

四川省广安友谊中学 2022-2023 学年学业水平考试信息模拟卷(六)数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

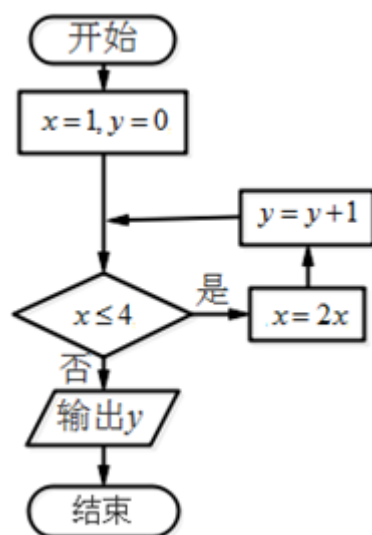
1. 复数 $\frac{1}{i} + i =$ ()

- A. $-2i$ B. $\frac{1}{2}i$ C. 0 D. $2i$

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_3 = 2$ ， $a_1 + a_4 = 5$ ，则 $S_6 =$ ()

- A. 10 B. 9 C. 8 D. 7

3. 如图是一个算法流程图，则输出的结果是 ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

4. 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F ，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M (M 在 x 轴的上方)， l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 $MN \perp l$ ，则 M 到直线 NF 的距离为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$

5. 已知复数 z 满足 $z \cdot i^{2020} = 1 + i^{2019}$ (其中 i 为虚数单位)，则复数 z 的虚部是 ()

- A. -1 B. 1 C. $-i$ D. i

6. 设 α, β 为两个平面，则 $\alpha \parallel \beta$ 的充要条件是

- A. α 内有无数条直线与 β 平行
B. α 内有两条相交直线与 β 平行
C. α, β 平行于同一条直线

D. α, β 垂直于同一平面

7. 《周易》是我国古代典籍，用“卦”描述了天地世间万象变化．如图是一个八卦图，包含乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑八卦（每一卦由三个爻组成，其中“”表示一个阳爻，“”表示一个阴爻）．若从含有两个及以上阳爻的卦中任取两卦，这两卦的六个爻中都恰有两个阳爻的概率为（ ）



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

8. 已知复数 $z = \frac{2i}{i-1}$ ，则 z 的虚部为（ ）

- A. -1 B. $-i$ C. 1 D. i

9. 已知复数 z 满足： $zi = 3 + 4i$ (i 为虚数单位)，则 $\bar{z} =$ （ ）

- A. $4 + 3i$ B. $4 - 3i$ C. $-4 + 3i$ D. $-4 - 3i$

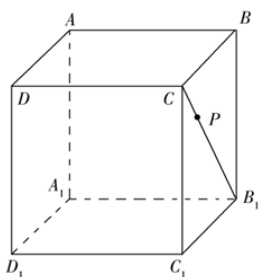
10. 设 i 是虚数单位，若复数 $a + \frac{5i}{2+i}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是纯虚数，则 a 的值为（ ）

- A. -3 B. 3 C. 1 D. -1

11. 已知 A 类产品共两件 A_1, A_2 ， B 类产品共三件 B_1, B_2, B_3 ，混放在一起，现需要通过检测将其区分开来，每次随机检测一件产品，检测后不放回，直到检测出 2 件 A 类产品或者检测出 3 件 B 类产品时，检测结束，则第一次检测出 B 类产品，第二次检测出 A 类产品的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{10}$

12. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 在线段 CB_1 上，且 $B_1P = 2PC$ ，平面 α 经过点 A, P, C_1 ，则正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 被平面 α 截得的截面面积为（ ）



A. $3\sqrt{6}$

B. $2\sqrt{6}$

C. 5

D. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 甲、乙两人同时参加公务员考试，甲笔试、面试通过的概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$ ；乙笔试、面试通过的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$ 。若笔试面试都通过才被录取，且甲、乙录取与否相互独立，则该次考试只有一人被录取的概率是_____。

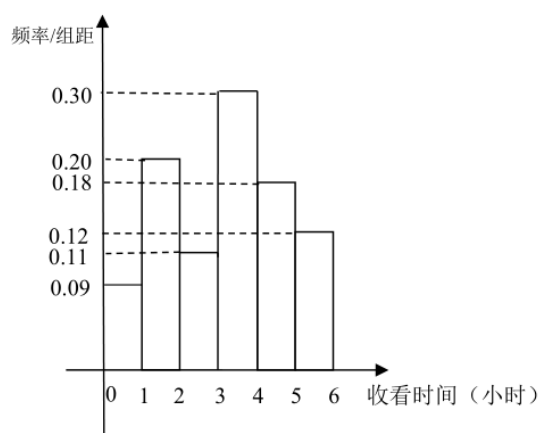
14. 若一个正四面体的棱长为 1，四个顶点在同一个球面上，则此球的表面积为_____。

15. 已知函数 $f(x) = \frac{(e^x - ax)(e^x - \ln x)}{\ln x - ax}$ ，若在定义域内恒有 $f(x) < 0$ ，则实数 a 的取值范围是_____。

16. $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 A, B, C 成等差数列，若 $b = \sqrt{3}$ ， $c = 1$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 万众瞩目的第 14 届全国冬季运动会（简称“十四冬”）于 2020 年 2 月 16 日在呼伦贝尔市盛大开幕，期间正值我市学校放寒假，寒假结束后，某校工会对全校 100 名教职工在“十四冬”期间每天收看比赛转播的时间作了一次调查，得到如图频数分布直方图：



	男	女	合计
冰雪迷		20	
非冰雪迷	20		
合计			

(1) 若将每天收看比赛转播时间不低于 3 小时的教职工定义为“冰雪迷”，否则定义为“非冰雪迷”，请根据频率分布直方图补全 2×2 列联表；并判断能否有 90% 的把握认为该校教职工是否为“冰雪迷”与“性别”有关；

(2) 在全校“冰雪迷”中按性别分层抽样抽取 6 名，再从这 6 名“冰雪迷”中选取 2 名作冰雪运动知识讲座。记其中女职工的人数为 ξ ，求的 ξ 分布列与数学期望。

附表及公式：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n = a+b+c+d$$

18. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 点 $P(x_0, y_0)$ 为半圆 $x^2 + y^2 = 3 (y \geq 0)$ 上一动点, 若过 P 作椭圆 C 的两切线分别交 x 轴于 M 、 N 两点.

(1) 求证: $PM \perp PN$;

(2) 当 $x_0 \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 时, 求 $|MN|$ 的取值范围.

19. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} + t \\ y = -\sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $M(0, 3)$, 直线 l 与曲线 C 交于不同的两点 A 、 B , 求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|}$ 的值.

20. (12分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 若矩阵 $M = BA$, 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} .

21. (12分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 0, 公差为 a , $a \in \mathbb{N}^*$; 等差数列 $\{b_n\}$ 的首项为 0, 公差为 b , $b \in \mathbb{N}^*$. 由数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 构造数表 M , 与数表 M^* ;

记数表 M 中位于第 i 行第 j 列的元素为 c_{ij} , 其中 $c_{ij} = a_i + b_j$, ($i, j = 1, 2, 3, \dots$).

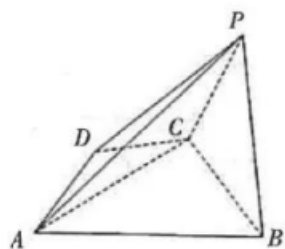
记数表 M^* 中位于第 i 行第 j 列的元素为 d_{ij} , 其中 $d_{ij} = a_i - b_{j+1}$ ($1 \leq i \leq b$, $i \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{N}^*$). 如: $c_{1,2} = a_1 + b_2$, $d_{1,2} = a_1 - b_3$.

(1) 设 $a = 5$, $b = 9$, 请计算 $c_{2,6}$, $c_{396,6}$, $d_{2,6}$;

(2) 设 $a = 6$, $b = 7$, 试求 c_{ij} , d_{ij} 的表达式 (用 i, j 表示), 并证明: 对于整数 t , 若 t 不属于数表 M , 则 t 属于数表 M^* ;

(3) 设 $a = 6$, $b = 7$, 对于整数 t , t 不属于数表 M , 求 t 的最大值.

22. (10分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \perp CD$, $AD = CD$, $PA = 3\sqrt{2}$, $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 均为边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形.



- (1) 求证：平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$ ；
 (2) 求二面角 $C-PB-D$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】略

2、B

【解析】

根据题意 $a_3 = a_1 + 2d = 2$, $a_1 + a_4 = 2a_1 + 3d = 5$, 解得 $a_1 = 4$, $d = -1$, 得到答案.

【详解】

$$a_3 = a_1 + 2d = 2, \quad a_1 + a_4 = 2a_1 + 3d = 5, \quad \text{解得 } a_1 = 4, \quad d = -1, \quad \text{故 } S_6 = 6a_1 + 15d = 9.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了等差数列的求和，意在考查学生的计算能力.

3、A

【解析】

执行程序框图，逐次计算，根据判断条件终止循环，即可求解，得到答案.

【详解】

由题意，执行上述的程序框图：

第 1 次循环：满足判断条件， $x = 2, y = 1$ ；

第2次循环：满足判断条件， $x=4, y=2$ ；

第3次循环：满足判断条件， $x=8, y=3$ ；

不满足判断条件，输出计算结果 $y=3$ ，

故选 A.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的结果的计算与输出，其中解答中执行程序框图，逐次计算，根据判断条件终止循环是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题.

4、C

【解析】

联立方程解得 $M(3, 2\sqrt{3})$ ，根据 $MN \perp l$ 得 $|MN|=|MF|=4$ ，得到 $\triangle MNF$ 是边长为4的等边三角形，计算距离得到答案.

【详解】

依题意得 $F(1,0)$ ，则直线 FM 的方程是 $y=\sqrt{3}(x-1)$. 由 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x-1 \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=3$.

由 M 在 x 轴的上方得 $M(3, 2\sqrt{3})$ ，由 $MN \perp l$ 得 $|MN|=|MF|=3+1=4$

又 $\angle NMF$ 等于直线 FM 的倾斜角，即 $\angle NMF=60^\circ$ ，因此 $\triangle MNF$ 是边长为4的等边三角形

点 M 到直线 NF 的距离为 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

故选：C.

【点睛】

本题考查了直线和抛物线的位置关系，意在考查学生的计算能力和转化能力.

5、A

【解析】

由虚数单位 i 的运算性质可得 $z=1-i$ ，则答案可求.

【详解】

解： $\because i^4=1$ ，

$\therefore i^{2020}=i^{4 \times 505}=1$ ， $i^{2019}=i^{4 \times 504+3}=-i$ ，

则 $z \cdot i^{2020}=1+i^{2019}$ 化为 $z=1-i$ ，

$\therefore z$ 的虚部为 -1 .

故选：A.

【点睛】

本题考查了虚数单位 i 的运算性质、复数的概念，属于基础题.

6、B

【解析】

本题考查了空间两个平面的判定与性质及充要条件，渗透直观想象、逻辑推理素养，利用面面平行的判定定理与性质定理即可作出判断.

【详解】

由面面平行的判定定理知： α 内两条相交直线都与 β 平行是 $\alpha // \beta$ 的充分条件，由面面平行性质定理知，若 $\alpha // \beta$ ，则 α 内任意一条直线都与 β 平行，所以 α 内两条相交直线都与 β 平行是 $\alpha // \beta$ 的必要条件，故选 B.

【点睛】

面面平行的判定问题要紧扣面面平行判定定理，最容易犯的错误为定理记不住，凭主观臆断，如：“若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a // b$ ，则 $\alpha // \beta$ ”此类的错误.

7、B

【解析】

基本事件总数为 6 个，都恰有两个阳爻包含的基本事件个数为 3 个，由此求出概率.

【详解】

解：由图可知，含有两个及以上阳爻的卦有巽、离、兑、乾四卦，

取出两卦的基本事件有（巽，离），（巽，兑），（巽，乾），（离，兑），（离，乾），（兑，乾）共 6 个，其中符合条件的基本事件有（巽，离），（巽，兑），（离，兑）共 3 个，

所以，所求的概率 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

故选：B.

【点睛】

本题渗透传统文化，考查概率、计数原理等基本知识，考查抽象概括能力和应用意识，属于基础题.

8、A

【解析】

分子分母同乘分母的共轭复数即可.

【详解】

$z = \frac{2i}{i-1} = \frac{2i(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \frac{-2+2i}{-2} = 1-i$ ，故 z 的虚部为 -1 .

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查学生运算能力，是一道容易题.

9、A

【解析】

利用复数的乘法、除法运算求出 z ，再根据共轭复数的概念即可求解.

【详解】

$$\text{由 } zi = 3 + 4i, \text{ 则 } z = \frac{3 + 4i}{i} = \frac{3i - 4}{-1} = 4 - 3i,$$

$$\text{所以 } \bar{z} = 4 + 3i.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了复数的四则运算、共轭复数的概念，属于基础题.

10、D

【解析】

整理复数为 $b + ci$ 的形式,由复数为纯虚数可知实部为 0,虚部不为 0,即可求解.

【详解】

$$\text{由题, } a + \frac{5i}{2+i} = a + \frac{5i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = a + 2i + 1 = (a+1) + 2i,$$

因为纯虚数,所以 $a+1=0$,则 $a=-1$,

故选:D

【点睛】

本题考查已知复数的类型求参数范围,考查复数的除法运算.

11、D

【解析】

根据分步计数原理，由古典概型概率公式可得第一次检测出 B 类产品的概率，不放回情况下第二次检测出 A 类产品的概率，即可得解.

【详解】

A 类产品共两件 A_1, A_2 ， B 类产品共三件 B_1, B_2, B_3 ，

则第一次检测出 B 类产品的概率为 $\frac{3}{5}$ ；

不放回情况下，剩余 4 件产品，则第二次检测出 A 类产品的概率为 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ；

故第一次检测出 B 类产品，第二次检测出 A 类产品的概率为 $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ ；

故选：D.

【点睛】

本题考查了分步乘法计数原理的应用，古典概型概率计算公式的应用，属于基础题.

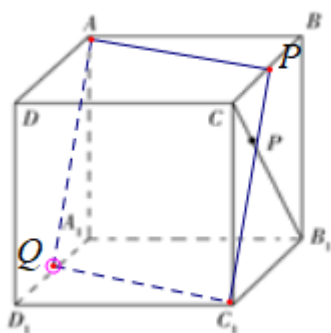
12、B

【解析】

先根据平面的基本性质确定平面，然后利用面面平行的性质定理，得到截面的形状再求解.

【详解】

如图所示：



A, P, C_1 确定一个平面 α ,

因为平面 $AA_1DD_1 \parallel$ 平面 BB_1CC_1 ,

所以 $AQ \parallel PC_1$, 同理 $AP \parallel QC_1$,

所以四边形 APC_1Q 是平行四边形.

即正方体被平面截的截面.

因为 $B_1P = 2PC$,

所以 $C_1B_1 = 2PC$,

即 $PC = PB = 1$

所以 $AP = PC_1 = \sqrt{5}$, $AC_1 = 2\sqrt{3}$

由余弦定理得： $\cos \angle APC_1 = \frac{AP^2 + PC_1^2 - AC_1^2}{2AP \times PC_1} = \frac{1}{5}$

$$\text{所以 } \sin \angle APC_1 = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{所以 } S_{\text{四边形 } APQC_1} = 2 \times \frac{1}{2} AP \times PC_1 \times \sin \angle APC_1 = 2\sqrt{6}$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查平面的基本性质，面面平行的性质定理及截面面积的求法，还考查了空间想象和运算求解的能力，属于中档题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

$$13、\frac{8}{15}$$

【解析】

分别求得甲、乙被录取的概率，根据独立事件概率公式可求得结果.

【详解】

$$\text{甲被录取的概率 } p_1 = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}; \text{ 乙被录取的概率 } p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$\therefore \text{只有一人被录取的概率 } p = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{8}{15}.$$

【点睛】

本题考查独立事件概率的求解问题，属于基础题.

$$14、\frac{3\pi}{2}$$

【解析】

将四面体补成一个正方体，通过正方体的对角线与球的半径的关系，得到球的半径，利用球的表面积公式，即可求解.

【详解】

如图所示，将正四面体补形成一个正方体，

则正四面体的外接球与正方体的外接球表示同一个球，

$$\text{因为正四面体的棱长为 } 1, \text{ 所以正方体的棱长为 } \frac{\sqrt{2}}{2},$$

设球的半径为 R ，因为球的直径是正方体的对角线，

$$\text{即 } 2R = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 解得 } R = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/016015105125010105>