第六节　极限运算法则

- 一、极限运算法则
- 二、求极限方法举例
- 三、小结　思考题

一、极限运算法则

定理 设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

证 $\because \lim f(x)=A,\quad \lim g(x)=B.$

$\therefore f(x)=A+\alpha,\quad g(x)=B+\beta.$ 其中$\alpha\to 0,\beta\to 0.$

由无穷小运算法则,得

$$[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) = \alpha \pm \beta \to 0 \quad \therefore (1)\text{成立}$$

$$[f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) = (A+\alpha)(B+\beta) - AB$$

$$= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \to 0 \qquad \therefore (2)\text{成立}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B+\beta)} \quad \because B\alpha - A\beta \to 0.$$

又$\because \beta \to 0, B \neq 0,\ \exists \delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

$$|\beta| < \frac{|B|}{2}, \quad \therefore |B+\beta| \geq |B| - |\beta| > |B| - \frac{1}{2}|B| = \frac{1}{2}|B|$$

$\therefore \left|B(B+\beta)\right| > \frac{1}{2}B^2$, 故 $\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right| < \frac{2}{B^2}$, 有界,

$\therefore$ (3)成立.

推论1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

常数因子能够提到极限记号外面.

推论2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

上页 下页 返回

二、求极限措施举例

例1　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解　$\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$$=(\lim_{x\to 2}x)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0.$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$

上页　下页　返回

小结: 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^{\,n}+a_1x_0^{\,n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且$Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若$Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用

上页 下页 返回

例2 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 Q $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0$. 商的法则不能用

又Q $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3\neq 0$.

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

上页 下页 返回

例3 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to 1$时,分子,分母的极限都是零 ($\dfrac{0}{0}$型)

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 $x\to\infty$时, 分子,分母的极限都是无穷大($\frac{\infty}{\infty}$型)

先用x^3去除分子分母分出无穷小,再求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

小结: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n = m, \\ 0, \text{当} n > m, \\ \infty, \text{当} n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

例5　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

解　$n\to\infty$时,是无限多个无穷小之和

先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$