

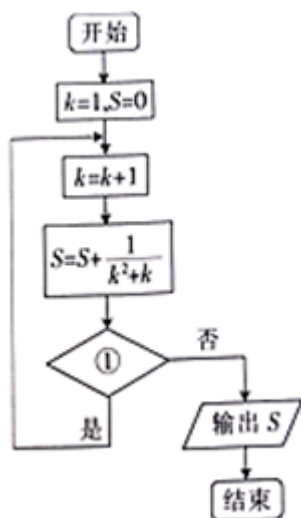
莆田市重点中学 2024 年高考数学考前最后一卷预测卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 执行如图所示的程序框图，若输出的 $S = \frac{3}{10}$ ，则①处应填写（ ）



- A. $k < 3?$ B. $k \leq 3?$ C. $k \leq 5?$ D. $k < 5?$

2. 记 M 的最大值和最小值分别为 $M_{\max}$ 和 $M_{\min}$. 若平面向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) = 2$ ，则（ ）

- A. $\left| \vec{a} - \vec{c} \right|_{\max} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$ B. $\left| \vec{a} + \vec{c} \right|_{\max} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$
- C. $\left| \vec{a} - \vec{c} \right|_{\min} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$ D. $\left| \vec{a} + \vec{c} \right|_{\min} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$

3. 设点 $A(t, 0)$ ， P 为曲线 $y = e^x$ 上动点，若点 A ， P 间距离的最小值为 $\sqrt{6}$ ，则实数 t 的值为（ ）

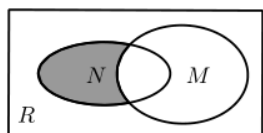
- A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $2 + \frac{\ln 2}{2}$ D. $2 + \frac{\ln 3}{2}$

4. 设复数 $z_1 = 1 + i$ ， $z_2 = 1 - i$ ，则 $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} =$ （ ）

- A. 1 B. -1 C. i D. -i

5. 已知集合 $M = \{x | x^2 - 3x - 10 < 0\}$ ， $N = \{x | y = \sqrt{9 - x^2}\}$ ，且 M 、 N 都是全集 R （ R

为实数集)的子集,则如图所示韦恩图中阴影部分所表示的集合为()



- A. $\{x|3 < x \leq 5\}$ B. $\{x|x < -3 \text{ 或 } x > 5\}$
C. $\{x|-3 \leq x \leq -2\}$ D. $\{x|-3 \leq x \leq 5\}$

6. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \leq 0, \\ x+y \leq 2, \\ x+1 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 4x + y$ 的取值范围为()

- A. $[-5, -1]$ B. $[-5, 5]$ C. $[-1, 5]$ D. $[-7, 3]$

7. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_3 = 2, a_1 + a_4 = 5$, 则 $S_6 =$ ()

- A. 10 B. 9 C. 8 D. 7

8. 设 i 是虚数单位, $a \in R, \frac{5+ai}{a+i} = 3-2i$, 则 $a =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 4a_2 + 7a_3 + \dots + (3n-2)a_n = 4n$, 则 $a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{21}a_{22} =$ ()

- A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

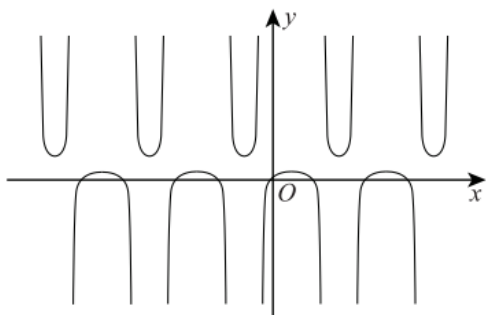
10. 在 $(1-x)^5 + (1-x)^6 + (1-x)^7 + (1-x)^8$ 的展开式中, 含 x^3 的项的系数是()

- A. 74 B. 121 C. -74 D. -121

11. 已知点 P 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, c = \sqrt{a^2 + b^2})$ 上一点, 若点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{1}{4}c^2$, 则双曲线 C 的离心率为()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

12. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+2\sin x}$ 的部分图象如图所示, 将此图象分别作以下变换, 那么变换后的图象可以与原图象重合的变换方式有()



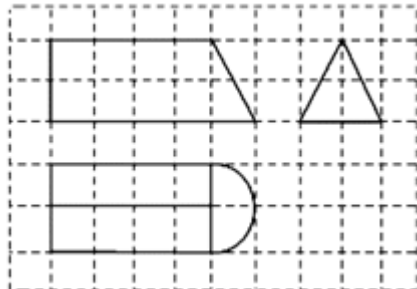
- ①绕着 x 轴上一点旋转 180° ;
 ②沿 x 轴正方向平移;
 ③以 x 轴为轴作轴对称;
 ④以 x 轴的某一条垂线为轴作轴对称.

A. ①③ B. ③④ C. ②③ D. ②④

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, F_1, F_2 是椭圆 Γ 的左、右焦点, A 为椭圆 Γ 的上顶点, 延长 AF_2 交椭圆 Γ 于点 B , 若 $\triangle ABF_1$ 为等腰三角形, 则椭圆 Γ 的离心率为_____.

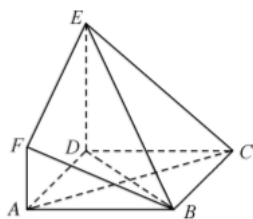
14. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为_____.



15. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $c > 2$ 且 $a + b = 1$, 则 $\frac{3ac}{b} + \frac{c}{ab} + \frac{6}{c-2}$ 的最小值是_____.
16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 的坐标为 $(0, 5)$, 点 B 是直线 $l: y = \frac{1}{2}x$ 上位于第一象限内的一点. 已知以 AB 为直径的圆被直线 l 所截得的弦长为 $2\sqrt{5}$, 则点 B 的坐标_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 3 的菱形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AF \parallel DE$, $DE = 3AF$.



(1) 求证: $AC \perp$ 平面 BDE ;

(2) 若 BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° , 求二面角 $F-BE-D$ 的正弦值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 若 $m > n > 0$, 且 $m^n = n^m$, 求证: $mn > e^2$.

19. (12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{c^2}{2\cos C}$.

(1) 求证: $\tan C = \sin A \sin B$;

(2) 若 $C = \frac{\pi}{6}$, 求 $\cos(A-B)$ 的值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + ax - a}{e^x}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 的切线方程;

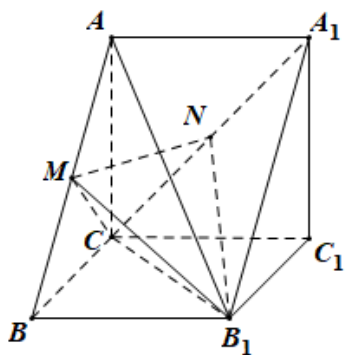
(2) 求证: $f(x)$ 的极大值恒大于 0.

21. (12 分) 已知圆 $O_1: (x+1)^2 + y^2 = 8$ 上有一动点 Q , 点 O_2 的坐标为 $(1, 0)$, 四边形 QO_1O_2R 为平行四边形, 线段 O_1R 的垂直平分线交 O_2R 于点 P .

(I) 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(II) 过点 O_2 作直线与曲线 C 交于 A, B 两点, 点 K 的坐标为 $(2, 1)$, 直线 KA, KB 与 y 轴分别交于 M, N 两点, 求证: 线段 MN 的中点为定点, 并求出 $\triangle KMN$ 面积的最大值.

22. (10 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1A \perp$ 平面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = C_1C = 1$, M, N 分别是 AB, A_1C 的中点.



(1) 求证：直线 $MN \perp$ 平面 ACB_1 ；

(2) 求点 C_1 到平面 B_1MC 的距离.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、 B

【解析】

模拟程序框图运行分析即得解.

【详解】

$$k=1, S=0; k=2, S=0+\frac{1}{2^2+2}=\frac{1}{6};$$

$$k=3, S=\frac{1}{6}+\frac{1}{3^2+3}=\frac{1}{4}; k=4, S=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2+4}=\frac{3}{10}.$$

所以①处应填写“ $k, 3?$ ”

故选： B

【点睛】

本题主要考查程序框图，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

2、 A

【解析】

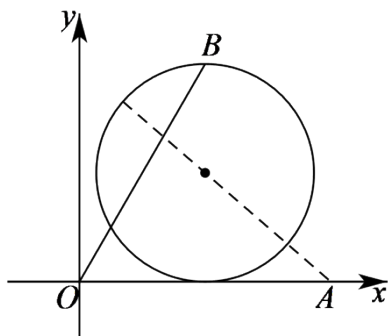
设 θ 为 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角，根据题意求得 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ，然后建立平面直角坐标系，设 $\vec{a} = \vec{OA} = (2, 0)$ ， $\vec{b} = \vec{OB} = (1, \sqrt{3})$ ，

$\vec{c} = \vec{OC} = (x, y)$ ，根据平面向量数量积的坐标运算得出点 C 的轨迹方程，将 $|\vec{a} - \vec{c}|$ 和 $|\vec{a} + \vec{c}|$ 转化为圆上的点到定点距离，利用数形结合思想可得出结果.

【详解】

由已知可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = 2$, 则 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$,

建立平面直角坐标系, 设 $\vec{a} = \vec{OA} = (2, 0)$, $\vec{b} = \vec{OB} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{c} = \vec{OC} = (x, y)$,



由 $\vec{c} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) = 2$, 可得 $(x, y) \cdot (4 - 2x, 2\sqrt{3} - 2y) = 2$,

即 $4x - 2x^2 + 2\sqrt{3}y - 2y^2 = 2$,

化简得点 C 的轨迹方程为 $(x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, 则 $|\vec{a} - \vec{c}| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$,

则 $|\vec{a} - \vec{c}|$ 转化为圆 $(x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ 上的点与点 $(2, 0)$ 的距离, $\therefore |\vec{a} - \vec{c}|_{\max} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$,

$|\vec{a} - \vec{c}|_{\min} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$,

$|\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$,

$|\vec{a} + \vec{c}|$ 转化为圆 $(x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ 上的点与点 $(-2, 0)$ 的距离,

$\therefore |\vec{a} + \vec{c}|_{\max} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{39}}{2}$, $|\vec{a} + \vec{c}|_{\min} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{39} - \sqrt{3}}{2}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查和向量与差向量模最值的求解, 将向量坐标化, 将问题转化为圆上的点到定点距离的最值问题是解答的关键, 考查化归与转化思想与数形结合思想的应用, 属于中等题.

3、C

【解析】

设 $P(x, e^x)$ ，求 $|AP|^2$ ，作为 x 的函数，其最小值是 6，利用导数知识求 $|AP|^2$ 的最小值。

【详解】

设 $P(x, e^x)$ ，则 $|AP|^2 = (x-t)^2 + e^{2x}$ ，记 $g(x) = e^{2x} + (x-t)^2$ ，

$g'(x) = 2e^{2x} + 2(x-t)$ ，易知 $g'(x) = 2e^{2x} + 2(x-t)$ 是增函数，且 $g'(x)$ 的值域是 R ，

$\therefore g'(x) = 0$ 的唯一解 x_0 ，且 $x < x_0$ 时， $g'(x) < 0$ ， $x > x_0$ 时， $g'(x) > 0$ ，即 $g(x)_{\min} = g(x_0)$ ，

由题意 $g(x_0) = e^{2x_0} + (x_0 - t)^2 = 6$ ，而 $g'(x_0) = 2e^{2x_0} + 2(x_0 - t) = 0$ ， $x_0 - t = -e^{2x_0}$ ，

$\therefore e^{2x_0} + e^{4x_0} = 6$ ，解得 $e^{2x_0} = 2$ ， $x_0 = \frac{\ln 2}{2}$ 。

$\therefore t = e^{2x_0} + x_0 = 2 + \frac{\ln 2}{2}$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查导数的应用，考查用导数求最值。解题时对 x_0 和 t 的关系的处理是解题关键。

4、A

【解析】

根据复数的除法运算，代入化简即可求解。

【详解】

复数 $z_1 = 1+i, z_2 = 1-i$ ，

则 $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

$$= \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$$

$$= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \frac{1+i}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2} = 1$$

故选：A。

【点睛】

本题考查了复数的除法运算与化简求值，属于基础题.

5、C

【解析】

根据韦恩图可确定所表示集合为 $N \cap (\complement_R M)$ ，根据一元二次不等式解法和定义域的求法可求得集合 M, N ，根据补集和交集定义可求得结果。

【详解】

由韦恩图可知：阴影部分表示 $N \cap (\complement_R M)$ ，

$$Q M = \{x | (x-5)(x+2) < 0\} = \{x | -2 < x < 5\}, N = \{x | 9 - x^2 \geq 0\} = \{x | -3 \leq x \leq 3\},$$

$$\therefore N \cap (\complement_R M) = \{x | -3 \leq x \leq -2\}.$$

故选：C。

【点睛】

本题考查集合运算中的补集和交集运算，涉及到一元二次不等式和函数定义域的求解；关键是能够根据韦恩图确定所求集合。

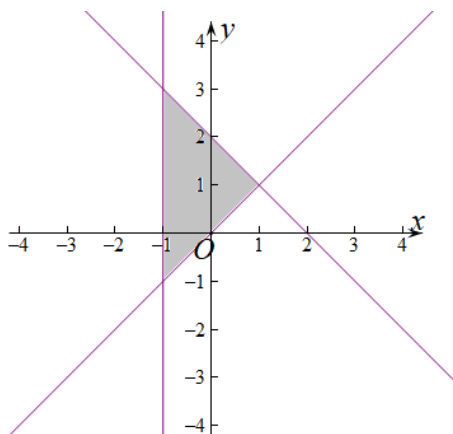
6、B

【解析】

根据约束条件作出可行域，找到使直线 $y = -4x + z$ 的截距取最值得点，相应坐标代入 $z = 4x + y$ 即可求得取值范围。

【详解】

画出可行域，如图所示：



由图可知，当直线 $z = 4x + y$ 经过点 $A(-1, -1)$ 时， z 取得最小值 -5 ；经过点 $B(1, 1)$ 时， z 取得最大值 5 ，故 $-5 \leq z \leq 5$ 。

故选：B

【点睛】

本题考查根据线性规划求范围，属于基础题。

7、B

【解析】

根据题意 $a_3 = a_1 + 2d = 2$, $a_1 + a_4 = 2a_1 + 3d = 5$, 解得 $a_1 = 4$, $d = -1$, 得到答案.

【详解】

$a_3 = a_1 + 2d = 2$, $a_1 + a_4 = 2a_1 + 3d = 5$, 解得 $a_1 = 4$, $d = -1$, 故 $S_6 = 6a_1 + 15d = 9$.

故选: B.

【点睛】

本题考查了等差数列的求和, 意在考查学生的计算能力.

8、C

【解析】

由 $\frac{5+ai}{a+i} = 3-2i$, 可得 $5+ai = (a+i)(3-2i) = 3a+2+(3-2a)i$, 通过等号左右实部和虚部分别相等即可求出 a

的值.

【详解】

解: $\because \frac{5+ai}{a+i} = 3-2i$, $\therefore 5+ai = (a+i)(3-2i) = 3a+2+(3-2a)i$

$\therefore \begin{cases} 5 = 3a+2 \\ 3-2a = a \end{cases}$, 解得: $a = 1$.

故选:C.

【点睛】

本题考查了复数的运算, 考查了复数相等的涵义. 对于复数的运算类问题, 易错点是把 i^2 当成 1 进行运算.

9、C

【解析】

利用 $(3n-2)a_n$ 的前 n 项和求出数列 $\{(3n-2)a_n\}$ 的通项公式, 可计算出 a_n , 然后利用裂项法可求出

$a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{21}a_{22}$ 的值.

【详解】

$\because a_1 + 4a_2 + 7a_3 + \dots + (3n-2)a_n = 4n$.

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 4$;

当 $n \geq 2$ 时, 由 $a_1 + 4a_2 + 7a_3 + \dots + (3n-2)a_n = 4n$,

可得 $a_1 + 4a_2 + 7a_3 + \dots + (3n-5) \cdot a_{n-1} = 4(n-1)$,

两式相减, 可得 $(3n-2)a_n = 4$, 故 $a_n = \frac{4}{3n-2}$,

因为 $a_1 = 4$ 也适合上式, 所以 $a_n = \frac{4}{3n-2}$.

依题意, $a_{n+1}a_{n+2} = \frac{16}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right)$,

故 $a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{21}a_{22} = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{61} - \frac{1}{64} \right) = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{64} \right) = \frac{5}{4}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查利用 S_n 求 a_n , 同时也考查了裂项求和法, 考查计算能力, 属于中等题.

10、D

【解析】

根据 $(1-x)^5 + (1-x)^6 + (1-x)^7 + (1-x)^8$, 利用通项公式得到含 x^3 的项为: $(C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3)(-x)^3$, 进而得到其系数,

【详解】

因为在 $(1-x)^5 + (1-x)^6 + (1-x)^7 + (1-x)^8$,

所以含 x^3 的项为: $(C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3)(-x)^3$,

所以含 x^3 的项的系数是 $-(C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3)$,

$= -(10 + 20 + 35 + 56) = -121$,

故选: D

【点睛】

本题主要考查二项展开式及通项公式和项的系数, 还考查了运算求解的能力, 属于基础题,

11、A

【解析】

设点 P 的坐标为 (m, n) , 代入椭圆方程可得 $b^2m^2 - a^2n^2 = a^2b^2$, 然后分别求出点 P 到两条渐近线的距离, 由距离之积为 $\frac{1}{4}c^2$, 并结合 $b^2m^2 - a^2n^2 = a^2b^2$, 可得到 a, b, c 的齐次方程, 进而可求出离心率的值.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/015110024122011222>