围为$\{m | m \geq 2\}$.

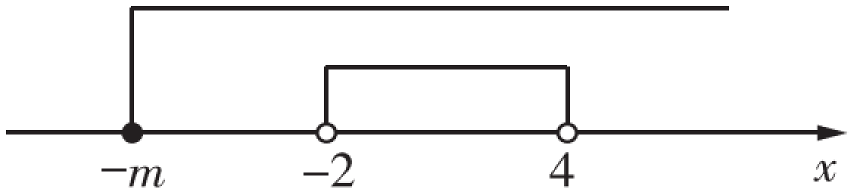


图1.3-12

【学会了吗|变式题】

3.(2024·天津市河西区新华中学)设集合$A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-5=0\}$.

【答案】集合$A=\{1,2\}$.

（1）若$A\cap B=\{2\}$，求实数a的值;

【答案】$\because A\cap B=\{2\}$，$\therefore 2\in B$，将$x=2$代入B中的方程，

得$a^2+4a+3=0$，$\therefore a=-1$或$a=-3$.

当$a=-1$时，$B=\{-2,2\}$，满足条件；

当$a=-3$时，$B=\{2\}$，也满足条件.

综上可得，a的值为-1或-3.

（2）若$A\cap B=B$，求实数a的取值范围；

【答案】$\because A\cap B=B$，$\therefore B\subseteq A$.

对于集合B中的方程，当$\Delta=4(a+1)^2-4\left(a^2-5\right)=8(a+3)<0$，即$a<-3$

时，$B=\varnothing$,满足条件；

当$\Delta=0$，即$a=-3$时，$B=\{2\}$,满足条件；

当$\Delta>0$，即$a>-3$时，$B=A=\{1,2\}$才满足条件，

即$\begin{cases}-2(a+1)=3,\\ a^2-5=2,\end{cases}$此时$a$值不存在.

综上可知，a的取值范围是$\{a|a\leq-3\}$．

（3）若$U=\mathbf{R}$，$A\cap(\complement_U B)=A$，求实数a的取值范围.

【答案】$\because A\cap(\complement_U B)=A$,$\therefore A\subseteq(\complement_U B)$,$\therefore A\cap B=\varnothing$.

①当$\Delta<0$，即$a<-3$时，$B=\varnothing$ ，满足条件;

②当$\Delta=0$,即$a=-3$时，$B=\{2\}$,$A\cap B=\{2\}$，不满足条件；

③当$\Delta>0$,即$a>-3$时，此时只需$1\notin B$且$2\notin B$即可,

将$x=2$代入B中的方程，得$a=-1$，

将$x=1$代入B中的方程，得$a=-1\pm\sqrt{3}$，

$\therefore a>-3$且$a\neq-1$且$a\neq-1\pm\sqrt{3}$.

综上可知，a的取值范围是$\{a|a<-3$或$-3<a<-1-\sqrt{3}$或$-1-\sqrt{3}<a<-1$或$-1<a<-1+\sqrt{3}$或$a>-1+\sqrt{3}\}$.

题型3　补集思想的应用——正难则反

例15　若三个关于x的方程$x^2+4x-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+\frac{a^2+5}{4}=0$，$x^2+2ax+1=0$中至少有一个方程有实根，则实数$a$的取值范围为$\underline{\{a|a\leq -1\text{或}a\geq -\frac{1}{4}\}}$．

【解析】方法1 若方程$x^2+4x-4a+3=0$有实根，

则$\Delta=16-4(3-4a)\geq 0$，解得$a\geq -\frac{1}{4}$,

故方程$x^2+4x-4a+3=0$有实根时a的取值集合$A=\{a|a\geq -\frac{1}{4}\}$．

若$x^2+(a-1)x+\frac{a^2+5}{4}=0$有实根，则$(a-1)^2-(a^2+5)\geq 0$,解得$a\leq -2$，

故方程$x^2+(a-1)x+\frac{a^2+5}{4}=0$有实根时$a$的取值集合$B=\{a|a\leq -2\}$．

若$x^2+2ax+1=0$有实根，则$4a^2-4\geq 0$,即$a^2\geq 1$，解得$a\geq 1$或$a\leq -1$，

故方程$x^2+2ax+1=0$有实根时a的取值集合$C=\{a|a\geq 1$或$a\leq -1\}$．

综上所述，满足题意的a的取值范围是$A\cup B\cup C=\{a|a\leq -1$或$a\geq -\frac{1}{4}\}$.

方法2 设已知的三个方程都无实根，此时a的取值范围为集合D．

则$\begin{cases} 16-4(3-4a)<0, \\ (a-1)^2-(a^2+5)<0, \\ 4a^2-4<0, \end{cases}$解得$-1<a<-\frac{1}{4}$.

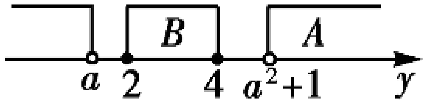
$\therefore D=\{a|-1<a<-\frac{1}{4}\}$.

$\therefore$ 三个方程中至少有一个有实根的a的取值范围为D的补集，即$\{a|a\leq-1$或$a\geq-\frac{1}{4}\}$．

【学会了吗|变式题】

4.已知集合$A=\{y|y>a^2+1或y<a\}$,$B=\{y|2\leq y\leq 4\}$，若$A\cap B\neq\varnothing$ ，则实数a的取值范围为$\underline{\{a|a>2或-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}\}}$.

【解析】已知$A=\{y|y>a^2+1$或$y<a\}$,$B=\{y|2\leq y\leq 4\}$,我们不妨考虑当$A\cap B=\varnothing$ 时a的取值范围，在数轴上表示出集合A，B，如图D 1.3-3所示.



图D 1.3-3

由$\begin{cases} a\leq 2, \\ a^2+1\geq 4, \end{cases}$得$\begin{cases} a\leq 2, \\ a\geq\sqrt{3}\text{或}a\leq-\sqrt{3}, \end{cases}$

故$a\leq-\sqrt{3}$或$\sqrt{3}\leq a\leq 2$，

即$A\cap B=\varnothing$ 时，a的取值范围为$\{a|a\leq-\sqrt{3}$或$\sqrt{3}\leq a\leq 2\}$.

故$A\cap B\neq\varnothing$ 时，a的取值范围为$\{a|a>2$或$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}\}$.

题型4 集合运算中的创新型问题

例16 (2024·河北省石家庄市期中)对于集合M，N，定义$M-N$的运算结果为图1.3-13中阴影部分表示的集合，定义$M \oplus N=(M-N) \cup (N-M)$.若$A=\{x|x+2 \geq 0，x \in \mathbf{R}\}$，$B=\{x|x<0，x \in \mathbf{R}\}$，则$A \oplus B=$(C)

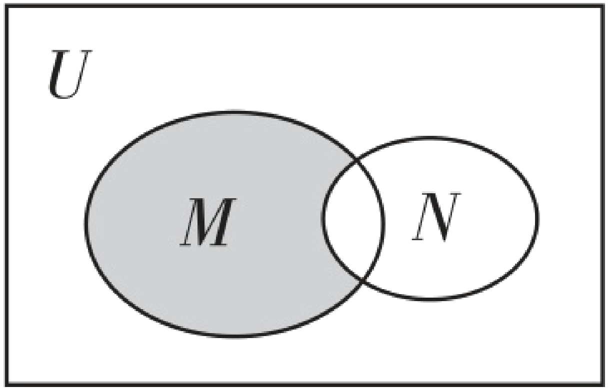


图1.3-13

A.$\{x|x \geq 0\}$　　B.$\{x|x<-2\}$

C.$\{x|x<-2或x \geq 0\}$　　D.$\{x|x \leq -2或x>0\}$

【解析】因为$M-N=M \cap (\complement_U N)$，所以

$A-B=A \cap (\complement_U B)=\{x|x \geq -2\} \cap \{x|x \geq 0\}=\{x|x \geq 0\}$，

$B-A=B \cap (\complement_U A)=\{x|x<0\} \cap \{x|x<-2\}=\{x|x<-2\}$，

所以$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)=\{x|x \geq 0\} \cup \{x|x<-2\}=\{x|x<-2或x \geq 0\}$.

例17 (2024·广东省佛山市期中)在①$B \subseteq (\complement_{\mathbf{R}}A)$，②$(\complement_{\mathbf{R}}A) \cup B = \mathbf{R}$，③$A \cap B = B$这三个条件中任选一个，补充到下面问题中.若问题中的实数a存在，求a的取值范围；若问题中的实数a不存在，请说明理由.

已知集合$A = \{x|1 \leq x \leq 4\}$，$B = \{x|a + 1 < x < 2a - 1\}$，是否存在实数$a$，使得________？