

江苏省无锡市惠山六校联考 2024 年高三最后一卷数学试卷

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
- 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
- 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
- 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n - a_{n-1} = n (n \geq 2)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ ()

- A. $\frac{1}{2}n(n+1)$ B. $\frac{1}{2}n(3n-1)$ C. $n^2 - n + 1$ D. $n^2 - 2n + 2$

2. 设 i 是虚数单位，若复数 $a + \frac{5i}{2+i} (a \in \mathbb{R})$ 是纯虚数，则 a 的值为 ()

- A. -3 B. 3 C. 1 D. -1

3. 设递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $S_4 = \frac{40}{3}$ ， $3a_4 - 10a_3 + 3a_2 = 0$ ，则 $a_4 =$ ()

- A. 9 B. 27 C. 81 D. $\frac{8}{3}$

4. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程是 ()

- A. $x \pm 2y = 0$ B. $2x \pm y = 0$ C. $4x \pm y = 0$ D. $x \pm 4y = 0$

5. 已知命题 $p: \exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 > 0$ ，那么 $\neg p$ 为 ()

- A. $\exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 \leq 0$ B. $\forall x > 2, x^3 - 8 \leq 0$
C. $\exists x_0 \leq 2, x_0^3 - 8 \leq 0$ D. $\forall x \leq 2, x^3 - 8 \leq 0$

6. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 和点 $D(2, 0)$ ，直线 $x = ty - 2$ 与抛物线 C 交于不同两点 A, B ，直线 BD 与抛物线 C 交于另一点 E 。给出以下判断：

- ①直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 -2 ；
② $AE \parallel y$ 轴；
③以 BE 为直径的圆与抛物线准线相切。

其中，所有正确判断的序号是 ()

- A. ①②③ B. ①② C. ①③ D. ②③

7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ \log_a |x - 2| + 1, & x \neq 2, a > 1 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f^2(x) + bf(x) + c$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 则

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = (\quad)$$

- A. 12 B. 11 C. 6 D. 3

8. 已知函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位后得到函数 $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象, 则 φ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{8}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{5\pi}{8}$

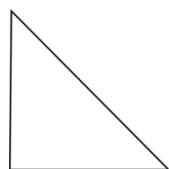
9. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $7S_2 = 4S_4$, 则公比 q 的值为 ()

- A. 1 B. 1 或 $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

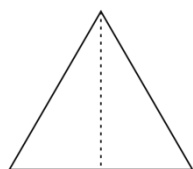
10. 已知 l, m 是两条不同的直线, $m \perp$ 平面 α , 则“ $l // \alpha$ ”是“ $l \perp m$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

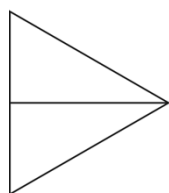
11. 某几何体的三视图如图所示, 若侧视图和俯视图均是边长为 2 的等边三角形, 则该几何体的体积为



正视图



侧视图



俯视图

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C. 1 D. 2

12. 已知直线 $x + y = t$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2t - t^2 (t \in R)$ 有公共点, 则 $t(4 - t)$ 的最大值为 ()

- A. 4 B. $\frac{28}{9}$ C. $\frac{32}{9}$ D. $\frac{32}{7}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ y \leq x \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = \frac{y+1}{x+2}$ 的最大值为_____.

14. 电影《厉害了，我的国》于 2018 年 3 月正式登陆全国院线，网友纷纷表示，看完电影热血沸腾“我为我的国家骄傲，我为我是中国人骄傲！”《厉害了，我的国》正在召唤我们每一个人，不忘初心，用奋斗书写无悔人生，小明想约甲、乙、丙、丁四位好朋友一同去看《厉害了，我的国》，并把标识为 A, B, C, D 的四张电影票放在编号分别为 1, 2, 3, 4 的四个不同的盒子里，让四位好朋友进行猜测：

甲说：第 1 个盒子里放的是 B ，第 3 个盒子里放的是 C

乙说：第 2 个盒子里放的是 B ，第 3 个盒子里放的是 D

丙说：第 4 个盒子里放的是 D ，第 2 个盒子里放的是 C

丁说：第 4 个盒子里放的是 A ，第 3 个盒子里放的是 C

小明说：“四位朋友你们都只说对了一半”

可以预测，第 4 个盒子里放的电影票为_____

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，记 $\{S_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_{n+1} = \frac{2a_n^2}{a_{n+1} - a_n} (n \in N^*)$, $a_1 = 1$, 则

$S_6 =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 相交，若存在相邻两个交点间的距离为 $\frac{\pi}{3}$, 则 ω 可取到的最大值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴且取相同

的单位长度建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求直线 l 的普通方程及曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $P(-1, 2)$, 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $|AB| + |PA| \cdot |PB|$ 的值.

18. (12 分) 设函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln(x+1)$.

(1) $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a > 0$ 时, 设 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$, 若 $g(a) < t$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围.

19. (12 分) 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称, 且 $f(x) = x^2 + 2x$.

- (1) 解关于 x 的不等式 $g(x) \geq f(x) - |x-1|$;
- (2) 如果对 $\forall x \in R$, 不等式 $g(x) + c \leq f(x) - |x-1|$ 恒成立, 求实数 c 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$, $g(x) = \ln x - a(a \in R)$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的极值;
- (2) 若存在与函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象都相切的直线, 求实数 a 的取值范围.

21. (12 分) 某公司为了鼓励运动提高所有用户的身体素质, 特推出一款运动计步数的软件, 所有用户都可以通过每天累计的步数瓜分红包, 大大增加了用户走步的积极性, 所以该软件深受广大用户的欢迎. 该公司为了研究“日平均走步数和性别是否有关”, 统计了 2019 年 1 月份所有用户的日平均步数, 规定日平均步数不少于 8000 的为“运动达人”, 步数在 8000 以下的为“非运动达人”, 采用按性别分层抽样的方式抽取了 100 个用户, 得到如下列联表:

	运动达人	非运动达人	总计
男	35		60
女		26	
总计			100

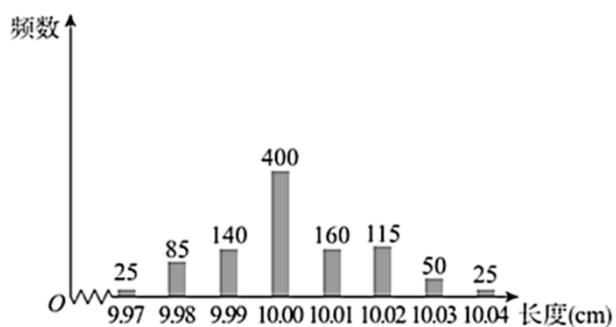
- (1) (i) 将 2×2 列联表补充完整;
- (ii) 据此列联表判断, 能否有 99% 的把握认为“日平均走步数和性别是否有关”?
- (2) 将频率视作概率, 从该公司的所有人“运动达人”中任意抽取 3 个用户, 求抽取的用户中女用户人数的分布列及期望.

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

22. (10 分) 某工厂生产一种产品的标准长度为 10.00cm, 只要误差的绝对值不超过 0.03cm 就认为合格, 工厂质检部抽检了某批次产品 1000 件, 检测其长度, 绘制条形统计图如图:



(1) 估计该批次产品长度误差绝对值的数学期望；

(2) 如果视该批次产品样本的频率为总体的概率，要求从工厂生产的产品中随机抽取 2 件，假设其中至少有 1 件是标准长度产品的概率不小于 0.8 时，该设备符合生产要求.现有设备是否符合此要求？若不符合此要求，求出符合要求时，生产一件产品为标准长度的概率的最小值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

利用数列的递推关系式，通过累加法求解即可．

【详解】

数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $a_n - a_{n-1} = n(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ ，

可得 $a_1 = 1$

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 4$$

...

$$a_n - a_{n-1} = n$$

以上各式相加可得：

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

故选：A.

【点睛】

本题考查数列的递推关系式的应用，数列累加法以及通项公式的求法，考查计算能力.

2、D

【解析】

整理复数为 $b+ci$ 的形式,由复数为纯虚数可知实部为 0,虚部不为 0,即可求解.

【详解】

$$\text{由题, } a + \frac{5i}{2+i} = a + \frac{5i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = a + 2i + 1 = (a+1) + 2i,$$

因为纯虚数,所以 $a+1=0$, 则 $a=-1$,

故选:D

【点睛】

本题考查已知复数的类型求参数范围,考查复数的除法运算.

3、A

【解析】

根据两个已知条件求出数列的公比和首项，即得 a_4 的值.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

$$\text{由 } 3a_4 - 10a_3 + 3a_2 = 0, \text{ 得 } 3q^2 - 10q + 3 = 0, \text{ 解得 } q = 3 \text{ 或 } q = \frac{1}{3}.$$

因为 $S_4 > 0$. 且数列 $\{a_n\}$ 递增，所以 $q = 3$.

$$\text{又 } S_4 = \frac{a_1(1-3^4)}{1-3} = \frac{40}{3}, \text{ 解得 } a_1 = \frac{1}{3},$$

$$\text{故 } a_4 = \frac{1}{3} \times 3^3 = 9.$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查等比数列的通项和求和公式，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

4、A

【解析】

试题分析：渐近线方程是 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，整理后就得到双曲线的渐近线。

解：双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

其渐近线方程是 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$

整理得 $x \pm 2y = 0$ 。

故选 A。

点评：本题考查了双曲线的渐近方程，把双曲线的标准方程中的“1”转化成“0”即可求出渐近方程。属于基础题。

5、B

【解析】

利用特称命题的否定分析解答得解。

【详解】

已知命题 $p: \exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 > 0$ ，那么 $\neg p$ 是 $\forall x > 2, x^3 - 8 \leq 0$ 。

故选：B。

【点睛】

本题主要考查特称命题的否定，意在考查学生对该知识的理解掌握水平，属于基础题。

6、B

【解析】

由题意，可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，利用韦达定理判断第一个结论；将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得，

$y_A y_1 = 8$ ，从而， $y_A = -y_2$ ，进而判断第二个结论 设 F 为抛物线 C 的焦点，以线段 BE 为直径的圆为 M ，则圆心 M

为线段 BE 的中点。设 B, E 到准线的距离分别为 d_1, d_2 ， $e M$ 的半径为 R ，点 M 到准线的距离为 d ，显然 $B,$

E, F 三点不共线，进而判断第三个结论。

【详解】

解：由题意，可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，

代入抛物线 C 的方程，有 $y^2 - 4my - 8 = 0$ 。

设点 B, E 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，

则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -8$ 。

所 $x_1 x_2 = (my_1 + 2)(my_2 + 2) = m^2 y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 4 = 4$ 。

则直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -2$. 所以①正确.

将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得, $y_A y_1 = 8$, 从而, $y_A = -y_2$,

根据抛物线的对称性可知, A, E 两点关于 x 轴对称,

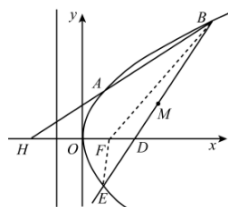
所以直线 $AE \parallel y$ 轴. 所以②正确.

如图, 设 F 为抛物线 C 的焦点, 以线段 BE 为直径的圆为 M ,

则圆心 M 为线段 BE 的中点. 设 B, E 到准线的距离分别为 d_1, d_2 , 圆 M 的半径为 R , 点 M 到准线的距离为 d ,

显然 B, E, F 三点不共线,

则 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$. 所以③不正确.



故选: B.

【点睛】

本题主要考查抛物线的定义与几何性质、直线与抛物线的位置关系等基础知识, 考查运算求解能力、推理论证能力和创新意识, 考查数形结合思想、化归与转化思想, 属于难题.

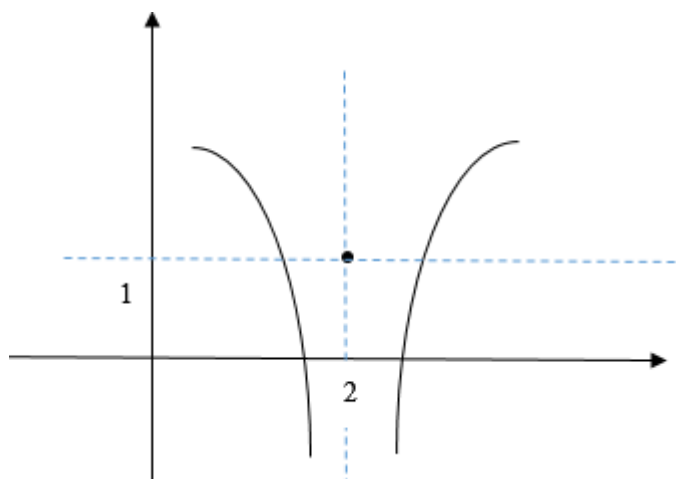
7、B

【解析】

画出函数 $f(x)$ 的图象, 利用函数的图象判断函数的零点个数, 然后转化求解, 即可得出结果.

【详解】

作出函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ \log_a |x - 2| + 1, & x \neq 2, a > 1 \end{cases}$ 的图象如图所示,



令 $f(x)=t$,

由图可得关于 x 的方程 $f(x)=t$ 的解有两个或三个 ($t=1$ 时有三个, $t \neq 1$ 时有两个),

所以关于 t 的方程 $t^2+bt+c=0$ 只能有一个根 $t=1$ (若有两个根, 则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有四个或五个根),

由 $f(x)=1$, 可得 x_1, x_2, x_3 的值分别为 $1, 2, 3$,

$$\text{则 } x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1 \times 2+2 \times 3+1 \times 3=11$$

故选 B.

【点睛】

本题考查数形结合以及函数与方程的应用, 考查转化思想以及计算能力, 属于常考题型.

8、A

【解析】

首先求得平移后的函数 $g(x)=\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$, 再根据 $\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 求 φ 的最小值.

【详解】

根据题意, $f(x)$ 的图象向左平移 φ 个单位后, 所得图象对应的函数

$$g(x)=\sin\left[2(x+\varphi)-\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),$$

所以 $2\varphi-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. 又 $\varphi>0$, 所以 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$.

故选: A

【点睛】

本题考查三角函数的图象变换, 诱导公式, 意在考查平移变换, 属于基础题型.

9、C

【解析】

由 $7S_2 = 4S_4$ 可得 $3(a_1 + a_2) = 4(a_3 + a_4)$ ，故可求 q 的值.

【详解】

因为 $7S_2 = 4S_4$ ，所以 $3(a_1 + a_2) = 4(S_4 - S_2) = 4(a_3 + a_4)$ ，

故 $q^2 = \frac{3}{4}$ ，因 $\{a_n\}$ 为正项等比数列，故 $q > 0$ ，所以 $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故选 C.

【点睛】

一般地，如果 $\{a_n\}$ 为等比数列， S_n 为其前 n 项和，则有性质：

(1) 若 $m, n, p, q \in N^*, m+n = p+q$ ，则 $a_m a_n = a_p a_q$ ；

(2) 公比 $q \neq 1$ 时，则有 $S_n = A + Bq^n$ ，其中 A, B 为常数且 $A + B = 0$ ；

(3) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 为等比数列 ($S_n \neq 0$) 且公比为 q^n 。

10、A

【解析】

根据充分条件和必要条件的定义，结合线面垂直的性质进行判断即可.

【详解】

当 $m \perp$ 平面 α 时，若 $l \parallel \alpha$ 则“ $l \perp m$ ”成立，即充分性成立，

若 $l \perp m$ ，则 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$ ，即必要性不成立，

则“ $l \parallel \alpha$ ”是“ $l \perp m$ ”充分不必要条件，

故选：A.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合线面垂直的性质和定义是解决本题的关键.难度不大，属于基础题

11、C

【解析】

由三视图可知，该几何体是三棱锥，底面是边长为 2 的等边三角形，三棱锥的高为 $\sqrt{3}$ ，所以该几何体的体积

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = 1，\text{ 故选 C.}$$

12、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/015324103011011201>