

所属类别	2020 年“华数杯”全国大学生数学建模竞赛	参赛编号

工业零件切割优化方案的设计

摘要

在零件的生产过程中，要依照零件产品尺寸从原材料中截取初级产品，不同的截取方案有不同的材料利用率，利用率直接影响产品的生产成本。我们建立了数学模型，对切割方案进行了设计。

对于问题一，求用一块原材料切割 LJ1 利用率最大的方案。为了简化模型，首先建立分层切割模型，将三维问题转化为二维问题，得出应在高度方向以 LJ1 的厚度分成 6 层。对每一层以利用率最大为目标函数，以椭圆在不同排列方式下间距、长度、宽度等的限制为约束条件建立模型。根据椭圆的性质可知交错排列显然优于对齐排列，因此在交错排列的前提下，我们用 MATLAB 计算了横排横放、横排竖放、竖排横放、竖排竖放四种排列方式的利用率。比较得出横排横放的原材料利用率最大，为 89.73%，一块原材料最多能切割 37386 个 LJ1。

对于问题二，求原材料利用率最高的切割 LJ1-LJ6 的方案。先进行降维处理，考虑两种情况：一层切割多种零件、一层仅切割一种零件。对于一层切割多种零件：根据交错排列方式和是否 LJ1-LJ6 都必须被切割，得到八种方案。对于每种方案以利用率最大为目标条件建立模型，用 LINGO 求解出各自的利用率。最后对因错排节省下的材料，重新计算利用率。对于一层仅切割一种零件：每层分别切割不同的零件，由问题一结果知横排横放利用率最大。我们用 MATLAB 求解最优方案，之后计算每层的余料，重新计算利用率。最后对上述的 9 种方案的利用率进行比较排序，找到最大的五种方案利用率为 89.13%，88.92%，88.88%，88.44%，88.23%。

对于问题三，这是一个三维下料问题。先进行降维处理，由问题二结果可知，每一层仅切割一种零件的利用率是最高的，于是对每一层使用问题二中方案一的方法，求出所能切割零件的最大数量，以及完成要求任务所需要的最少层数。为了求出所需原材料数量最少的方案，我们以所需原材料数量最少作为目标函数，以生产任务和原料尺寸等为约束条件建立模型，并用 LINGO 求解，求出至少需要 427 块原材料。

对于问题四，在问题三的基础上增加了 LJ7、LJ8、LJ9。我们发现三者的厚度同样都能被原材料的高度整除，所以均在高度方向以厚度分层。同样规定每层仅切割一种零件，并且整齐排列，这里我们发现 LJ7-LJ9 的长和宽相等，所以不考虑横排竖排和错切。最后用问题三模型进行求解，求出至少需要 645 块原材料。

对于问题五，根据问题二结果我们发现，一层只切割一种零件的利用率最大，所以首先用 MATLAB 算出一层能排列单一零件的最大数量，以及每种零件毛坯层的利润。之后我们建立了下料问题的模型，以总利润最大为目标函数，以生产要求和高度要求等作为约束条件，使用 LINGO 求解出利润最大的方案为全部材料都用来切割 LJ2，此时一块原材料可以生产 44826 个 LJ2，减去原材料成本费用后，这 100 块原材料的总利润为 149373600 元。切割后余料空间太小，不足以切割其他材料，故此时已为最佳方案。

对于每一问的结果，进行分析及灵敏度检验。结果变化不显著，说明模型稳定性好。

关键词：分层模型 三维下料问题 最小切割单元 LINGO

一、问题的提出

1.1 问题的背景

在工厂生产中，对于各种不规则零件，需要先切割出规则的初级产品，再根据工艺要求进行零件精加工。切割初级零件时，在这一步工艺中，要尽可能提高原产品的利用率，利用率影响了利润的大小。在原材料尺寸固定的前提下，截取零件的初级产品产生的废料最少、获得最高的利润是企业的追求，因此，对三维下料切割问题的研究具有的经济意义。

1.2 文献综述

零件切割问题，是在给定的一个很大的原材料范围内进行合理的规划和分析，切割出所需的小零件。它最早衍生于优化下料问题，下料问题是指将小的零件在大的原材料进行合理的几何组合，切割下料，确定下料排样方案，使得材料利用率最高。本题也可以看做一种三维下料问题。对于下料问题，最多的就是对于一维和二维问题的研究，对于三维的优化下料问题，一般优先考虑进行降维的处理，变为一种二维的下料问题，采用非线性规划[1]的方式来进行求解最佳方案。而对于一般的三维切割问题，图形不规则时，应该想办法转变为规则的图形来进行切割，比如可以建立最小且规则的切割单元来进行切割圆形的交错排列问题[2]、生成多边形来辅助切割[3]，或者采用智能算法[4]来求解不规则的切割问题，同时又考虑到，为保证利用率最大化，可以采用单位原材料上进行单一材料的切割[5]来简化计算，同时也能保证利用率和收益的最大化。

因此，本文基于上述的研究，对于题目进行了分析和解决。一方面，考虑进行三维下料问题的降维处理，另一方面，利用下料问题、交错排列问题[5]等方法来进一步解决不规则问题的切割。

1.3 问题的重述

某零件加工厂新进一种原材料用来加工零件，要求为该零件厂提供如下问题的原材料最优切割设计方案。

问题一：在一块原材料上切割 LJ1 产品，给出原材料利用率最高的切割方案。

问题二：将问题一的产品型号拓展到 LJ1-LJ6，给出利用率最高的 5 种切割方案。

问题三：求出完成 LJ1-LJ6 产品的生产任务所需原材料的数量。给出原材料总利用率最高的至多 5 种切割方案。

问题四：将问题三的产品型号拓展到 LJ1-LJ9，求出完成生产任务所需原材料的数量。给出原材料总利用率最高的至多 5 种切割方案。

问题五：给定 100 个原材料，给出总利润最大的至多 5 种切割方案。

二、模型假设

假设 1：假设切割时无失误，均正确切割。

切割失误会导致利用率降低、切割数量减少、完成目标浪费更多原材料。

假设 2：假设割缝宽度忽略不计。

若割缝宽度过大，为了达到零件规定的尺寸，需要耗费更多的原材料，导致切割方案不准确。

假设 3：假设切割的零件无变形、破损或尺寸不符合规格。

若因机器失误，会导致不能生产出要求的零件数量，影响方案设计的准确性。

假设 4：假设零件不可以拼接而成。

要保证零件完整性。

三、符号说明

符号	说明
L, W, H	原材料长、宽、高
a, b, h	椭圆半长轴、半短轴 b 、高
m_1, m_2	奇数行、偶数行
n_1, n_2	奇数行零件数、偶数行零件数
num	零件总数量
η	原材料利用率
x_i	第 i 种零件切割的最小单元的数目
s_i	第 i 种零件最小单元里的零件的总面积
$long_i, wide_i$	第 i 种零件最小单元的长度、宽度

*其他符号详见正文

四、模型的建立与求解

4.1 问题一：切割 LJ1 利用率最大的方案

4.1.1 问题的分析

问题一是求用一块原材料切割零件 LJ1 时利用率最大的方案。为了将其模型简化，首先考虑建立一个分层切割模型，将三维问题转化为二维问题，原材料可沿其长、宽、高三个方向进行分层切割，每一个分层方向上的切割厚度可由产品的长、宽、高决定。之后，选定分层方案，在每一层进行排列，根据椭圆的性质可知交错排列显然优于对齐排列，因此在交错排列的前提下考虑横排横放、横排竖放、竖排横放、竖排竖放四种情形。以利用率最大为目标函数，以椭圆在不同排列情形下的面积、长度、宽度的限制作为约束条件的单目标规划模型，用 MATLAB 对其进行求解。

4.1.2 模型的建立

4.1.2.1 分层切割模型

由于原材料仅用作切割 LJ1，为简化模型，我们首先采用分层的方式将三维切割问题转换成二维切割，按照产品长、宽、高为切割厚度对原材料长、宽、高三个方向进行分层切割。组合得到 9 种切割方式。

设原材料是长为 L ，宽为 W ，高为 H 。下图分别为原材料沿长、宽、高三个方向切割的示意图：

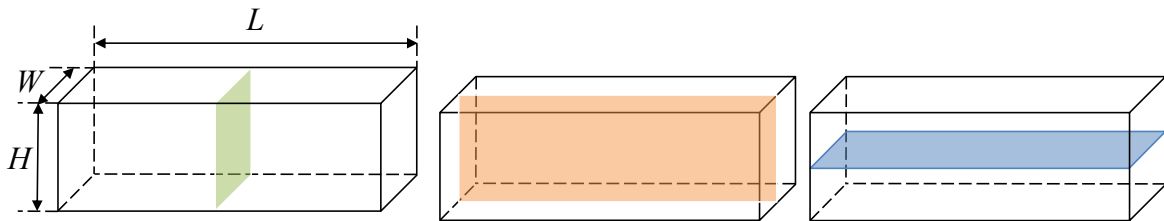


图 1 三个方向切割的示意图

以第三种为例，每层的切割厚度又存在三种选择，下图分别是以椭圆的长轴、短轴和厚度作为分层厚度切割的示意图：

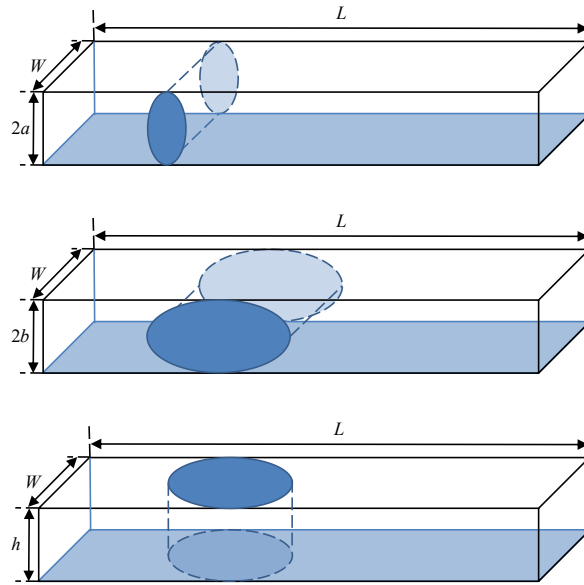


图 2 分层厚度切割的示意图

对于问题一，LJ1 厚度为 40mm，原材料宽度为 2160mm，高度为 240mm，均可被整除，又考虑到按高度切割时横截面最大，所以仅考虑在高度方向以 LJ1 厚度进行切割，即图 2 所示第三种方式。

4.1.2.2 四种排列方式

当切割时，可以选择整齐排列或是交错排列，假设有 12 个零件，两种方式产生的废料如下图所示：

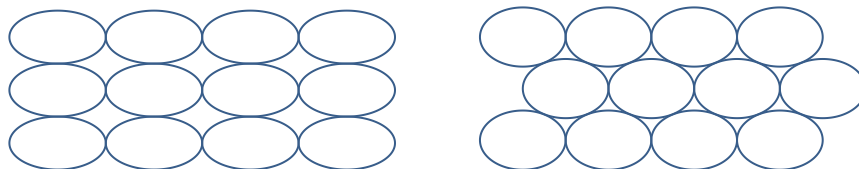


图 3 整齐排列和交错排列对比图

由上图我们可以看出，整齐排列产生的废料要远大于交错排列产生的废料，因此我们采用交错排列方式进行零件的切割。

由于原材料为长方形，且椭圆长轴与半轴长度不同，所以交错排列方式主要分为了四种，分别为横排横放、横排竖放、竖排横放、竖排竖放。

①横排横放：

第一排从原材料左边开始切割，排列整齐，第二排从第一排的前两个椭圆空隙中开始切割，这三个椭圆两两相切。之后重复，即奇数排同第一排对齐，偶数排同第二排对齐。

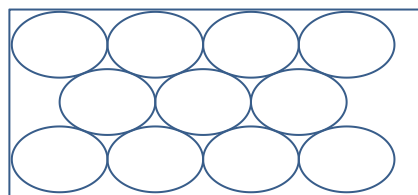


图 4 横排横放

②横排竖放:

排列方式与第①种方式相同，只是每个椭圆绕其圆心旋转了 90° 。

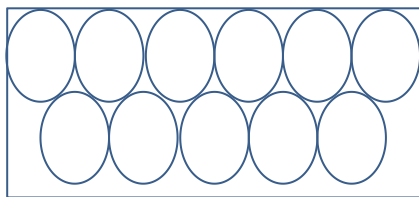


图 5 横排竖放

③竖排横放:

第一列从原材料上边开始切割，排列整齐，第二列从第一列的前两个椭圆空隙中开始切割，这三个椭圆两两相切。之后重复，即奇数列同第一列对齐，偶数列同第二列对齐。

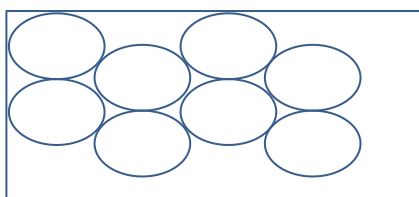


图 6 竖排横放

④竖排竖放:

排列方式与第③种方式相同，只是每个椭圆绕其圆心旋转了 90° 。

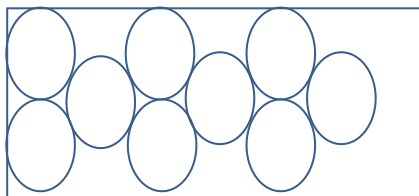


图 7 竖排竖放

4.1.2.3 切割模型的建立

一、椭圆的相切关系

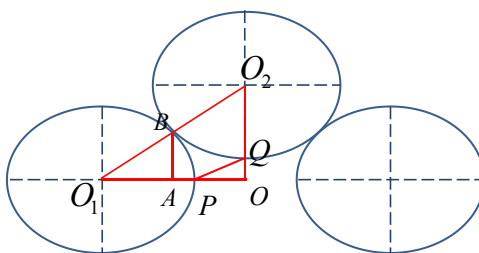


图 8 密排局部示意图

图中外部相切，切点为 B，以 O_1 为原点建立坐标轴，已知 $P(a,0)$ ，设 OP 为 p ， OQ 为 q ，则 O 点坐标为 $(a+p,0)$ ， O_2 点坐标为 $(a+p,b+q)$ ， B 为 O_1O_2 中点，即 $(\frac{a+p}{2}, \frac{b+q}{2})$ ， B 代入椭圆方程为：

$$\frac{(a+p)^2}{4a} + \frac{(b+q)^2}{4b} = 1$$

因而 y 方向上相邻椭圆的距离：

$$d = 4B_y = 2(b + q)$$

所以对于四种密排方式，可求得 d 分别为 $\sqrt{3}b$ 、 $\sqrt{3}a$ 、 $\sqrt{3}b$ 、 $\sqrt{3}a$ 。

二、模型的建立

对于每一层来进行讨论上面四种情况，我们以横排横放为例描述，分为奇数行和偶数行来分别讨论，建立了如下的模型：

设原材料的长为 L ，宽为 W ，高为 H ，设 LJ1 的椭圆半长轴为 a ，半短轴为 b ，高为 h 。设共有 m_1 行奇数行，有 m_2 行偶数行，每个奇数行有 n_1 个零件，每个偶数行有 n_2 个零件。零件总数量为 num ，利用率为 η 。

● 目标函数：

利用率为所有零件的体积占原材料体积的比率，故

$$\max \eta = \frac{num \times \pi ab \times h}{L \times W \times H}$$

其中，零件总数量为奇数行总个数和偶数行总个数之和，即

$$num = n_1 \times m_1 + n_2 \times m_2$$

● 约束条件：

① 长度约束：

对于奇数行来说，奇数行的零件数量 n_1 和每个零件椭圆长轴 $2a$ 的乘积应不超过原材料的长。即

$$n_1 \times 2a \leq L;$$

对于偶数行来说，左边会有空隙 a ，故

$$a + n_2 \times 2a \leq L;$$

② 宽度约束：

对于宽度方向，可被分成两部分，最上面和最下面的 b ，和中间的间距 d 。如下图所示：

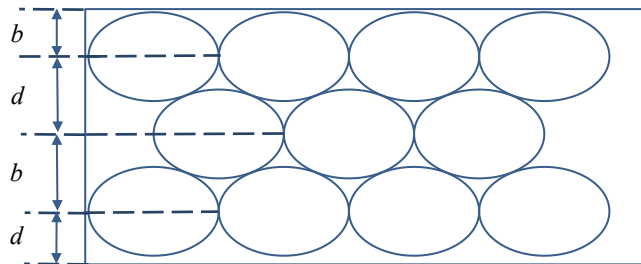


图 9 宽度约束示意图

那么公式为：

$$2b + d \times (m_1 + m_2 - 1) \leq W$$

$$d = \sqrt{3}b$$

其中， b 为椭圆短半轴， d 为圆心竖向间距， m_1 为奇数行行数， m_2 为偶数行行数， W 为原材料的宽。

同样地，可以建立其他三种密排方式的模型，这里不再赘述。

4.1.3 模型的求解

- 算法设计：

Step1 计算奇数行的零件数。

Step2 计算偶数行的零件数。若奇数行剩余长度大于半长轴 a ，偶数行零件数=奇数行零件数；若不超过 a ，偶数行零件数=奇数行零件数-1。

Step3 计算出总行数。

Step4 判断奇数行和偶数行的行数。若总行数为偶数，则奇数行行数=偶数行行数=总行数/2；反之，偶数行行数=（总行数-1）/2，奇数行行数=偶数行行数+1。

Step5 计算出 6 层的总零件数。

Step6 计算出利用率并找出最大的方案。

- 模型的结果：

我们通过 MATLAB 对模型求解，得到了如下结果：

表 1 零件利用率结果

	横排横放	横排竖放	竖排横放	竖排竖放
零件数量	37386	37236	37026	37062
原材料利用率	89.73%	89.37%	88.86%	88.95%

由上述结果看出，横排横放的原材料利用率最大，为 89.73%。因此选取此方案，方案的具体排列数据如下：

表 2 所选方案的详细结果

	横排横放
每层奇数行每行零件个数	101
每层偶数行每行零件个数	100
每层总行数	62
总层数	6
LJ1 的总数量（所有层）	37386
原料利用率	89.73%

对上述方案，我们进行了可视化处理。方案图如下：

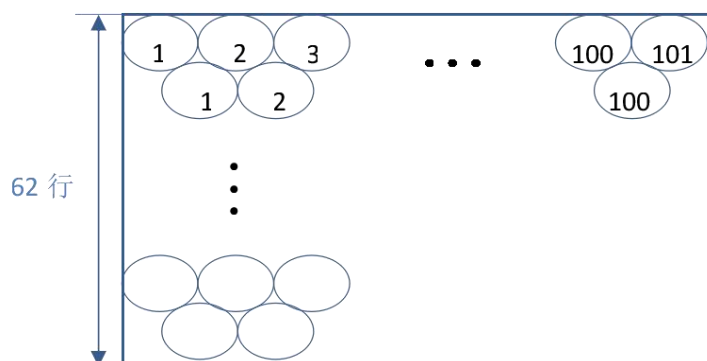


图 10 方案示意图

4.1.4 结果分析

对于上述横排横放方案，我们计算了每层奇数行的最右端余料，发现其为 0，说明偶数行最右端余料不能再进行切割，即奇数行每行零件个数比偶数行零件个数多一个，

不能再进行优化。故我们所选方案利用率达到最大，说明我们模型的原材料利用率高。

4.1.5 灵敏度分析

对于横排横放的方案，我们对原材料长度进行了改动，使长度分别上调 5%和下调 5%，运行结果如下表所示：

表 3 灵敏度分析

	上调 5%	下调 5%	未调整
利用率	89.71%	88.81%	89.73%
LJ1 的总数量	39246	35154	37386

我们发现长度变化 5%，利用率变化小于 1%，可见模型的稳定性很好。

4.2 问题二：切割 LJ1-LJ6 利用率最大的方案

4.2.1 问题的分析

对于问题二，要在原材料上切割 LJ1、LJ2、LJ3、LJ4、LJ5、LJ6 六种零件求使得原材料利用率最高的五种切割方案。同样的分为 6 层来分析。方案设计有两种情况：一层切割多种零件、一层切割一种零件。

对于一层切割多种零件：6 层原料的切割方式和零件数量相同。设定每两行为一个最小重复单元，每个单元只切割一种产品。用 MATLAB 算出每种重复单元的参数。首先在第一问的基础上认为切割产品之间交错排列更优，并采取问题一的四种交错排列方式：横排横放、横排竖放、竖排横放、竖排竖放。之后，对于每种交错排列方式，要考虑是否 LJ1-LJ6 都被切割，这样就得到八种方案。对于每种方案以利用率最大为目标条件建立模型，用 LINGO 求解出各自的利用率。最后考虑到错排节省下的材料，优化方案，算出各自最优方案对应的利用率。

对于一层切割一种零件：我们考虑用 6 层分别来切 6 种零件，对 6 层进行依次分析，同样以每层利用率最大作为目标条件，建立与问题一相似的模型，这里采用利用率最高的横排横放方式。用 MATLAB 求解最优方案，之后计算每层的余料，重新优化方案，得出最终的原材料利用率。

最后对上述的 9 种方案的利用率进行比较排序，找到最大的五种方案，并进行模型检验和灵敏度分析。

4.2.2 一层切割多种零件的模型的建立

由于奇数行和偶数行的差异性，我们对每种零件定义每两行为一个最小切割单元，之后对每一层进行最小结构单元的拼接。对于同种零件的最小切割单元之间，采用的是交错拼接；对于不同种零件的最小切割单元之间，采用的是规则拼接，即保证不重叠。

● 决策变量：

设 x_i 为 i 种零件切割的最小单元的数目， s_i 为第 i 种零件最小单元里的零件的总面积。 $long_i$ 表示第 i 种零件最小单元的长度， $wide_i$ 表示第 i 种零件最小单元的宽度， l_i 表示 i 种零件的长， w_i 表示 i 种零件的宽， c_i 表示单独放第 i 种零件的最小单元个数。
($i=1,2,\dots,6$)

● 目标函数：

利用率是所有零件的体积占原材料体积的比率，故

$$\max \eta = \frac{\sum_{i=1}^6 s_i \times x_i}{L \times W}$$

● 约束条件:

长度约束:

在长度方向上, 所有零件的长度之和应不超过原材料的长度, 即:

$$long_i \leq L(i=1,2,...,6)$$

宽度约束:

在宽度方向上, 所有零件的长度之和应不超过原材料的宽度, 即:

$$\sum_{i=1}^6 wide_i \times x_i \leq W$$

$$0 \leq x_i \leq c_i$$

其中, c_i 为了零件最小切割单元的数量上限。

4.2.3 模型的求解

算法一是对方案 1-8 进行设计, 算法二是对方案 9 的设计。

● 算法一设计

Step1 用 MATLAB 求出最小切割单元的参数: 长、宽、零件数量和面积等。

Step2 求出每一层只切割一种零件所能切割的最小单元数量, 作为数量的一个约束条件。

Step3 根据目标函数和约束条件用 lingo 进行方案的求解。

Step4 由于未考虑同种最小切割单元之间的因交错排列省下的原材料 (对于不同种零件, 我们不进行交错排列), 这里要重新考虑, 优化利用率。

● 算法二设计

Step1 以利用率最小为目标函数, 用 MATLAB 计算每种零件在一层能切割的最大数量。

Step2 对每层的余料进行计算, 若余料可切割其他零件, 重新计算 step1。

Step3 将这六层的总利用率计算出来。

● 算法结果

对这两种算法依次进行计算, 得到以下结果:

表 4 利用率比较

方案	1	2	3	4	5	6	7	8	9
利用率	87.85%	87.91%	87.96%	88.19%	88.23%	88.88%	88.44%	88.92%	89.13%

通过计算我们发现利用率最优的五种方案为: 9、8、6、7、5。我们选取这五个方案作为结果, 方案的详细结果如下:

表 5 方案结果

	方案一(9)	方案二(8)	方案三(6)	方案四(7)	方案五(5)
LJ1 的数量	6231	32100	2982	22470	5964
LJ2 的数量	7471	3210	0	12840	510
LJ3 的数量	2387	0	0	324	324
LJ4 的数量	4451	0	1311	438	438
LJ5 的数量	4928	924	924	462	1740
LJ6 的数量	5468	984	27552	1476	23616
总数量	30936	37218	32769	38010	32592
利用率	89.13%	88.92%	88.88%	88.44%	88.23%

➤ 方案一：（即表 3 中的方案 9）

我们将原材料按高分为 6 层,对于每一层分别仅放 LJ1-LJ6 中的一种,最后用 MATLAB 求出最优方案,利用率为 89.09%。

之后计算每层的余料,我们发现切割 LJ3 的有剩余原材料,可以用来切 LJ6, LJ6 的数量就由 5452 提高为 5468 个。重新用 MATLAB 计算后,得出最终的原材料利用率为 89.13%,较之前增加了 0.04%。

➤ 方案二：（即表 3 中的方案 8）

此方案是椭圆竖排竖放,且每种零件不是必须都被切割。我们对于每一层进行了 lingo 求解,得出的利用率为 83.37%。

此时每层的最小切割单元数量为 $x_i (i=1,2,\dots,6)$,未考虑错排时的余料(长度方向) A,因同种最小切割单元之间为交错排列,此时每种零件最小单元一次错排产生的余料为 L_i 。

之后计算因错排节省的余料为

$$Y = \sum_{i=1}^6 x_i \times (L_i - 1) + A \quad (1)$$

对式(1)进行计算,得出 Y 为 405.96mm,所以每层得出了 $405.96 \times 2160 \text{mm}^2$ 的材料。我们根据长度关系,发现可用以下三种方式填满:

①四个 LJ6 的单元体

②两个 LJ3 和一个 LJ1 单元体

③一个 LJ1 单元体、一个 LJ2 单元体、一个 LJ5 单元体和一个 LJ6 单元体

通过重新计算,得出第③种排列利用率最大,为 88.92%,利用率较之前提高了 5.55%。6 层共需要 32100 个 LJ1; 3210 个 LJ2; 924 个 LJ5; 984 个 LJ6。

方案示意图如下:

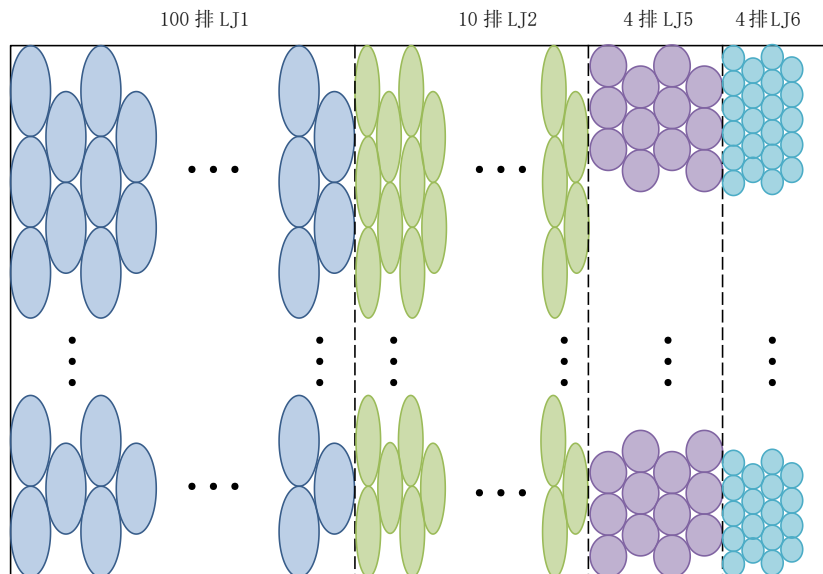


图 11 方案二的示意图

➤ 方案三：（即表 3 中的方案 6）

此方案是椭圆竖排横放，且每种零件不是必须都被切割。我们对于每一层进行了 lingo 求解，得出的利用率为 83.06%。

对根据式(1)进行计算，得出 Y 为 421.70mm，所以每层得出了 $421.70 \times 2160 \text{mm}^2$ 的材料。我们根据长度关系，发现可用以下三种方式填满：

- ①四个 LJ5 的单元体
- ②两个 LJ3 和一个 LJ4 单元体
- ③三个 LJ4 单元体和一个 LJ5 单元体

通过重新计算，得出第③种排列利用率最大，为 88.88%，利用率较之前提高了 5.82%。
6 层共需要 2982 个 LJ1；1311 个 LJ4；924 个 LJ5；27552 个 LJ6。

方案示意图如下：

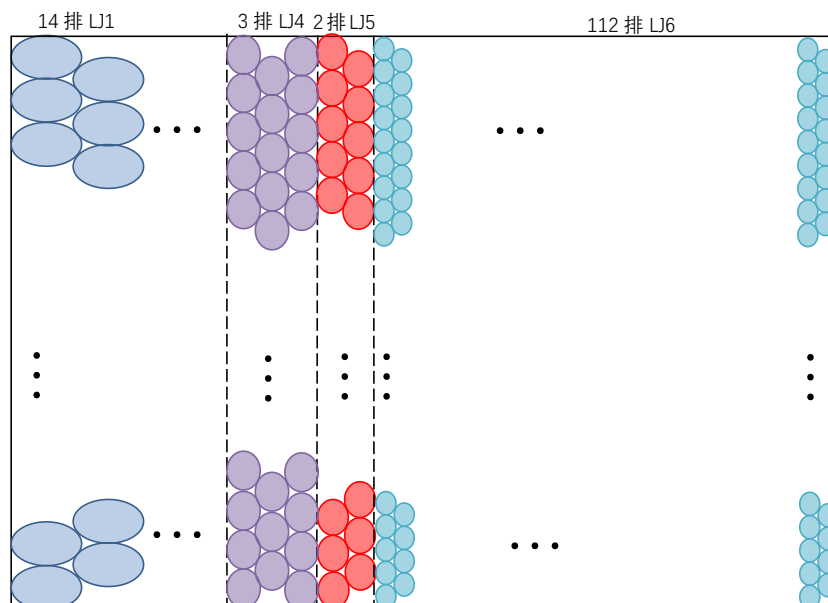


图 12 方案三的示意图

➤ 方案四：（即表 3 中的方案 7）

此方案是椭圆竖排竖放，且每种零件必须都被切割。我们对于每一层进行了 LINGO 求解，得出的利用率为 83.31%。

对根据式(1)进行计算，得出 Y 为 388.74mm，所以每层得出了 $388.74 \times 2160 \text{mm}^2$ 的材料。我们根据长度关系，发现可用以下三种方式填满：

①一个 LJ3 和两个 LJ1 单元体

②四个 LJ2 单元体

通过重新计算，得出第②种排列利用率最大，为 88.44%，利用率较之前提高了 5.14%。6 层共需要 22470 个 LJ1；12840 个 LJ2；324 个 LJ3；438 个 LJ4；462 个 LJ5；1476 个 LJ6。方案示意图如下：

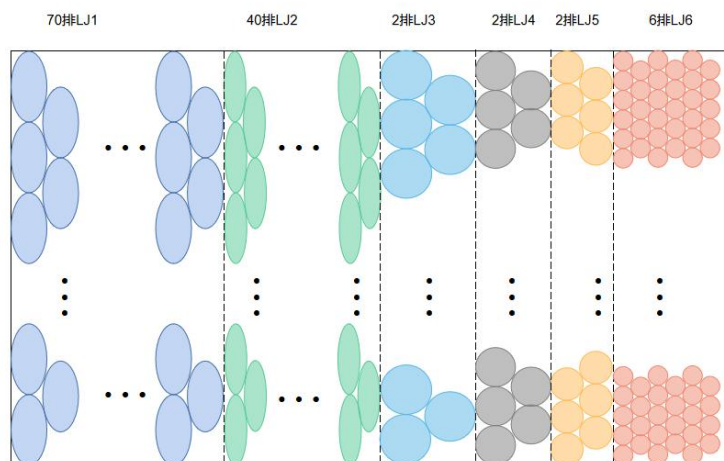


图 13 方案四的示意图

➤ 方案五：（即表 3 中的方案 5）

此方案是椭圆竖排横放，且每种零件必须都被切割。我们对于每一层进行了 LINGO 求解，得出的利用率为 83.01%。

对根据式(1)进行计算，得出 Y 为 392.76mm，所以每层得出了 $392.76 \times 2160 \text{mm}^2$ 的材料。我们根据长度关系，发现可用以下三种方式填满：

①五个 LJ1 的单元体

②两个 LJ3 和一个 LJ1 单元体

③三个 LJ5 单元体和一个 LJ1 单元体

通过重新计算，得出第③种排列利用率最大，为 88.23%，利用率较之前提高了 5.22%。6 层共需要 5964 个 LJ1；510 个 LJ2；324 个 LJ3；438 个 LJ4；1740 个 LJ5；23616 个 LJ6。

方案示意图如下：

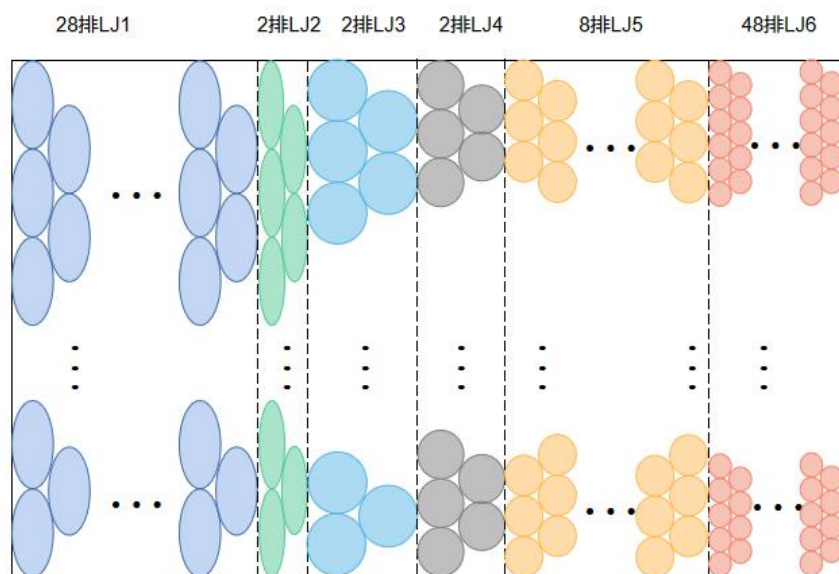


图 14 方案五的示意图

4.2.4 结果分析

通过利用率排序我们发现，最佳方案为一层仅切割一种零件。并且在实际生产中，高效工作和模具开发成本等可证明这种分层后切割具有实际意义。其次，椭圆竖排的利用率均高于横排的利用率。

4.2.5 灵敏度分析

这里我们对原材料长度进行了改动，使长度分别上调 5%和下调 5%，运行结果如下表所示：

表 6 灵敏度分析

	上调 5%	下调 5%	未调整
方案一利用率	89.07%	88.91%	89.13%
方案二利用率	88.97%	88.90%	88.92%
方案三利用率	88.91%	88.85%	88.88%
方案四利用率	88.47%	88.43%	88.44%
方案五利用率	88.27%	88.18%	88.23%

我们发现长度变化 5%，利用率变化小于 1%，可见模型的稳定性很好。

4.3 问题三：切割规定数量的 LJ1-LJ6 利用率最大的方案

4.3.1 问题的分析

对于问题三，先做降维处理，处理后的单元体称为毛胚层。观察数据可以发现，LJ1-LJ6 的厚度均为 40mm，原材料的高度为 240mm，正好可以将原材料切出 6 层 40mm 的毛胚层。由问题二的结论可知，每一层仅切割一种零件，原材料的利用率是最高的。于是再对每一层使用问题二中方案一的方法，求出每一层所能切割零件的数量，以及完成要求任务所需要的最少层数。之后以所需原材料最少作为目标函数，以生产任务和原料尺寸最为约束条件建立模型，利用 LINGO 求解。

4.3.2 模型的建立

首先以利用率最高为目标，利用问题二中方案一模型求出每层只切割零件 i 最多能

切割的数量。再求出完成切割任务要求数量需要的最小层数 $num_i (i=1,2,\dots,6)$ ，由问题二方案一的求解结果可知，LJ3 所在层完成 LJ3 切割后的余料可以用来切割 LJ6，所以只切割 LJ6 的层数 num_6 会减少，使用 MATLAB 求解的结果如下：

表 7 每种零件至少需要的毛胚层数

num_1	num_2	num_3	num_4	num_5	num_6
205	204	487	726	495	445

此处求出的所需最小层数是能够保证完成任务，且每个毛胚层只切割一个种类的零件的层数。因任务量不是每个毛胚层切割能力的整数倍，所以在每个零件所需层数的最后一层，例如在切割零件 1 的第 205 层会出现超额完成任务的部分，即会出现所切割的零件数量大于所需数量的情况。这里可以考虑设计一个毛胚层的方案，是由各个零件组合而成的，用以满足各个零件在最后一层完成任务但不超额生产的需求。

考虑到材料浪费问题，我们计算了超额完成任务部分的零件数量，发现均小于每个毛胚层切割能力的 80%，即超额部分的零件数量不多。且考虑到实际工程情况，切割成型模具的开发讲究排料工整规律，本题各个型号零件生产任务均达到百万件以上，而超额完成生产任务的零件均为百余件上下，因两者的数量差异，故在此不考虑再设计一个由 6 种零件组合而成的毛胚层。

之后，对于各个方案所需最少原材料数量的计算，模型如下：

设 x_j 为第 j 种方案所需原材料的数量 ($j=1,2,\dots,5$)， r_{ij} 表示第 j 种方案中第 i 种零件的层数 ($i=1,2,\dots,6; j=1,2,\dots,5$)。 h_i 表示第 i 种零件的厚度 ($i=1,2,\dots,6$)， $h_{\min}$ 表示六种零件最小的厚度。 H 表示原材料的高度。

● 目标函数：

目标是要求所需的原材料之和 X 最小的 5 种方案，因此目标函数如下：

$$X_{\min} = \sum_{j=1}^5 x_j$$

● 约束条件：

对于每种零件，要满足生产任务，即

$$\sum_{j=1}^5 (x_j \times r_{ij}) \geq num_i \quad i=1,2,\dots,6.$$

上式中， x_j 为第 j 种方案所需原材料的数量， r_{ij} 表示第 j 种方案第 i 种零件的层数， $num_i (i=1,2,\dots,6)$ 为只切割零件 i 最少需要的层数。

对于每种方案的厚度之和，要不超过原材料高度，且不能浪费原材料，即

$$H - h_{\min} \leq \sum_{i=1}^6 (h_i \times r_{ij}) \leq H \quad j=1,2,\dots,5.$$

r_{ij}, x_j 为整数

其中， r_{ij} 表示第 j 种方案第 i 种零件的层数， h_i 表示第 i 种零件的厚度， $h_{\min}$ 表示六种零件最小的厚度。 H 表示原材料的高度。

4.3.3 模型的求解

用 LINGO 对上述模型进行求解，得到了以下的五个方案：

表 8 完成 LJ1-LJ5 生产任务的切割方案

	方案 1	方案 2	方案 3	方案 4	方案 5
LJ1	0	0	1	2	1
LJ2	1	0	0	0	1
LJ3	1	1	0	4	0
LJ4	0	5	3	0	0
LJ5	2	0	2	0	1
LJ6	2	0	0	0	3
原材料需求量	157	123	81	42	24
利用率	88.86%	89.49%	89.69%	88.39%	89.03%

因此共需要 427 块原材料。

4.3.4 灵敏度分析

这里我们对原材料长度进行了改动，使长度分别上调 5%和下调 5%，运行结果如下表所示：

表 9 问题三灵敏度分析

	上调 5%	下调 5%	未调整
方案一利用率	88.72%	88.78%	88.86%
方案二利用率	89.63%	89.60%	89.49%
方案三利用率	89.82%	89.61%	89.69%
方案四利用率	88.10%	87.99%	88.39%
方案五利用率	88.92%	88.80%	89.03%

我们发现长度变化 5%，利用率变化小于 1%，可见模型的稳定性很好。

4.4 问题四：切割规定数量的 LJ1-LJ9 利用率最大的方案

4.4.1 问题的分析

在问题三的基础上增加了 LJ7、LJ8、LJ9，同时，我们发现三者的厚度同样都能被原材料的高度整除，所以均在高度方向以厚度分层。同样规定每层仅切割一种零件，并且整齐排列，这里我们发现长方形的长和宽相等，所以不考虑横排竖排和错切。最后用问题三模型进行求解，并进行灵敏度检验。

4.4.2 模型的建立

设 x_j 为第 j 种方案所需原材料的数量 ($j=1,2,\dots,5$)， r_{ij} 表示第 j 种方案第 i 种零件的层数 ($i=1,2,\dots,9; j=1,2,\dots,5$)。 h_i 表示第 i 种零件的厚度 ($i=1,2,\dots,9$)， $h_{\min}$ 表示六种零件最小的厚度。 H 表示原材料的高度。

- 目标函数：

目标是要求所用的原材料之和 X 最小的 5 种方案，因此目标函数如下：

$$X_{\min} = \sum_{j=1}^5 x_j$$

- 约束条件：

对于每种零件，要满足生产任务，即

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/015201144003011130>