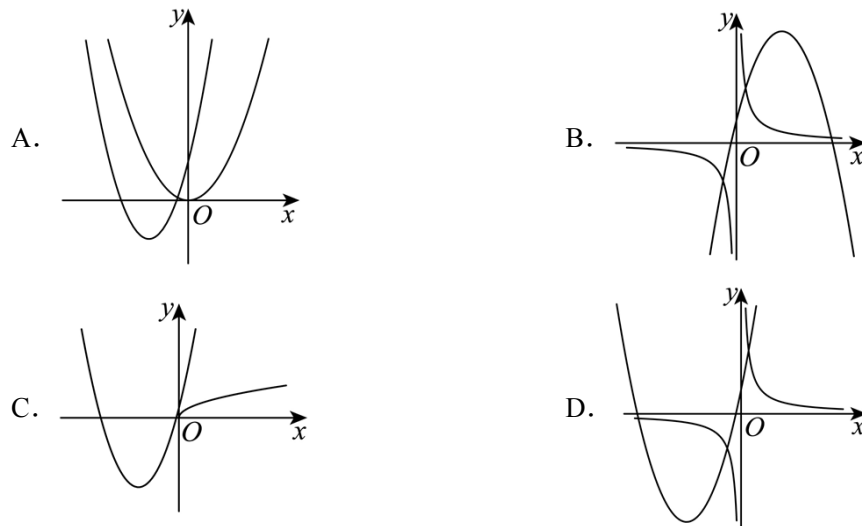


二次函数与幂函数-一轮复习考点专练

核心考点 6 幂函数的图象性质

角度 1 幂函数的图象判断及应用

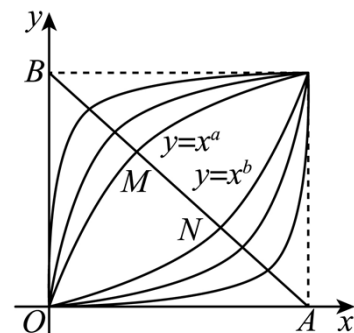
1. 函数 $f(x) = ax^2 + 4x + 1$ 与 $g(x) = x^a$ 在同一直角坐标系中的图象可能为 ()



2. (多选题) 在平面直角坐标系中, 横坐标、纵坐标均为整数的点称为整点, 若函数 $f(x)$ 的图像恰好经过 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 个整点, 则称函数 $f(x)$ 为 n 阶整点函数. 下列函数是一阶整点函数的是 ()

- A. $f(x) = \sin 2x$ B. $g(x) = x^3$
C. $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; D. $\phi(x) = \ln x$

3. 幂函数 $y = x^a$, 当 a 取不同的正数时, 在区间 $[0, 1]$ 上它们的图象是一组美丽的曲线 (如图), 设点 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, 连接 AB , 线段 AB 恰好被其中的两个幂函数 $y = x^a$, $y = x^b$ 的图象三等分, 即有 $BM = MN = NA$, 那么 $ab = \underline{\hspace{2cm}}$.



角度 2 幂函数图象过定点问题

4. 已知 $y = f_i(x) = x^{a_i}$, $i = 1, 2, \dots, 2019$ 为 2019 个不同的幂函数, 有下列命题:

- ① 函数 $y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_{2019}(x)$ 必过定点 $(1, 2019)$;
 ② 函数 $y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_{2019}(x)$ 可能过点 $(-1, 2018)$;
 ③ 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2019} = 2$, 则函数 $y = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_{2019}(x)$ 为偶函数;
 ④ 对于任意的一组数 $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$, 一定存在各不相同的 2019 个数 $i_1, i_2, \dots, i_{2019} \in \{1, 2, \dots, 2019\}$ 使得 $y = f_{i_1}(f_{i_2}(\dots f_{i_{2019}}(x)))$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数. 其中真命题的个数为

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

5. 约定: 如果一个函数的图象上存在一个点, 该点的横坐标和纵坐标相等, 那么就称该点为该函数的一个回归点, 称该函数是一个具有回归点的函数. 如果一个函数有且仅有 n 个回归点, 那么就称该函数为一个具有 n 个回归点的函数. 例如, 点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 都是函数

$f(x) = x^2$ 的回归点, 函数 $f(x) = x^2$ 是一个具有两个回归点的函数. 根据约定, 下列选项中正确的是 ()

- A. 函数 $f(x) = x^5$ 是一个具有回归点的函数
 B. 具有回归点的函数有无数个
 C. 存在无数个具有无数个回归点的函数
 D. 已知点 (a, a) 是函数 $f(x)$ 的一个回归点, 则点 $(2a, 2a)$ 也是函数 $f(x)$ 的一个回归点

6. 已知函数 $f(x) = \ln(ax - a + 1) + x^a$, 则无论 a 取何值, $f(x)$ 图象恒过的定点坐标_____;

若 $f(x)$ 在 $[2, 5]$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是_____.

核心考点 7 幂函数的单调性

角度 1 判断一般幂函数的单调性

7. 已知集合 $A = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3\right\}$, 若 $a, b, c \in A$ 且互不相等, 则使得指数函数 $y = a^x$, 对数函数 $y = \log_b x$, 幂函数 $y = x^c$ 中至少有两个函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的有序数对 (a, b, c) 的个数是 ()

A. 16 B. 24 C. 32 D. 48

8. 已知幂函数 $f(x)$ 的图像经过点 $(8, 4)$, 则下列命题正确的有 ()

A. 函数 $f(x)$ 为增函数

B. 函数 $f(x)$ 为偶函数

C. 若 $x > 1$, 则 $f(x) > 1$

D. 若 $0 < x_1 < x_2$, 则 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f(\frac{x_1+x_2}{2})$

9. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 2(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(m) = f(m+1)$, 则 $f(\frac{2}{m}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 集合 A 是由具备下列性质的函数 $f(x)$ 组成的:

①函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$; ②函数 $f(x)$ 的值域是 $[-2, 4)$; ③函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数. 试分别探究下列两小题:

(1) 判断函数 $f_1(x) = \sqrt{x} - 2 (x \geq 0)$, 及 $f_2(x) = 4 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x (x \geq 0)$ 是否属于集合 A ? 并证明.

(2) 对于 (1) 中你认为属于集合 A 的函数 $f(x)$, 不等式 $f(x) + f(x+2) < 2f(x+1)$ 是否对于任意的 $x \geq 0$ 总成立? 若不成立, 为什么? 若成立, 请证明你的结论.

角度 2 判断与幂函数相关的复合函数的单调性

11. 函数 $f(x) = (6 - x - x^2)^{\frac{3}{2}}$ 的单调递减区间为 ()

A. $[-\frac{1}{2}, 2]$

B. $[-3, -\frac{1}{2}]$

C. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

D. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

12. 设点 (x, y) 满足 $(3x + y)^5 + x^5 + 4x + y = 0$. 则点 (x, y) ()

A. 只有有限个

B. 有无限多个

C. 位于同一条直线上

D. 位于同一条抛物线上

13. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^3 + x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的解析式;

(2) 当 $x \in [m, n] (0 < m < n)$ 时, 若 $f(x)$ 的值域为 $[3m^2 + 2m - 1, 3n^2 + 2n - 1]$, 求实数 m, n 的值.

角度 3 由幂函数的单调性求参数

14. 幂函数 $y = x^{m^2-2m-3} (m \in \mathbb{Z})$ 的图象关于 y 轴对称, 且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 则 m 的值是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4ax, & x \leq 1 \\ x^a + 8, & x > 1 \end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值为 8, 最小值为 m , 若函数 $g(x) = (3 - 10m)\sqrt{x}$ 是单调增函数, 则 $a =$ _____.

角度 4 由幂函数的单调性解不等式

17. 已知函数 $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}}$, 若当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(e^x) + f\left(\frac{a}{e^x} - 2\sqrt{3}\right) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(\sqrt{3}, +\infty)$ B. $(-\infty, \sqrt{3})$ C. $(3, +\infty)$ D. $(-\infty, 3)$

18. 不等式 $(x^2 - 1)^{1011} + x^{2022} + 2x^2 - 1 \leq 0$ 的解集为: _____.

19. 已知幂函数 $f(x) = (3m^2 - 2m)x^m (m \in \mathbf{R})$ 在定义域上不单调.

(1)试问: 函数 $f(x)$ 是否具有奇偶性? 请说明理由;

(2)若 $f(a+1) + f(2a-3) < 0$, 求实数 a 的取值范围.

角度 5 由幂函数的单调性比较大小

20. 已知 $a = 0.2^{0.3}$, $b = \log_{0.3} 0.2$, $c = 0.3^{0.2}$, 则 a, b, c 大小关系为 ()

A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

21. 已知正实数 a, b, c 满足 $\log_3 a = \log_5 b$, $\log_3 b = \log_5 c$, 其中 $a > 1$, 则 ()

A. $\log_a b = \log_3 5$ B. $a > b > c$ C. $ac > b^2$ D. $2^a + 2^c > 2^{b+1}$

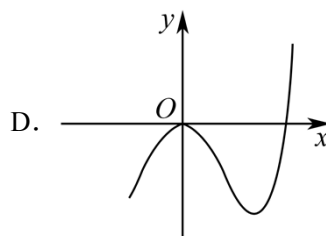
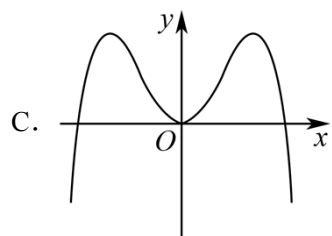
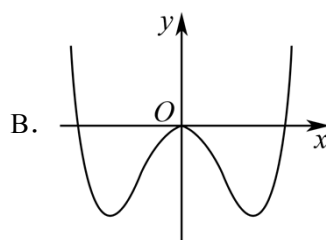
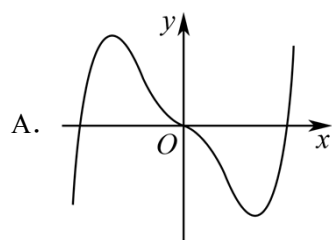
22. 已知幂函数 $f(x) = mx^n$ 的图象过点 $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, 设 $a = f(m), b = f(n), c = f(\ln 2)$, 则 a, b, c 的大小用小于号连接为_____.

核心考点 7. 幂函数的奇偶性的应用

角度 1 幂函数奇偶性的应用

23. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(2+x)$, 且在 $(2, +\infty)$ 单调递增, $f(4) = 0$,

$g(x) = x^4$, 则函数 $y = f(x+2)g(x)$ 的图象可能是 ()



24. 已知函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2 + m - 3}$ 是幂函数，对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $x_1 \neq x_2$ ，满

足 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$. 若 $a, b \in \mathbf{R}$ ，且 $f(a) + f(b)$ 的值为负值，则下列结论可能成立的有

()

A. $a + b > 0, ab < 0$

B. $a + b < 0, ab > 0$

C. $a + b < 0, ab < 0$

D. $a + b > 0, ab > 0$

25. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}, g(x) = e^{x-1} - e^{-x+1} + 1$ ，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象交点的纵坐标之和为_____.

参考答案:

1. ABC

【分析】根据各选项中二次函数图象特征确定 a 的正负,再观察幂函数图象判断即得.

【详解】对于A,二次函数开口向上,则 $a > 0$,此时存在 $g(x) = x^a$ 与图中符合,如 $a = 2$,

A可能;

对于B,二次函数开口向下,则 $a < 0$,此时存在 $g(x) = x^a$ 与图中符合,如 $a = -1$,B可能;

对于C,二次函数开口向上,则 $a > 0$,此时存在 $g(x) = x^a$ 与图中符合,如 $a = \frac{1}{2}$,C可能;

对于D,二次函数开口向上,则 $a > 0$,此时 $g(x) = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数,不符合,D不可能.

故选:ABC

2. AD

【分析】根据函数的新定义分别判断各个选项即可.

【详解】根据题中所给的函数的性质,

对于函数 $f(x) = \sin 2x$,它的图像只经过一个整点 $(0, 0)$,所以它是一阶整点函数;

对于函数 $g(x) = x^3$,它的图像上横坐标为整数的点的纵坐标都是整数,经过整点

$(0, 0), (1, 1), \dots$,所以它不是一阶整点函数;

对于函数 $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$,它的图像上横坐标为零或负正整数的点的纵坐标都是整数,故整点很

多,经过整点 $(0, 1), (-1, 3), \dots$,所以它不是一阶整点函数;

对于函数 $\phi(x) = \ln x$,它的图像只经过一个整点 $(1, 0)$,所以它是一阶整点函数.

故选:AD.

3. 1

【分析】求得 M, N 的坐标,进而求得 a, b ,从而求得 ab .

【详解】依题意, $BM = MN = NA$,所以 M, N 是线段 AB 的三等分点,

而 $A(1, 0), B(0, 1)$,所以 $M\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), N\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^a = \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^b = \frac{1}{3}$,

$$a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}, b = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}, ab = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} \cdot \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} = 1.$$

故答案为：1

4. A

【分析】根据题目中的条件和幂函数的图像与性质，对四个命题分别进行判断，从而得到答案.

【详解】命题①，因为 $y = f_i(x) = x^{a_i}$ ， $i = 1, 2 \cdots 2019$ 为 2019 个不同的幂函数，

且幂函数都经过点 $(1, 1)$ ，

所以可得函数 $y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{2019}(x)$ 的图像一定过点 $(1, 2019)$ ，所以正确；

命题②，幂函数，若定义域中可取负数时，则幂函数图像一定过 $(-1, -1)$ 或者 $(-1, 1)$

$y = f_i(x) = x^{a_i}$ ， $i = 1, 2 \cdots 2019$ 为 2019 个不同的幂函数，

若这 2019 个不同的幂函数都过 $(-1, 1)$ ，则函数 $y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{2019}(x)$ 的图像过 $(-1, 2019)$ ，

若这 2019 个不同的幂函数有一个不过 $(-1, 1)$ ，则这个幂函数必过 $(-1, -1)$ ，则函数

$y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{2019}(x)$ 的图像过 $(-1, 2017)$ ，

所以 $y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{2019}(x)$ 的图像不可能过 $(-1, 2018)$ ，所以错误；

命题③若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} = 2$ ，若 $a_1, a_2, \cdots, a_{2019}$ 这 2019 个数中出现分子为奇数，分母为偶数

的分数，则函数 $y = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_{2019}(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ，不关于原点对称，所以函数

$y = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_{2019}(x)$ 不为偶函数，所以错误.

命题④因为任意的一组数 $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ ，一定存在各不相同的 2019 个数 $i_1, i_2, \dots,$

$i_{2019} \in \{1, 2, \dots, 2019\}$ ，

则当 $a_1, a_2, \cdots, a_{2019}$ 这 2019 个数中出现 0 时，

$y = f_{i_1} \left(f_{i_2} \left(\cdots f_{i_{2019}}(x) \right) \right) = a^{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{2019}}} = 1$ ，此时 y 为常数函数，不是增函数，所以错误.

故选 A.

【点睛】本题考查幂函数的图像特点，幂函数的奇偶性和单调性，属于中档题.

5. ABC

【分析】通过计算回归点可判断 A；通过举例可判断 BCD.

【详解】A. 令 $x^5 = x$ ，解得 $x = 1, -1, 0$ ，函数 $f(x) = x^5$ 是一个具有回归点的函数，且回归点为 $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ ；

B. 具有回归点的函数有无数个，如幂函数 $f(x) = x^a$ 是回归函数，都至少存在回归点 $(1, 1)$ ；

C. 存在无数个具有无数个回归点的函数，如函数 $f(x) = x$ ， $x \in (a, b)$ ，且 $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ，则其图像上的任何一个点都是回归点；

D. 已知点 (a, a) 是函数 $f(x)$ 的一个回归点，对于 $f(x) = x^5$ ， $(1, 1)$ 是函数 $f(x)$ 的一个回归点，但 $(2, 2)$ 不是函数 $f(x)$ 的一个回归点，排除.

故选：ABC.

6. $(1, 1) \quad \left[-\frac{1}{4}, 0 \right)$

【分析】计算 $f(1)$ 的值，可得出定点坐标；分析可知，对任意的 $x \in [2, 5)$ ， $ax - a + 1 > 0$ ，利用参变量分离法可求得 $a \geq -\frac{1}{4}$ ，分 $-\frac{1}{4} \leq a < 0$ 、 $a = 0$ 、 $a > 0$ 三种情况讨论，分析函数 $f(x)$ 在 $[2, 5)$ 上的单调性，由此可得出实数 a 的取值范围.

【详解】因为 $f(1) = \ln 1 + 1^a = 1$ ，故函数 $f(x)$ 图象恒过的定点坐标为 $(1, 1)$ ；

由题意可知，对任意的 $x \in [2, 5)$ ， $ax - a + 1 > 0$ ，则 $a > -\frac{1}{x-1}$ ，

因为函数 $y = -\frac{1}{x-1}$ 在 $[2, 5)$ 上单调递增，且当 $x \in [2, 5)$ 时， $y = -\frac{1}{x-1} \in \left[-1, -\frac{1}{4} \right)$ ，

所以， $a \geq -\frac{1}{4}$.

当 $-\frac{1}{4} \leq a < 0$ 时， $u = ax - a + 1$ 在 $[2, 5)$ 上为减函数，函数 $y = \ln u$ 为增函数，

所以，函数 $g(x) = \ln(ax - a + 1)$ 、 $h(x) = x^a$ 在 $[2, 5)$ 上均为减函数，

此时，函数 $f(x) = \ln(ax - a + 1) + x^a$ 在 $[2, 5)$ 上为减函数，合乎题意；

当 $a = 0$ 且 $x \in [2, 5)$ 时， $f(x) = 1$ ，不合乎题意；

当 $a > 0$ 时， $u = ax - a + 1$ 在 $[2, 5)$ 上为增函数，函数 $y = \ln u$ 为增函数，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/008045042023006115>