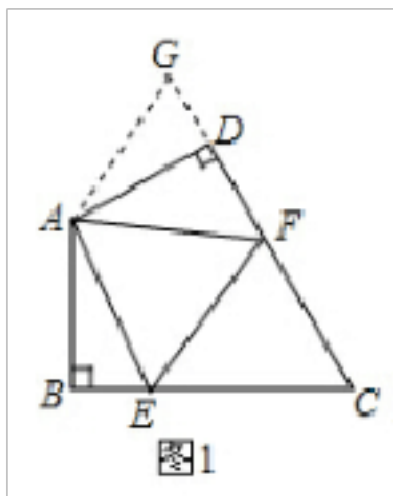


八年级数学全等三角形辅助线——截长补短专项训练

1. 【初步探索】

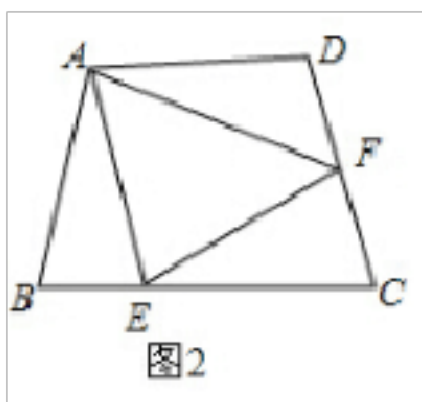
(1)如图 1：在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle ADC = 90^\circ$ ， E 、 F 分别是 BC 、 CD 上的点，且 $EF = BE + FD$ ，探究图中 $\angle BAE$ 、 $\angle FAD$ 、 $\angle EAF$ 之间的数量关系.



小王同学探究此问题的方法是：延长 FD 到点 G ，使 $DG = BE$. 连接 AG ，先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ ，再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ ，可得出结论，他的结论应是_____；

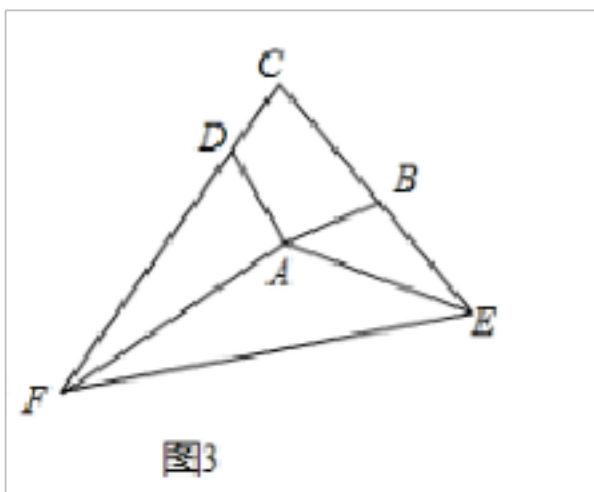
【灵活运用】

(2)如图 2，若在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， E 、 F 分别是 BC 、 CD 上的点，且 $EF = BE + FD$ ，上述结论是否仍然成立，并说明理由；



【拓展延伸】

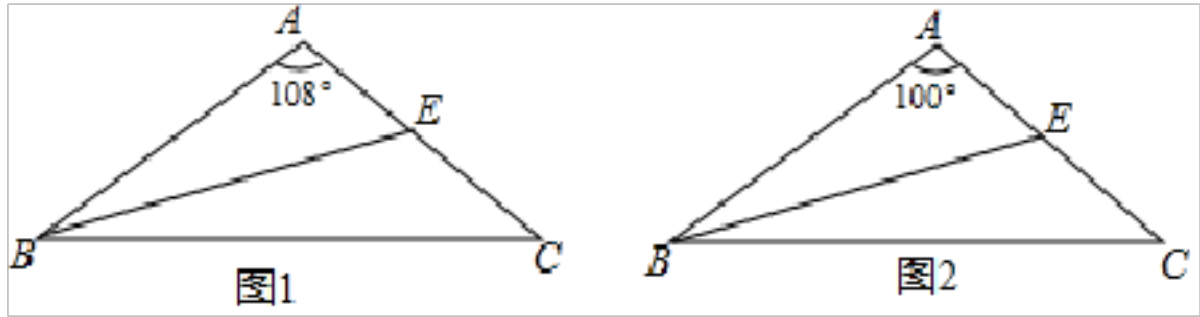
(3)如图 3，已知在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ， $AB = AD$ ，若点 E 在 CB 的延长线上，点 F 在 CD 的延长线上，如图 3 所示，仍然满足 $EF = BE + FD$ ，请写出 $\angle EAF$ 与 $\angle DAB$ 的数量关系，并给出证明过程.



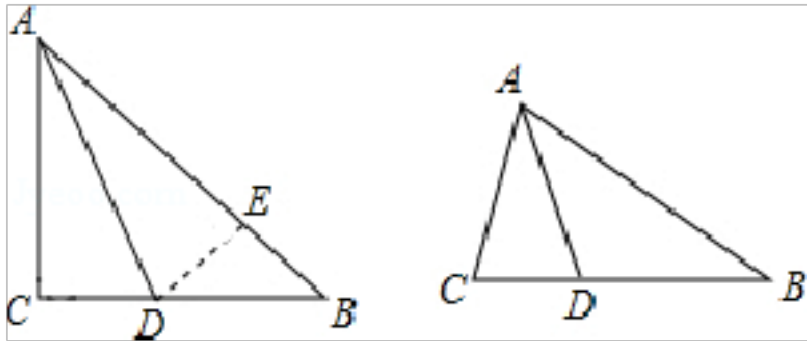
2. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， BE 平分 $\angle ABC$ 交边 AC 于 E 。

(1) 如图 (1)，当 $\angle BAC = 108^\circ$ 时，证明： $BC = AB + CE$ ；

(2) 如图 (2)，当 $\angle BAC = 100^\circ$ 时，(1) 中的结论还成立吗？若不成立，是否有其他两条线段之和等于 BC ，若有请写出结论并完成证明。



3. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，交 BC 于点 D 。如果作辅助线 $DE \perp AB$ 于点 E 。



(1) 猜想 AC 、 CD 、 AB 三条线段之间的数量关系为_____。

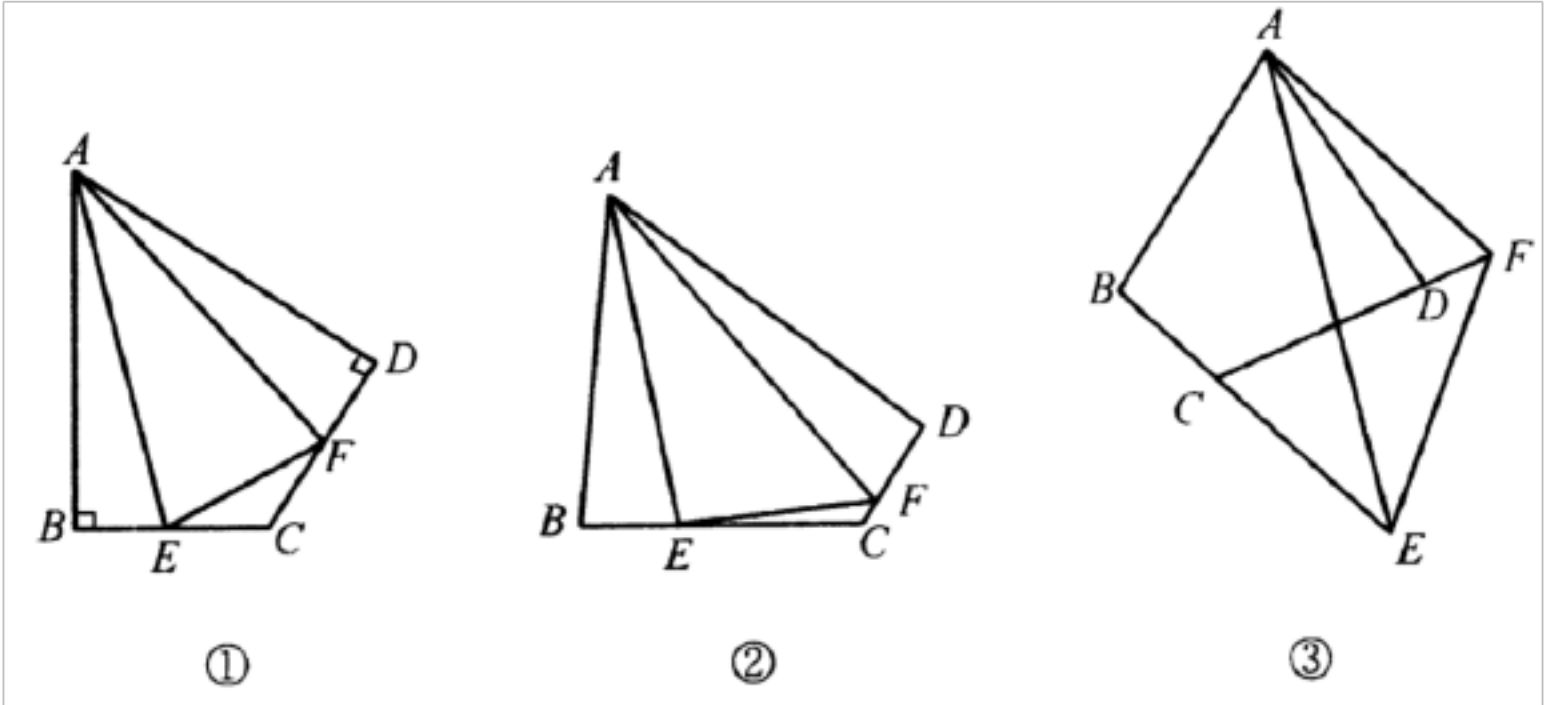
(2) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 2\angle B$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，交 BC 于点 D 。(1) 中的结论是否仍然成立？若不成立，试说明理由；若成立，请证明。

(3) 把题目中“ $\angle B = 45^\circ$ ”去掉，换上条件“ $AC = 3$ ， $BC = 4$ ”，其它条件不变，则 $CD =$ _____。

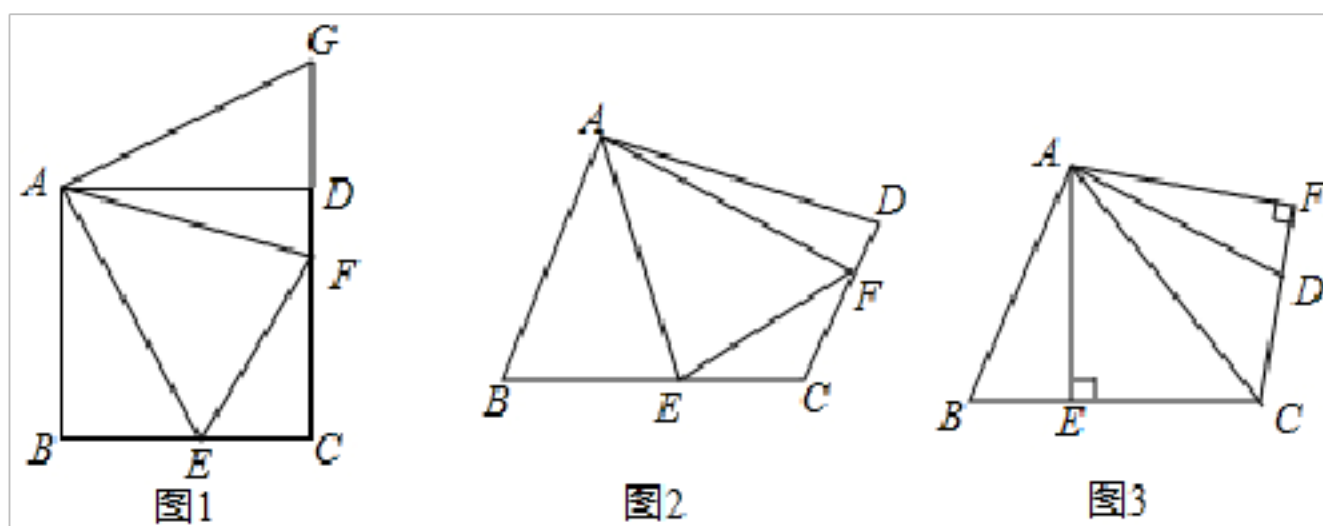
4. (1)如图①，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ， E, F 分别是边 BC, CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$.求证： $EF = BE + DF$.

(2)如图②，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， E, F 分别是边 BC, CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ ，(1)中的结论是否仍然成立？

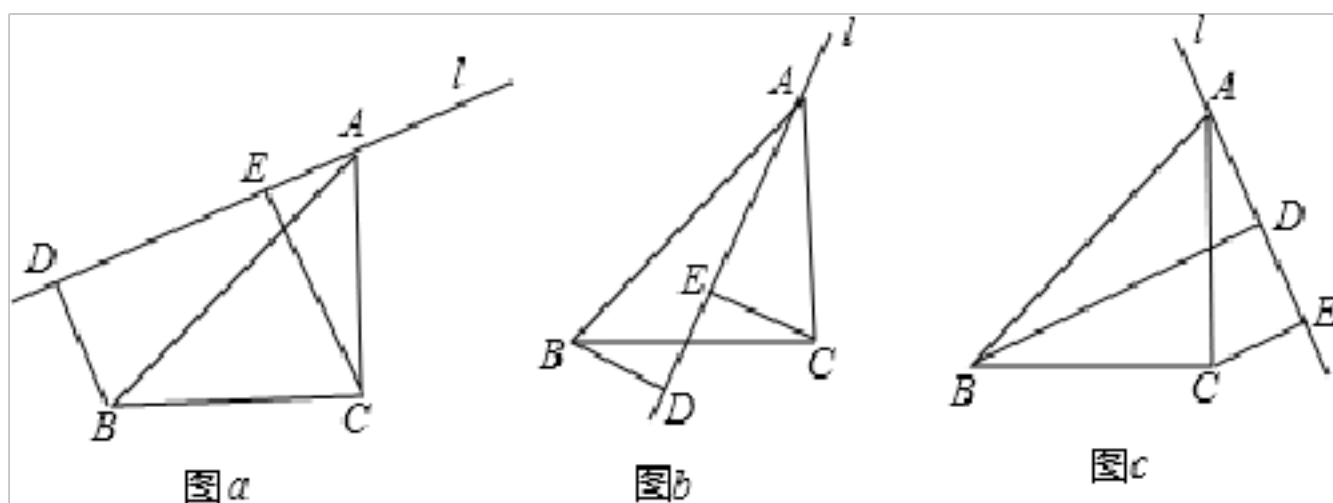
(3)如图③，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， E, F 分别是边 BC, CD 延长线上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ ，(1)中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请写出它们之间的数量关系，并证明.



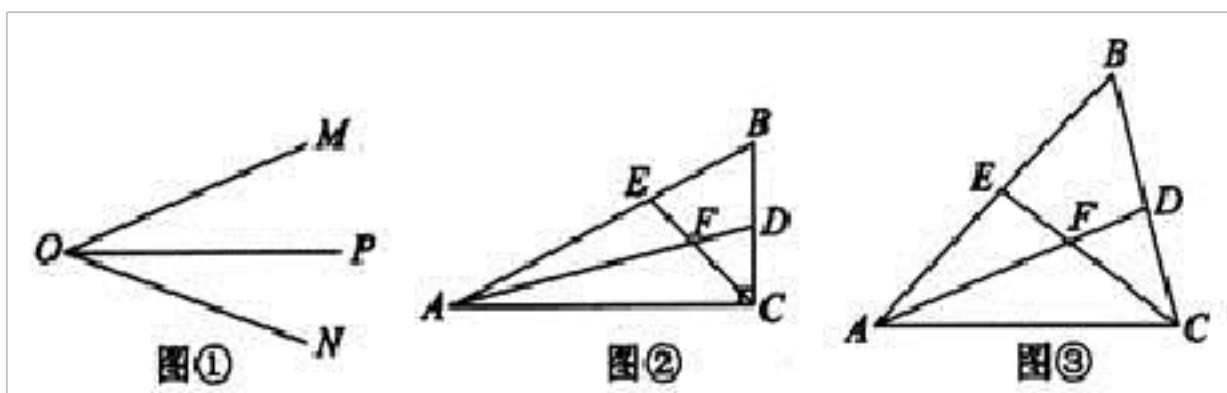
5. (1) 如图 1，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \angle ADC = \angle CBA = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ，点 E 、 F 分别在四边形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，点 G 在 CD 的延长线上， $BE = DG$ ，连接 AG ，求证： $EF = BE + FD$ 。
- (2) 如图 2，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD \neq 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，则当 $\angle BAD = 2\angle EAF$ 时，仍有 $EF = BE + FD$ 成立吗？说明理由。
- (3) 如图 3，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD \neq 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， AC 平分 $\angle BCD$ ， $AE \perp BC$ 于 E ， $AF \perp CD$ 交 CD 延长线于 F ，若 $BC = 9$ ， $CD = 4$ ，则 $CE = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（不需证明）



6. 如图， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ，直线 l 经过点 A 且绕点 A 在 $\triangle ABC$ 所在平面内转动，作 $BD \perp l$ ， $CE \perp l$ ， D 、 E 为垂足。
- (1) 如图 a，求证： $DA + DB = 2DE$ ；
- (2) 在图 b 和图 c 中，(1) 的结论是否成立？若成立，请说明理由；若不成立？直接写出 DE 、 DA 、 DB 三条线段的数量关系。



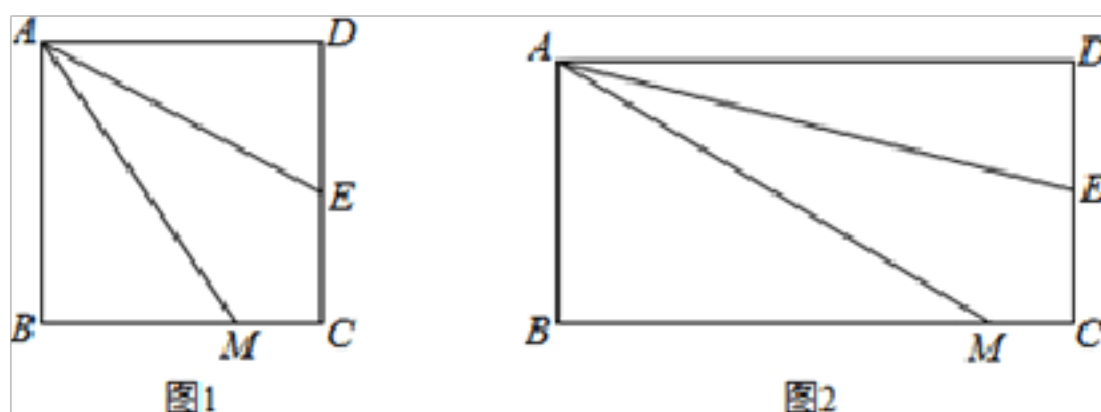
7. 如图①， OP 是 $\angle MON$ 的平分线，请你利用该图形画一对以 OP 所在直线为对称轴的全等三角形．请你参考这个作全等三角形的方法，解答下列问题：



(1) 如图②，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB$ 是直角， $\angle B = 60^\circ$ ， AD ， CE 分别是 $\angle BAC$ ， $\angle BCA$ 的平分线， AD ， CE 相交于点 F ．请你判断并写出 FE 与 FD 之间的数量关系；

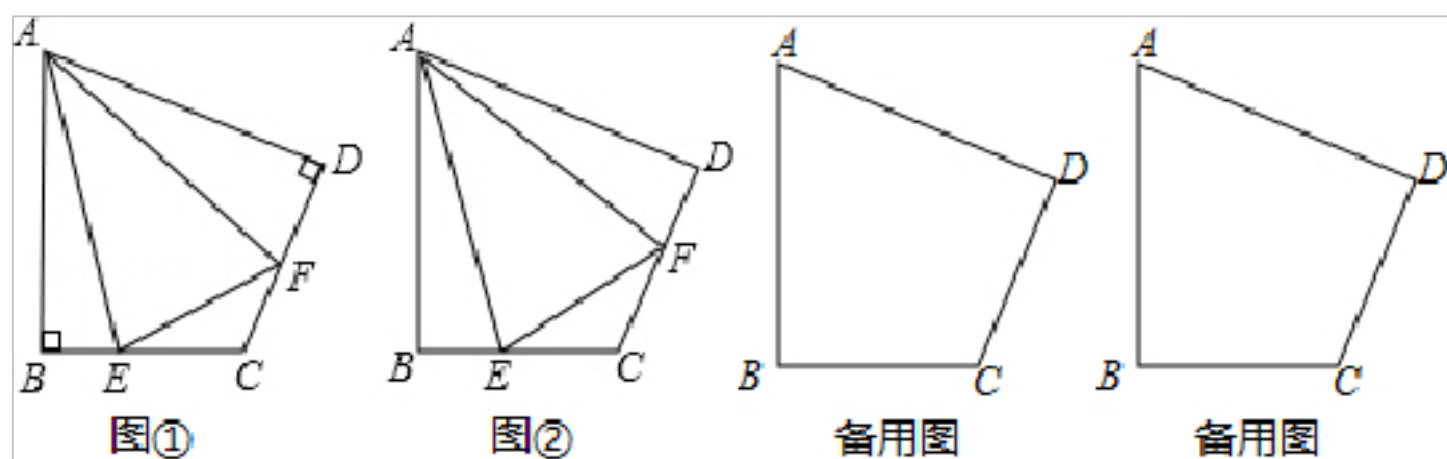
(2) 如图③，在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle ACB$ 不是直角，而 (1) 中的其它条件不变，请问，你在 (1) 中所得结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请说明理由．

8. 如图 1，四边形 $ABCD$ 是正方形， M 是 BC 边上的一点， E 是 CD 边的中点， AE 平分 $\angle DAM$ ．



- (1) 证明： $AM = AD + MC$ ；
- (2) $AM = DE + BM$ 是否成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由；
- (3) 若四边形 $ABCD$ 是长与宽不相等的矩形，其他条件不变，如图 2，探究展示 (1)、(2) 中的结论是否成立？请分别作出判断，不需要证明．

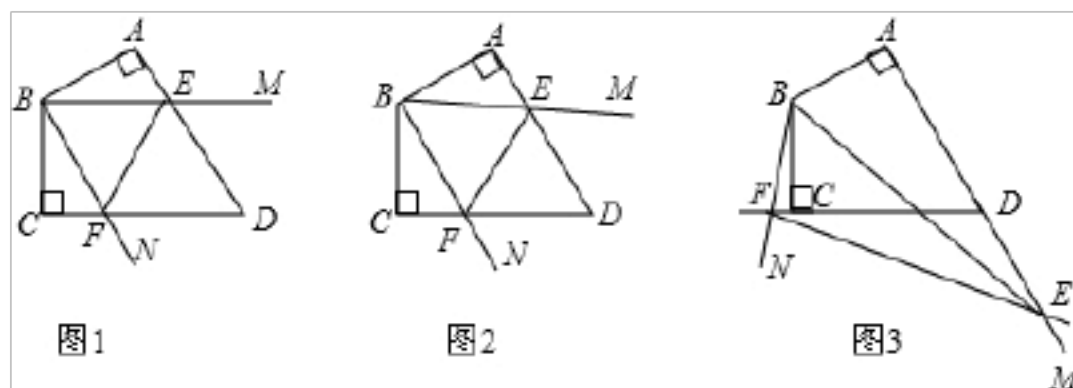
9. (1) 如图①，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ， E, F 分别是边 BC ， CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ 。请直接写出线段 EF ， BE ， FD 之间的数量关系：
_____；



- (2) 如图②，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， E, F 分别是边 BC ， CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ ，(1) 中的结论是否仍然成立？请写出证明过程：

- (3) 在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， E, F 分别是边 BC ， CD 所在直线上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ 。请直接写出线段 EF ， BE ， FD 之间的数量关系：

10. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $BC \perp CD$, $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle MBN = 60^\circ$, $\angle MBN$ 绕 B 点旋转, 它的两边分别交 AD , DC (或它们的延长线) 于 E , F .



(1) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时 (如图 1), 求证: $AE + CF = EF$.

(2) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时, 在图 2 和图 3 这两种情况下, 上述结论是否成立? 若成立, 给出证明; 若不成立, 线段 AE , CF , EF 又有怎样的数量关系? 请写出你的猜想, 并给予证明.

小明第 (1) 问的证明步骤是这样的:

延长 DC 到 Q 使 $CQ = AE$,

连接 BQ ,

证出 $\triangle BAE \cong \triangle BCQ$ 得到 $BE = BQ$, $\angle ABE = \angle CBQ$;

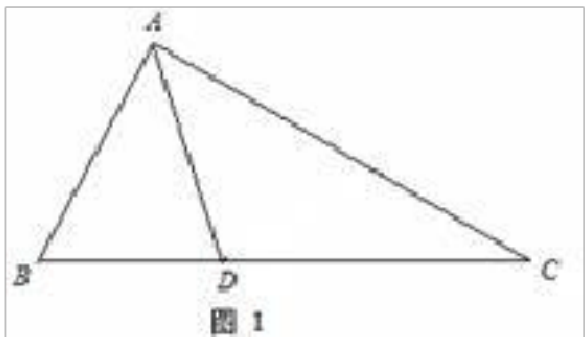
再证 $\triangle BEF \cong \triangle BQF$, 得到 $EF = FQ$, 证出 $EF = CF + CQ$, 即 $EF = CF + AE$.

请你仿照小明的证题步骤完成第 (2) 问的证明.

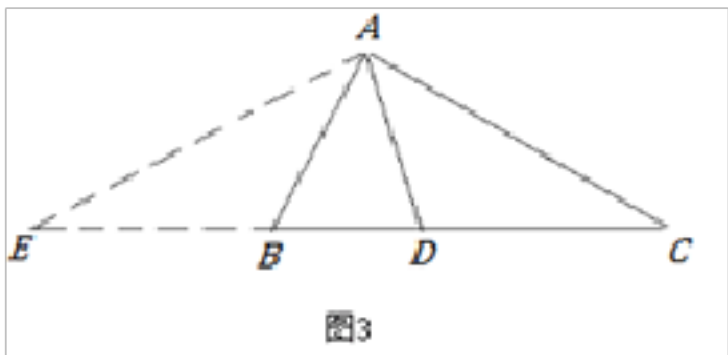
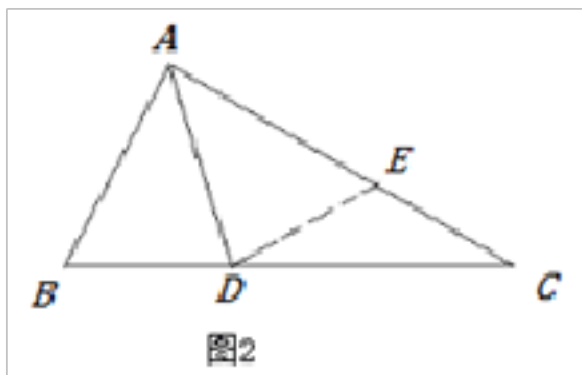
11. 阅读理解：

【问题情境】小明和小军比赛同题不同证明方法．题目如下：

如图 1， $\triangle ABC$ 中， $\angle B=2\angle C$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线．求证： $AB+BD=AC$ ．



【证明思路】小明的证明思路是：如图 2，在 AC 上截取 $AE=AB$ ，连接 DE ．……



小军的证明思路是：如图 3，延长 CB 至点 E ，使 $BE=AB$ ，连接 AE ．

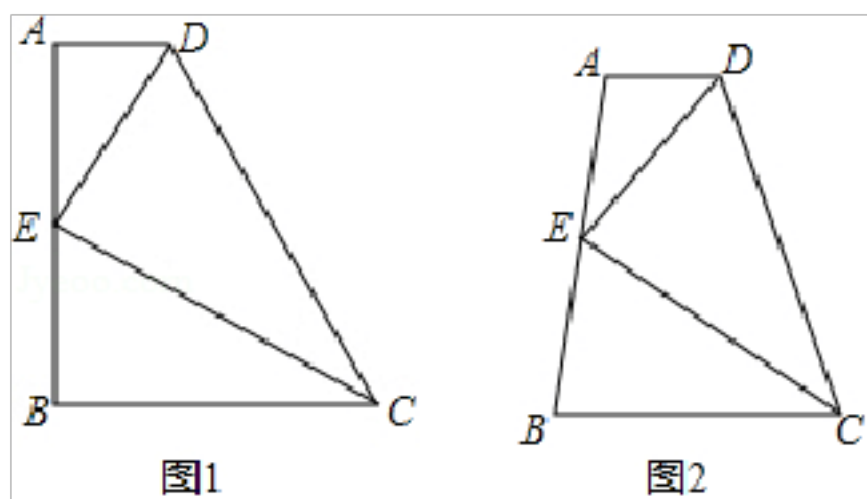
可以证得： $AE=DE$ ．……

请你从他们的思路中，任意选择一种思路继续完成下一步的证明．

【变式探究】小明把“ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线”改成“ AD 是 BC 边上的高”，其它条件不变，问小军： $AB+BD=AC$ 还成立吗？若成立，请证明；若不成立，请问 $AB+BD$ 等于图中哪一条线段？并说明理由．

小军正在思考中，请你帮助小军完成此题．

12. 据图回答问题



(1) 如图 1，四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ， $\angle ADC$ ， $\angle BCD$ 的角平分线交于 AB 边上的点 E ，求证：

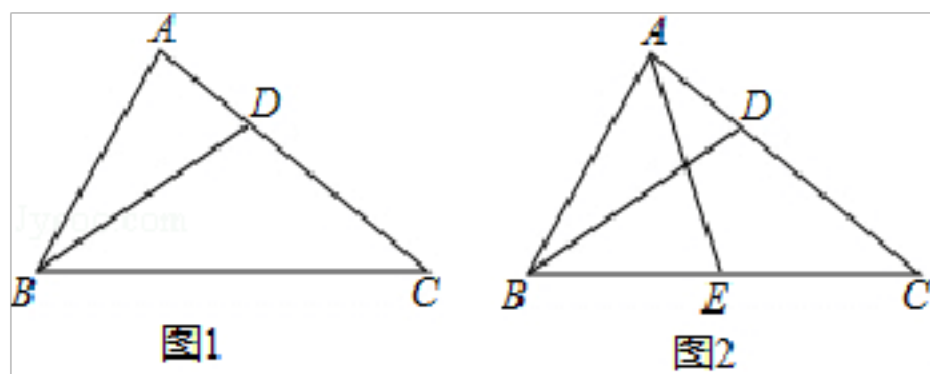
① $CD = AD + BC$ ；

② E 是 AB 的中点；

(2) 如图 2，(1) 中的条件 “ $\angle A = \angle B = 90^\circ$ 改为 条件 $AD \parallel BC$ ”，其他条件不变，

(1) 中的结论是否都依然成立？请说明理由。

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 75^\circ$ ， $\angle ACB = 35^\circ$ ， $\angle ABC$ 的平分线 BD 交边 AC 于点 D 。

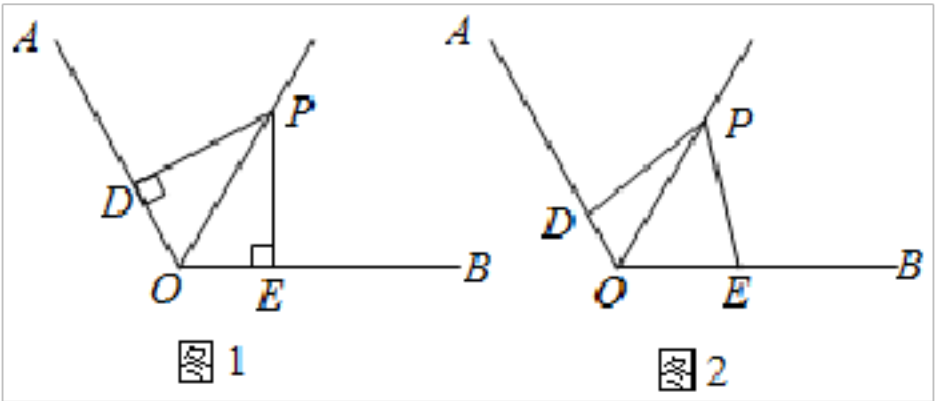


(1) 求证： $\triangle BCD$ 为等腰三角形；

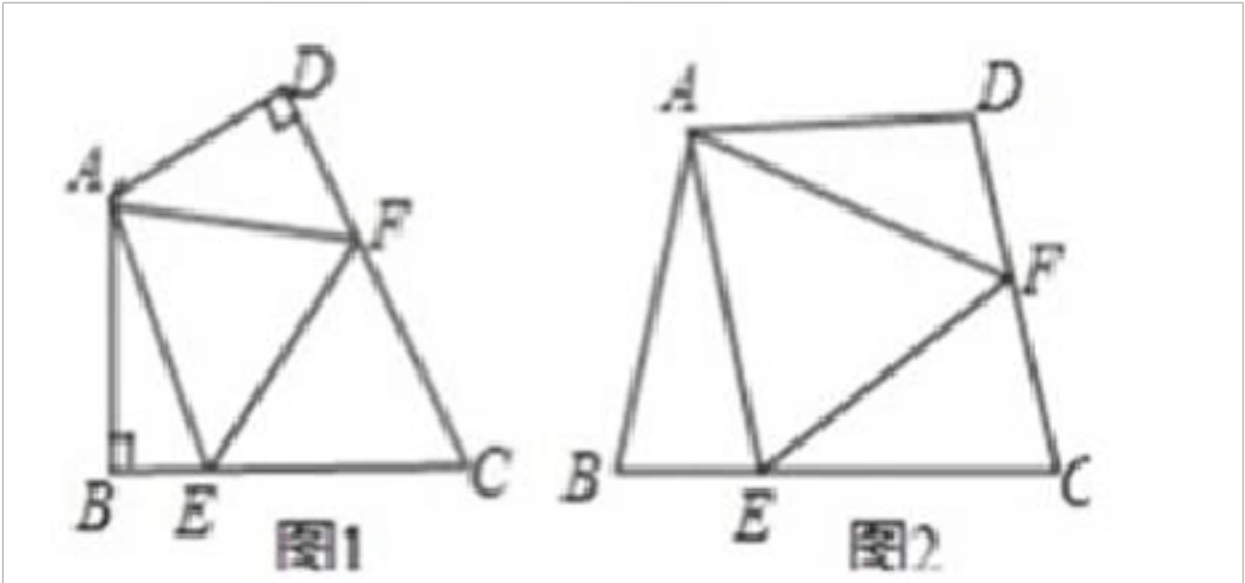
(2) 若 $\angle BAC$ 的平分线 AE 交边 BC 于点 E ，如图 2，求证： $BD + AD = AB + BE$ ；

(3) 若 $\angle BAC$ 外角的平分线 AE 交 CB 延长线于点 E ，请你探究 (2) 中的结论是否仍然成立？请说明理由。

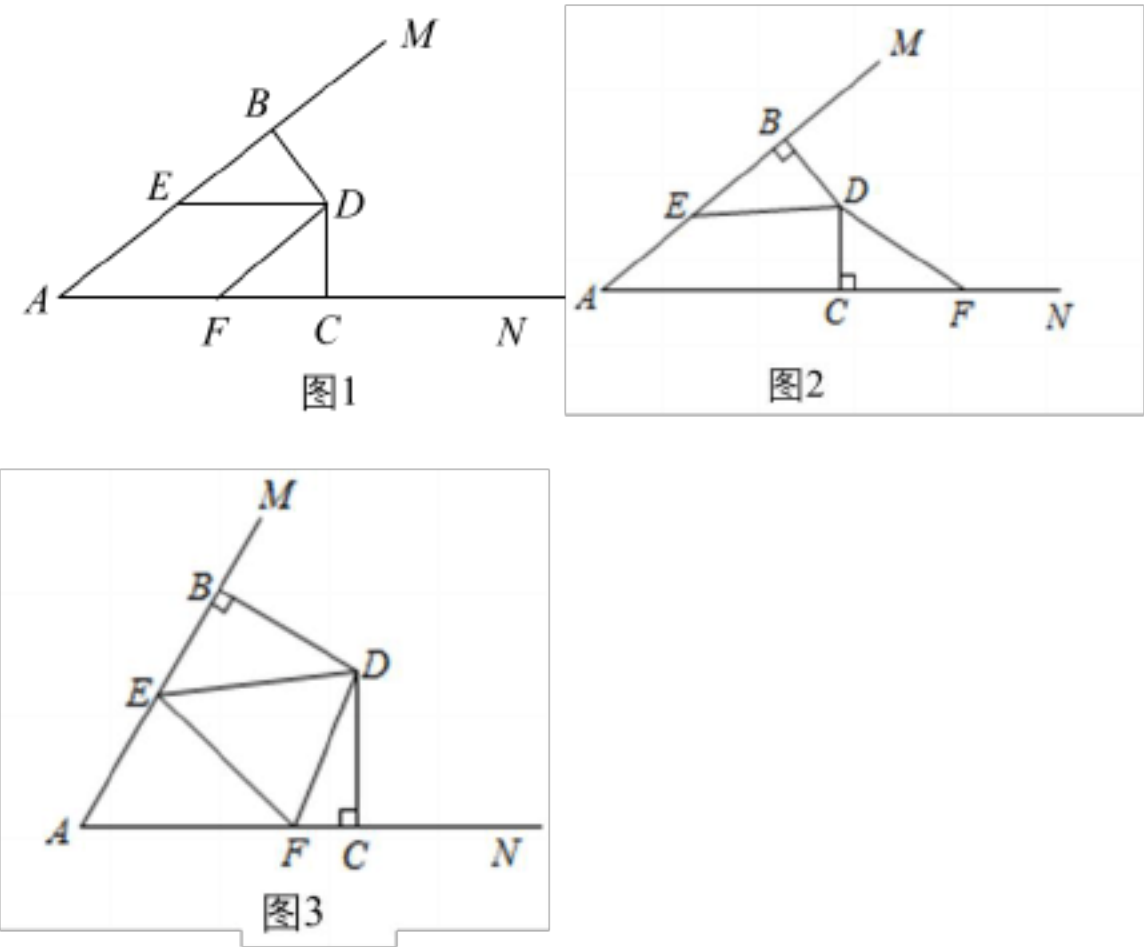
14. 如图，已知 $\angle AOB = 120^\circ$ ， OP 平分 $\angle AOB$ ， D ， E 分别在射线 OA ， OB 上.
- (1) 在图 1 中，当 $\angle ODP = \angle OEP = 90^\circ$ 时，求证： $OD + OE = OP$ ；
- (2) 若把图 1 中的条件“ $\angle ODP = \angle OEP = 90^\circ$ ”改为 $\angle ODP + \angle OEP = 180^\circ$ ，其他条件不变，如图 2 所示，则 (1) 中的结论是否仍然成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.



15. 【问题背景】如图 1:在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $\angle B = \angle ADC = 90^\circ$, E 、 F 分别是 BC 、 CD 上的点,且 $\angle EAF = 60^\circ$, 试探究图中线段 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系。小王同学探究此问题的方法是：延长 FD 到点 G ,使 $DG = BE$,连结 AG ,先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$,再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出结论，他的结论应是什么？请把证明过程写出来。【探索延伸】如图 2,若在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E 、 F 分别是 BC , CD 上的点,且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$,上述结论是否仍然成立,并说明理由。



16. 在 $\angle$ 内有一点D. 过点D 分别作 $\perp$, $\perp$, 垂足分别为B, C. 且 $=$, 点E, F 分别在边 和 上.



- (1) 如图 1, 若 $DE \parallel AN$, $DF \parallel AM$. $\angle = 40$. 则 $\angle$ = _____ $^\circ$;
- (2) 如图 2, 若 $\angle = \angle$, $= 7$, 求 的长;
- (3) 如图 3, 若 $\angle = 120^\circ$, $\angle = 60^\circ$, 猜想 , , 三条线段间具有的数量关系, 并说明你的结论成立的理由.

参考答案

1. (1) $\angle BAE + \angle FAD = \angle EAF$

(2) 仍成立，理由：

如图 2，延长 FD 到点 G，使 $DG = BE$ ，连接 AG，

$$\because \angle B + \angle ADF = 180^\circ, \angle ADG + \angle ADF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADG,$$

$$\text{又} \because AB = AD,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG \quad (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAG, \quad AE = AG,$$

$$\because EF = BE + FD = DG + FD = GF, \quad AF = AF,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF \quad (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF;$$

$$(3) \quad \angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DAB.$$

证明：如图 3，在 DC 延长线上取一点 G，使得 $DG = BE$ ，连接 AG，

$$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ, \angle ABC + \angle ABE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ABE,$$

$$\text{又} \because AB = AD,$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle ABE \quad (\text{SAS}),$$

$$\therefore AG = AE, \quad \angle DAG = \angle BAE,$$

$$\because EF = BE + FD = DG + FD = GF, \quad AF = AF,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF \quad (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle FAE = \angle FAG,$$

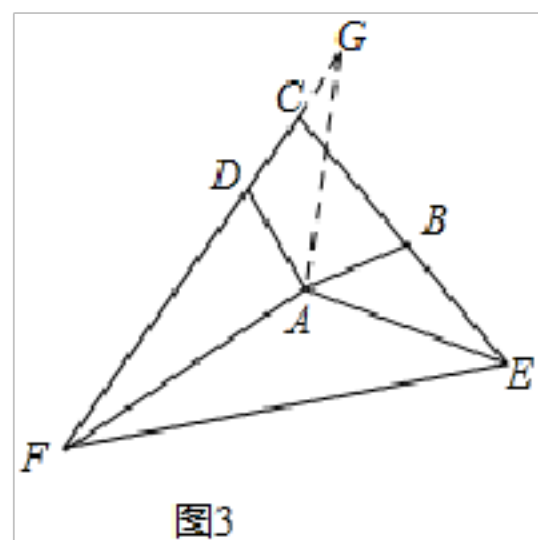
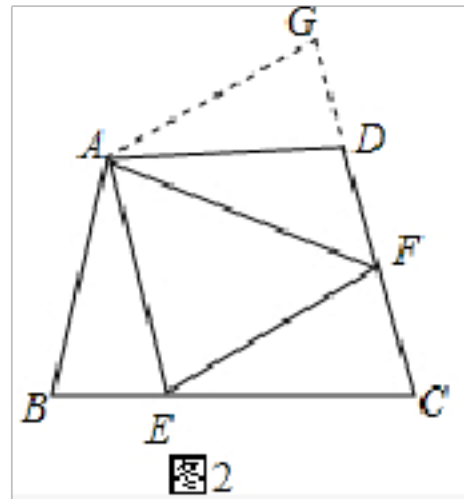
$$\because \angle FAE + \angle FAG + \angle GAE = 360^\circ,$$

$$\therefore 2\angle FAE + (\angle GAB + \angle BAE) = 360^\circ,$$

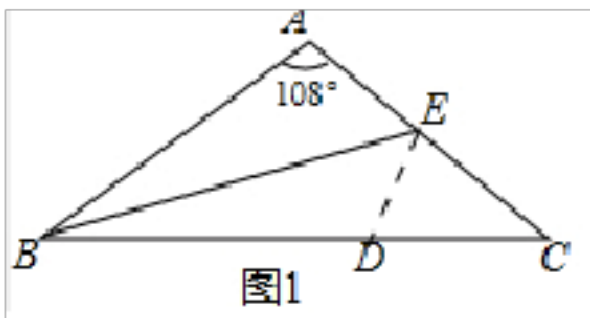
$$\therefore 2\angle FAE + (\angle GAB + \angle DAG) = 360^\circ,$$

$$\text{即 } 2\angle FAE + \angle DAB = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DAB.$$



2.解：（1）如图 1 中，在 BC 上截取 $BD = BA$.



$\because BA = BD$, $\angle EBA = \angle EBD$, $BE = BE$,

$\therefore \triangle BEA \cong \triangle BED$,

$\therefore BA = BD$, $\angle A = \angle BDE = 108^\circ$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle C = \angle ABC = 36^\circ$, $\angle EDC = 72^\circ$,

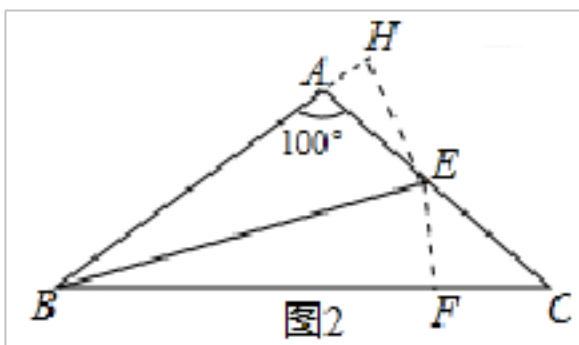
$\therefore \angle CED = 72^\circ$,

$\therefore CE = CD$,

$\therefore BC = BD + CD = AB + CE$.

（2）结论： $BC = BE + AE$.

理由：如图 2 中，在 BA、BC 上分别截取 $BF = BE$, $BH = BE$. 则 $\triangle EBH \cong \triangle EBF$,



$\therefore EF = EH$,

$\because \angle BAC = 100^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle C = 40^\circ$,

$\therefore \angle EBA = \angle ECB = 20^\circ$,

$\therefore \angle BFE = \angle H = \angle EAH = 80^\circ$,

$\therefore AE = EH$,

$\because \angle BFE = \angle C + \angle FEC$,

$\therefore \angle CEF = \angle C = 40^\circ$,

$\therefore EF = CF$,

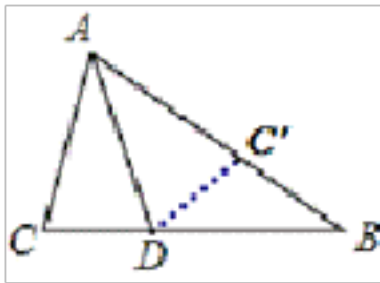
$\therefore BC = BF + CF = BE + AE$.

3.解：（1） $AB = AC + CD$;

(2) (1) 中的结论仍然成立.

理由如下: $\because AD$ 是 $\angle CAB$ 的角平分线,

$\therefore$ 如图, 将 $\triangle CAB$ 沿 AD 折叠, 点 C 落在 AB 边上的 C' 处,



$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AC'D$,

$\therefore AC = AC'$, $CD = C'D$, $\angle C = \angle AC'D = 2\angle B$,

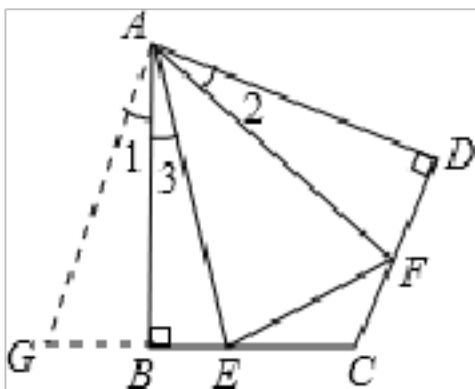
又 $\because \angle AC'D = \angle BDC' + \angle B$,

$\therefore \angle BDC' = \angle B$,

$\therefore C'D = CB$,

$\therefore AB = AC' + BC' = AC + CD$, 即 $AB = AC + CD$.

4.证明: (1) 延长 EB 到 G , 使 $BG = DF$, 连接 AG .



$\because \angle ABG = \angle ABC = \angle D = 90^\circ$, $AB = AD$,

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF$.

$\therefore AG = AF$, $\angle 1 = \angle 2$.

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$.

$\therefore \angle GAE = \angle EAF$.

又 $\because AE = AE$,

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF .$$

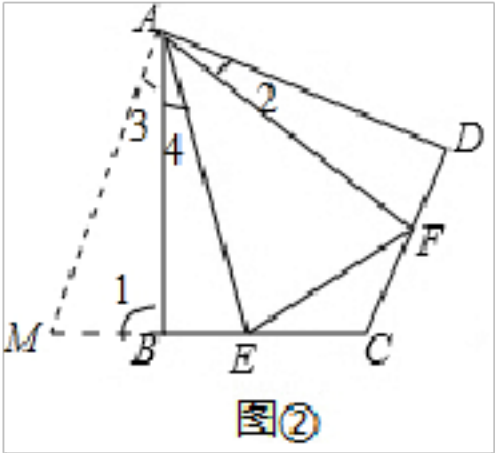
$$\therefore EG =EF .$$

$$\therefore EG =BE +BG .$$

$$\therefore EF =BE +FD$$

（2）（1）中的结论 $EF =BE +FD$ 仍然成立.

证明：如图②中，延长 CB 至 M ，使 $BM =DF$ ，连接 AM ．



$$\because \angle ABC + \angle D =180^{\circ}, \quad \angle 1+ \angle ABC =180^{\circ},$$

$$\therefore \angle 1= \angle D ,$$

在 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{array}{l} = \\ \{ \angle 1= \angle \quad , \\ = \end{array}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADF \quad (\text{SAS}) .$$

$$\therefore AF =AM \quad , \quad \angle 2= \angle 3.$$

$$\because \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD \quad ,$$

$$\therefore \angle 2+ \angle 4= \frac{1}{2} \angle BAD = \angle EAF .$$

$$\therefore \angle 3+ \angle 4= \angle EAF \quad , \quad \text{即} \quad \angle MAE = \angle EAF .$$

在 $\triangle AME$ 与 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{array}{l} = \\ \{ \angle \quad = \angle \quad , \\ = \end{array}$$

$$\therefore \triangle AME \cong \triangle AFE \quad (\text{SAS}) .$$

$$\therefore EF =ME \quad , \quad \text{即} \quad EF =BE +BM \quad ,$$

$$\therefore EF =BE +DF \quad ;$$

（3）结论 $EF =BE +FD$ 不成立，应当是 $EF =BE -FD$ ．

证明：在 BE 上截取 BG ，使 $BG =DF$ ，连接 AG ．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/015314131024011343>