历史上的三次数学危机

历史上，数学的发展有顺利也有曲折。大的挫折也可以叫做危机，危机也意味着挑战，危机的解决就意味着进步。所以，危机往往是数学发展的先导。数学发展史上有三次数学危机。每一次数学危机，都是数学的基本部分受到质疑。实际上，也恰恰是这三次危机，引发了数学上的三次思想解放，大大推动了数学科学的发展。

一、第一次数学危机

第一次数学危机是由 $\sqrt{2}$ 不能写成两

个整数之比引发的，我们在第一章已专

门讨论过，现再简要回顾一下。

这一危机发生在公元前5世纪，危机来源于：当时认为所有的数都能表示为整数比，但突然发现 $\sqrt{2}$ 不能表为整数比。

其实质是：$\sqrt{2}$ 是无理数，全体整数之比构成的是有理数系，有理数系需要扩充，要添加无理数。

当时古希腊的欧多克索斯部分地解决了这一危机。他采用了一个十分巧妙的关于“两个量之比”的新说法，回避了$\sqrt{2}$是无理数的实质，用几何的方法去处理不可公度比。这样做的结果，使几何的基础牢靠了，几何从全部数学中脱颖而出。欧几里得的《几何原本》中也采用了这一说法，以致在以后的近二千年中，几何变成了几乎是全部严密数学的基础。

但是彻底解决这一危机是在19世纪，依赖实数理论的建立。

二、第二次数学危机

第二次数学危机发生在牛顿创立微积分的十七世纪。第一次数学危机是由毕达哥拉斯学派内部提出的，第二次数学危机则是由牛顿学派的外部、贝克莱大主教提出的，是对牛顿 “无穷小量”说法的质疑引起的。

1. 危机的引发

1）牛顿的“无穷小”

牛顿的微积分是一项划时代的科学成就，蕴含着巨大的智慧和创新，但也有逻辑上的问题。我们来看一个例子。

微积分的一个来源，是想求运动物体在某一时刻的瞬时速度。在牛顿之前，只能求一段时间内的平均速度，无法求某一时刻的瞬时速度。

牛顿的思路是：让时间从 t_0 到 t_1

，　$\Delta t = t_1 - t_0$

这段时间记作　ΔS ，而这段 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$

t_0 时间里 t_1

物体走过的距离记作　。比值

Δt

便是

t_0　Δt

到　这段时间内物体的平均速度。牛

ΔS

顿

设想：　越小，这个平均速度应当越接

$\frac{\Delta S}{\Delta t}$

近

物体在时刻　的瞬时速度。当　越

例如，设自由落体在时间 下落的距离为 $S(t)$，有公式 $S(t)=\frac{1}{2}gt^{2}$，其中 g 是固定的重力加速度。我们要求物体在 t_0 的瞬时速度，先求 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$。

$$\Delta S = S(t_1)-S(t_0)=\frac{1}{2}gt_1^2-\frac{1}{2}gt_0^2$$

$$=\frac{1}{2}g[(t_0+\Delta t)^2-t_0^2]=\frac{1}{2}g[2t_0\Delta t+(\Delta t)^2]$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g(\Delta t)$$

当 Δt 变成无穷小时，右端的 $\frac{1}{2}g\cdot(\Delta t)$ 也变成无穷小，因而上式右端就可以认为是 gt_0，这就是物体在 t_0 时的瞬时速度，它是两个无穷小之比。

牛顿的这一方法很好用，解决了大量过去无法解决的科技问题。但是逻辑上不严格，遭到指责。

2）贝克莱的发难

英国的贝克莱大主教发表文章猛烈攻击牛顿的理论。

贝克莱问道：“无穷小”作为一个量，究竟是不是0？

① 如果是0，（*）式左端当 Δt 和 ΔS 变成无穷小后分母为0，就没有意义了。

如果不是0，（*）式右端的 $\frac{1}{2}g(\Delta t)$ 就不能任意去掉。

②在推出（*）式时，假定了 $\Delta t \neq 0$ 才能做除法，所以（*）式的成立是以 $\Delta t \neq 0$ 为前提的。那么，为什么又可以让 $\Delta t = 0$ 而求得瞬时

$5 \times 0 = 3 \times 0$

贝克莱还讽刺挖苦说：即然 Δt 和 ΔS 都变

成“无穷小”了，而无穷小作为一个量，既不是

0，又不是非0，那它一定是“量的鬼魂”了。

这就是著名的“贝克莱悖论”。

对牛顿微积分的这一责难并不是由数学家

提出的，但是，牛顿及他以后一百年间的数学

家，都不能有力地还击贝克莱的这种攻击。

3）实践是检验真理的唯一标准

应当承认，贝克莱的责难是击中要害的。“无穷小”的方法在概念上和逻辑上都缺乏基础。牛顿和当时的其它数学家并不能在逻辑上严格说清“无穷小”的方法。数学家们相信它，只是由于它使用起来方便有效，并且得出的结果总是对的。特别是像海王星的发现，那样鼓舞人心的例子，显示出牛顿的理论和方法的巨大威力。所以，人们不大相信贝克莱的指责。这表明，在大多数人的脑海里，“实践是检验真理的唯一标准。”

2．危机的实质

第一次数学危机的实质是“ $\sqrt{2}$ 不是有理数，而是无理数”。那么第二次数学危机的实质是什么？应该说，是极限的概念不清楚，极限的理论基础不牢固。也就是说，微积分理论缺乏逻辑基础。

其实，在牛顿把瞬时速度说成“物体所走的无穷小距离与所用的无穷小时间之比”的时候，这种说法本身就是不明确的，是含糊的。

当然，牛顿也曾在他的著作中说明，所谓“最终的比”，就是分子、分母要成为0还不是0时的比——例如（*）式中的gt，它不是“最终的量的比”，而是“比所趋近的极限”。

他这里虽然提出和使用了“极限”这

德国的莱布尼茨虽然也同时发明了微积分，但是也没有明确给出极限的定义。

正因为如此，此后一百年间的数学家，都不能满意地解释贝克莱提出的悖论。

所以，由“无穷小”引发的第二次数学危机，实质上是缺少严密的极限概念和极限理论作为微积分学的基础。

3．危机的解决

1）必要性

微积分虽然在发展，但微积分逻辑基础上存在的问题是那样明显，这毕竟是数学家的一块心病。

而且，随着时间的推移，研究范围的扩大，类似的悖论日益增多。数学家在研究无穷级数的时候，做出许多错误的证明，并由此得到许多错误的结论。由于没有严格的极限理论作为基础。数学家们在有限与无限之间任意通行（不考虑无穷级数收敛的问题）。

因此，进入19世纪时，一方面微积分取得的成就超出人们的预料，另一方面，大量的数学结构没有正确的牢固的逻辑基础，因此不能保证数学结论是正确无误的。

历史要求为微积分学说奠基。

2）严格的极限理论的建立

到19世纪，一批杰出数学家辛勤、天才的工作，终于逐步建立了严格的极限理论，并把它作为微积分的基础。

应该指出，严格的极限理论的建立是逐步的、漫长的。

① 在18世纪时，人们已经建立了极限理论，但那是初步的、粗糙的。

② 达朗贝尔在1754年指出，必须用可靠的理论去代替当时使用的粗糙的极限理论。但他本人未能提供这样的理论。

③ 19世纪初，捷克数学家波尔查诺开始将严格的论证引入数学分析，他写的《无穷的悖论》一书中包含许多真知灼见。

④ 而做出决定性工作、可称为分析学的奠基人的是法国数学家柯西（A.L. Canchy,1789—1857）。他在1821—1823年间出版的《分析教程》和《无穷小计算讲义》是数学史上划时代的著作。他对极限给出比较精确的定义，然后用它定义连续、导数、微分、定积分和无穷级数的收敛性，已与我们现在课本上的差不太多了。

3）严格的实数理论的建立

① 对以往理论的再认识

后来的一些发现，使人们认识到，极限理论的进一步严格化，需要实数理论的严格化。微积分或者说数学分析，是在实数范围内研究的。但是，下边两件事，表明极限概念、连续性、可微性和收敛性对实数系的依赖比人们想象的要深奥得多。

一件事是，1874年德国数学家魏尔斯特拉斯（，1815—1897）构造了一个“点点连续而点点不可导的函数”。

“连续函数”在直观上是函数曲线没有间断，连在一起，而“函数在一点可导”直观上是函数曲线在该点有切线。所以在直观上连续与可导有密切的联系。

这之前甚至有人还证明过：函数在连续点上都可导（当然是错误的）。根本不可想象还会有“点点连续而点点不可导的函数”。

魏尔斯特拉斯的例子是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

其中 a 是奇数，$b\in(0,1)$ ，使 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$ 。

另一件事是德国数学家黎曼（B.Riemann，1826—1866）发现，

柯西把定积分限制于连续函数是没有必要的。黎曼证明了，被积函数不连续，其定积分也可能存在。

黎曼还造出一个函数，当自变量取无理数时它是连续的，当自变量取有理数时它是不连续的。

这些例子使数学家们越来越明白，在为分析建立一个完善的基础方面，还需要再深挖一步：即需要理解实数系的更深刻的性质。

② 魏尔斯特拉斯的贡献

德国数学家魏尔斯特拉斯（**Karl Weierstrass，1815—1897**）的努力，终于使分析学从完全依靠运动学、直观理解和几何概念中解放出来。他的成功产生了深远的影响，主要表现在两方面，一方面是建立了实数系，另一方面是创造了精确的“$\varepsilon-\delta$”语言。

“ $\varepsilon-\delta$ ”语言的成功，表现在：

这一语言给出极限的准确描述，消除了历史上各种模糊的用语，诸如“最终比”、“无限地趋近于”，等等。

这样一来，分析中的所有基本概念都可以通过实数和它们的基本运算和关系精确地表述出来。

总之，第二次数学危机的核心是微积分的基础不稳固。柯西的贡献在于，将微积分建立在极限论的基础。魏尔斯特拉斯的贡献在于，逻辑地构造了实数系，建立了严格的实数理论，使之成为极限理论的基础。所以，建立数学分析（或者说微积分）基础的“逻辑顺序”是：实数理论—极限理论—微积分。而“历史顺序”则正好相反。

实数理论是学习数学分析的难点，诸如区间套定理，有限复盖定理等，在数学学院，通常也只有数学专业才比较彻底地讲授。

4）极限的“ $\varepsilon-\delta$ ”定义及“贝克莱悖论” 的消除

① 极限的“ $\varepsilon-\delta$ ”定义

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/008134044020006075