

2024 届云南省丽江市古城中学十二校高三下学期 3 月联考数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 甲、乙、丙三人参加某公司的面试，最终只有一人能够被该公司录用，得到面试结果以后甲说：丙被录用了；乙说：甲被录用了；丙说：我没被录用.若这三人中仅有一人说法错误，则下列结论正确的是（ ）

- A. 丙被录用了 B. 乙被录用了 C. 甲被录用了 D. 无法确定谁被录用了

2. 在四面体 $P-ABC$ 中， $\triangle ABC$ 为正三角形，边长为 6， $PA=6$ ， $PB=8$ ， $PC=10$ ，则四面体 $P-ABC$ 的体积为（ ）

- A. $8\sqrt{11}$ B. $8\sqrt{10}$ C. 24 D. $16\sqrt{3}$

3. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A ， B 两点（设点 A 位于第一象限），过点 A ， B 分别作抛物线 C 的准线的垂线，垂足分别为点 A_1 ， B_1 ，抛物线 C 的准线交 x 轴于点 K ，若

$\frac{|A_1K|}{|B_1K|} = 2$ ，则直线 l 的斜率为

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

4. 在平面直角坐标系中，若不等式组 $\begin{cases} x-4y+4 \leq 0 \\ 2x+y-10 \leq 0 \\ 5x-2y+2 \geq 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域内存在点 (x_0, y_0) ，使不等式 $x_0 + my_0 + 1 \leq 0$

成立，则实数 m 的取值范围为（ ）

- A. $(-\infty, -\frac{5}{2}]$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ C. $[4, +\infty)$ D. $(-\infty, -4]$

5. 设 F_1 ， F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$ ， $b > 0$) 的左、右焦点，过点 F_1 作圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 的切线与双曲线的左

支交于点 P ，若 $|PF_2| = 2|PF_1|$ ，则双曲线的离心率为（ ）

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

6. 博览会安排了分别标有序号为“1 号”“2 号”“3 号”的三辆车，等可能随机顺序前往酒店接嘉宾。某嘉宾突发奇想，设计两种乘车方案。方案一：不乘坐第一辆车，若第二辆车的车序号大于第一辆车的车序号，就乘坐此车，否则乘坐第三辆车；方案二：直接乘坐第一辆车。记方案一与方案二坐到“3 号”车的概率分别为 P_1 ， P_2 ，则（ ）

A. $P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{4}$ B. $P_1 = P_2 = \frac{1}{3}$ C. $P_1 + P_2 = \frac{5}{6}$ D. $P_1 < P_2$

7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 左顶点为 A , 点 P 椭圆上, 且 $PF \perp AF$, 若 $\tan \angle PAF = \frac{1}{2}$, 则

椭圆的离心率 e 为 ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $f(x)$ 的极大值点为 ()

A. $-\frac{\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$

9. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a \cos C + \sqrt{3}c \sin A = b + c$, 则 $A =$ ()

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

10. 集合 $A = \{x | x^2 - 3x \leq 0\}$, $B = \{x | y = \lg(2 - x)\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ B. $\{x | 1 \leq x < 3\}$ C. $\{x | 2 < x \leq 3\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 2\}$

11. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 60° , $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ()

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 0 C. 0 或 $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

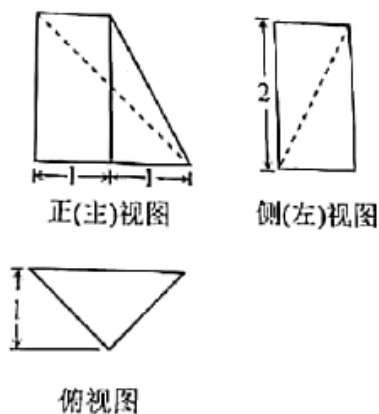
12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线 C 有相

同的焦点. 设 P 为抛物线与双曲线 C 的一个交点, 且 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{5}{7}$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ 或 3 C. 2 或 $\sqrt{3}$ D. 2 或 3

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 某四棱锥的三视图如图所示, 那么此四棱锥的体积为_____.



14. 若 $ax\left(x - \frac{2}{x}\right)^5$ 展开式中的常数项为 240, 则实数 a 的值为_____.

15. 公比为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = 2$, $S_4 - 5S_2 = 0$, 则 $S_6 - S_3$ 的值为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sin A + \sin B = \sqrt{3} \sin C$, 且 $c = 1$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*.$

(1) 若 $a_n = n$, $b_n = 2^n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} ;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} > c_n$ 恒成立.

① 当数列 $\{b_n\}$ 为等差数列时, 求证: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的公差相等;

② 数列 $\{b_n\}$ 能否为等比数列? 若能, 请写出所有满足条件的数列 $\{b_n\}$; 若不能, 请说明理由.

18. (12 分) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = |x + a| + |2x - 6|$ 有最小值 7.

(1) 求 a 的值;

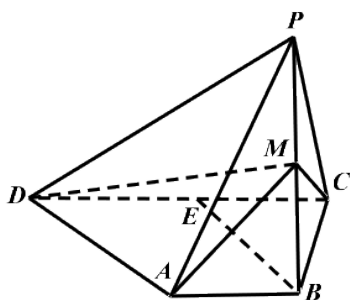
(2) 设 $m, n > 0$, $m + 4n = a$, 求证: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{9}{8}.$

19. (12 分) S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_n - S_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2.$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = 2^{a_n} - 5a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 中最小的项.

20. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形 $AB \parallel DC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 1$, $CD = 2$, $PC \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PC = \sqrt{2}$, E 为 CD 的中点.



(1) 证明: $BE \perp AP$;

(2) 设点 M 是线段 BP 上的动点, 当直线 AM 与直线 DP 所成的角最小时, 求三棱锥 $P-CDM$ 的体积.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m) + m, m \in R$.

(1) 若 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $m \leq 2$ 时, 证明: $f(x) > m$

22. (10 分) 2018 年反映现实的电影《我不是药神》引起了很大的轰动, 治疗特种病的创新药研发成了当务之急. 为此, 某药企加大了研发投入, 市场上治疗一类慢性病的特效药品 A 的研发费用 x (百万元) 和销量 y (万盒) 的统计数据如下:

研发费用 x (百万元)	2	3	6	10	13	15	18	21
销量 y (万盒)	1	1	2	2.5	3.5	3.5	4.5	6

(1) 求 y 与 x 的相关系数 r 精确到 0.01, 并判断 y 与 x 的关系是否可用线性回归方程模型拟合? (规定: $|r| \geq 0.75$ 时, 可用线性回归方程模型拟合);

(2) 该药企准备生产药品 A 的三类不同的剂型 A_1, A_2, A_3 , 并对其进行两次检测, 当第一次检测合格后, 才能进行第二次检测. 第一次检测时, 三类剂型 A_1, A_2, A_3 合格的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$, 第二次检测时, 三类剂型 A_1, A_2, A_3 合格的概率分别为 $\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. 两次检测过程相互独立, 设经过两次检测后 A_1, A_2, A_3 三类剂型合格的种类数为 X , 求 X 的数学期望.

附: (1) 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)}}$

(2) $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 347, \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 1308, \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 93, \sqrt{1785} \approx 42.25$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

假设若甲被录用了，若乙被录用了，若丙被录用了，再逐一判断即可。

【详解】

解：若甲被录用了，则甲的说法错误，乙，丙的说法正确，满足题意，

若乙被录用了，则甲、乙的说法错误，丙的说法正确，不符合题意，

若丙被录用了，则乙、丙的说法错误，甲的说法正确，不符合题意，

综上可得甲被录用了，

故选：C.

【点睛】

本题考查了逻辑推理能力，属基础题.

2、A

【解析】

推导出 $PB \perp BC$ ，分别取 BC ， PC 的中点 D, E ，连结 AD, AE, DE ，则 $AD \perp BC, AE \perp PC, DE \perp BC$ ，推导出

$AE \perp DE$ ，从而 $AE \perp$ 平面 PBC ，进而四面体 $P-ABC$ 的体积为 $V_{P-ABC} = V_{A-PBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PBC} \cdot AE$ ，由此能求出结果.

【详解】

解：Q 在四面体 $P-ABC$ 中， $\triangle ABC$ 为等边三角形，边长为 6，

$PA=6$ ， $PB=8$ ， $PC=10$ ，

$\therefore PB^2 + BC^2 = PC^2$ ，

$\therefore PB \perp BC$ ，

分别取 BC ， PC 的中点 D, E ，连结 AD, AE, DE ，

则 $AD \perp BC, AE \perp PC, DE \perp BC$ ，

且 $AD = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$ ， $DE = 4$ ， $AE = \sqrt{36-25} = \sqrt{11}$ ，

$$\therefore AE^2 + DE^2 = AD^2,$$

$\therefore AE \perp DE$,

$Q PC \perp DE = E, PC \subset \text{平面} PBC, DE \subset \text{平面} PBC$,

$\therefore AE \perp \text{平面} PBC$,

$\therefore$ 四面体 $P-ABC$ 的体积为:

$$\begin{aligned} V_{P-ABC} &= V_{A-PBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PBC} \cdot AE \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times PB \times BC \times AE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sqrt{11} = 8\sqrt{11}. \end{aligned}$$

故答案为: $8\sqrt{11}$.

【点睛】

本题考查四面体体积的求法, 考查空间中中线, 线面, 面面间的位置关系等基础知识, 考查运算求解能力.

3、C

【解析】

根据抛物线定义, 可得 $|AF| = |AA_1|$, $|BF| = |BB_1|$,

又 $AA_1 \parallel FK \parallel BB_1$, 所以 $\frac{|A_1K|}{|B_1K|} = \frac{|AF|}{|BF|} = 2$, 所以 $\frac{|A_1K|}{|B_1K|} = \frac{|AA_1|}{|BB_1|} = 2$,

设 $|BB_1| = m (m > 0)$, 则 $|AA_1| = 2m$, 则 $\cos \angle AFx = \cos \angle BAA_1 = \frac{|AA_1| - |BB_1|}{|AB|} = \frac{2m - m}{2m + m} = \frac{1}{3}$,

所以 $\sin \angle AFx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以直线 l 的斜率 $k = \tan \angle AFx = 2\sqrt{2}$. 故选 C.

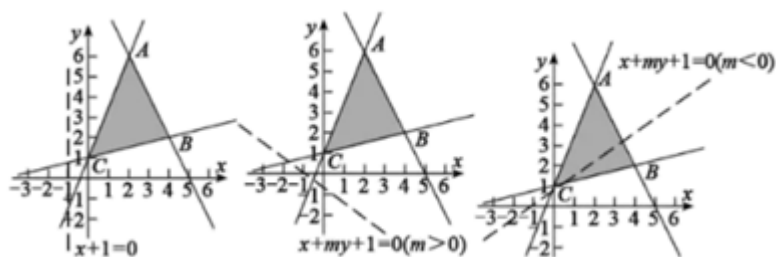
4、B

【解析】

依据线性约束条件画出可行域, 目标函数 $x_0 + my_0 + 1 \leq 0$ 恒过 $D(-1, 0)$, 再分别讨论 m 的正负进一步确定目标函数与可行域的基本关系, 即可求解

【详解】

作出不等式对应的平面区域, 如图所示:



其中 $A(2, 6)$, 直线 $x + my + 1 = 0$ 过定点 $D(-1, 0)$,

当 $m = 0$ 时, 不等式 $x + 1 \leq 0$ 表示直线 $x + 1 = 0$ 及其左边的区域, 不满足题意;

当 $m > 0$ 时, 直线 $x + my + 1 = 0$ 的斜率 $-\frac{1}{m} < 0$,

不等式 $x + my + 1 \leq 0$ 表示直线 $x + my + 1 = 0$ 下方的区域, 不满足题意;

当 $m < 0$ 时, 直线 $x + my + 1 = 0$ 的斜率 $-\frac{1}{m} > 0$,

不等式 $x + my + 1 \leq 0$ 表示直线 $x + my + 1 = 0$ 上方的区域,

要使不等式组所表示的平面区域内存在点 (x_0, y_0) ,

使不等式 $x_0 + my_0 + 1 \leq 0$ 成立, 只需直线 $x + my + 1 = 0$ 的斜率 $-\frac{1}{m} \leq k_{AD} = 2$, 解得 $m \leq -\frac{1}{2}$.

综上可得实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$,

故选: B.

【点睛】

本题考查由目标函数有解求解参数取值范围问题, 分类讨论与数形结合思想, 属于中档题

5、C

【解析】

设过点 F_1 作圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 的切线的切点为 T , 根据切线的性质可得 $OT \perp PF_1$, 且 $|OT| = a$, 再由 $|PF_2| = 2|PF_1|$ 和双曲线的定义可得 $|PF_1| = 2a, |PF_2| = 4a$, 得出 T 为 F_1P 中点, 则有 $OT \parallel PF_2$, 得到 $PF_2 \perp PF_1$, 即可求解.

【详解】

设过点 F_1 作圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 的切线的切点为 T ,

$$\therefore OT \perp PF_1, |F_1T| = \sqrt{|OF_1|^2 - b^2} = a$$

$$|PF_2| = 2|PF_1|, |PF_2| - |PF_1| = 2a, |PF_2| = 4a, |PF_1| = 2a,$$

所以 T 是 F_1P 中点, $\therefore OT \parallel PF_2, \therefore PF_1 \perp PF_2$,

$$\therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 20a^2 = |F_1F_2|^2 = 4c^2,$$

$$\frac{c^2}{a^2} = 5, \therefore e = \sqrt{5}.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查双曲线的性质、双曲线定义、圆的切线性质, 意在考查直观想象、逻辑推理和数学计算能力, 属于中档题.

6、C

【解析】

将三辆车的出车可能顺序一一列出，找出符合条件的即可.

【详解】

三辆车的出车顺序可能为：123、132、213、231、312、321

方案一坐车可能：132、213、231，所以， $P_1 = \frac{3}{6}$ ；

方案二坐车可能：312、321，所以， $P_1 = \frac{2}{6}$ ；

所以 $P_1 + P_2 = \frac{5}{6}$

故选 C.

【点睛】

本题考查了古典概型的概率的求法，常用列举法得到各种情况下基本事件的个数，属于基础题.

7、C

【解析】

不妨设 P 在第一象限，故 $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ ，根据 $\tan \angle PAF = \frac{1}{2}$ 得到 $1 - e - 2e^2 = 0$ ，解得答案.

【详解】

不妨设 P 在第一象限，故 $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ ， $\tan \angle PAF = \frac{\frac{b^2}{a}}{a+c} = \frac{1}{2}$ ，即 $a^2 - ac - 2c^2 = 0$ ，

即 $1 - e - 2e^2 = 0$ ，解得 $e = \frac{1}{2}$ ， $e = -1$ （舍去）.

故选：C.

【点睛】

本题考查了椭圆的离心率，意在考查学生的计算能力.

8、A

【解析】

求出函数的导函数，令导数为零，根据函数单调性，求得极大值点即可.

【详解】

因为 $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{2}x - \sin x$ ，

故可得 $f'(x) = -\cos x + \frac{1}{2}$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，

故可得 $x = -\frac{\pi}{3}$ 或 $x = \frac{\pi}{3}$ ，

则 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$ 单调递增，

在 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，

故 $f(x)$ 的极大值点为 $-\frac{\pi}{3}$ 。

故选：A.

【点睛】

本题考查利用导数求函数的极值点，属基础题.

9、C

【解析】

原式由正弦定理化简得 $\sqrt{3} \sin C \sin A = \cos A \sin C + \sin C$ ，由于 $\sin C \neq 0$ ， $0 < A < \pi$ 可求 A 的值.

【详解】

解：由 $a \cos C + \sqrt{3}c \sin A = b + c$ 及正弦定理得 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin C \sin A = \sin B + \sin C$ 。

因为 $B = \pi - A - C$ ，所以 $\sin B = \sin A \cos C + \cos A \sin C$ 代入上式化简得 $\sqrt{3} \sin C \sin A = \cos A \sin C + \sin C$ 。

由于 $\sin C \neq 0$ ，所以 $\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ 。

又 $0 < A < \pi$ ，故 $A = \frac{\pi}{3}$ 。

故选：C.

【点睛】

本题主要考查正弦定理解三角形，三角函数恒等变换等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，属于中档题.

10、A

【解析】

解一元二次不等式化简集合 A，再根据对数的真数大于零化简集合 B，求交集运算即可.

【详解】

由 $x^2 - 3x \leq 0$ 可得 $0 \leq x \leq 3$ ，所以 $A = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$ ，由 $2 - x > 0$ 可得 $x < 2$ ，所以 $B = \{x | x < 2\}$ ，所以

$A \cap B = \{x | 0 \leq x < 2\}$ ，故选 A.

【点睛】

本题主要考查了集合的交集运算，涉及一元二次不等式解法及对数的概念，属于中档题.

11、B

【解析】

由数量积的定义表示出向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为 60° ，再由 $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ， $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$ 代入表达式中即可求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

【详解】

由向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为 60° ，

$$\text{得 } \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{a} + \vec{b}| \cos 60^\circ,$$

$$\text{所以 } \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2},$$

$$\text{又 } |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2,$$

$$\text{所以 } 1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{1 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3}, \text{ 解得 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查向量数量积的运算和向量的模长平方等于向量的平方，考查学生的计算能力，属于基础题.

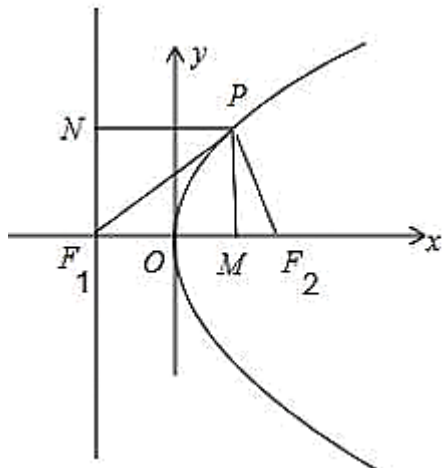
12、D

【解析】

设 $|PF_1| = m$ ， $|PF_2| = n$ ，根据 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{5}{7}$ 和抛物线性质得出 $|PF_2| = \frac{5}{7}m$ ，再根据双曲线性质得出 $m = 7a$ ， $n = 5a$ ，最后根据余弦定理列方程得出 a 、 c 间的关系，从而可得出离心率.

【详解】

过 P 分别向 x 轴和抛物线的准线作垂线，垂足分别为 M 、 N ，不妨设 $|PF_1| = m$ ， $|PF_2| = n$ ，



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/015142221112011304>