北京市东城区 2023-2024 学年高一下学期期末统一检测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知复数 $z_1=3-\mathrm{i}$，$z_2=-1+2\mathrm{i}$，则在复平面内表示复数 z_1+z_2 的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．$\cos30°\cos15°-\sin30°\sin15°$ 的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．1

3．从装有 2 张红色卡片和 2 张黑色卡片的盒子中任取 2 张卡片，则下列结论正确的是（　　）

A．“恰有一张黑色卡片”与“都是黑色卡片”为互斥事件

B．“至少有一张红色卡片”与“至少有一张黑色卡片”为互斥事件

C．“恰有一张红色卡片”与“都是黑色卡片”为对立事件

D．“至多有一张黑色卡片”与“都是红色卡片”为对立事件

4．在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\sin C}$，则 $\angle B=$（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

5．设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为非零向量，下列结论中正确的是（　　）

A．$|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$　　B．$|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}|-|\vec{b}|$

C．$(2\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(2\vec{b})$　　D．$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$

6．某高校的入学面试为每位面试者准备了 3 道难度相当的题目．每位面试者最多有三次抽题机会，若某次答对抽到的题目，则面试通过，否则就一直抽题到第 3 次为止．若李明答对每道题目的概率都是 0.6，则他最终通过面试的概率为（　　）

A．0.24　　B．0.6　　C．0.84　　D．0.936

7．将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，得到的图象关于点 $(\varphi,0)$ 对称，则 $|\varphi|$ 的最小值为（　　）

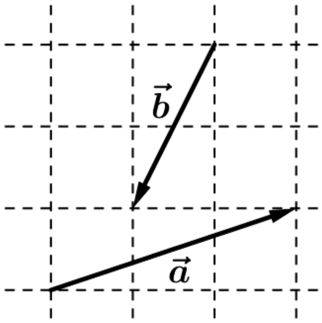
A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

8．设α,β是两个不同的平面，l,m是两条直线，且$m\subset\alpha,l\perp\alpha$.则“$l\perp\beta$”是“$m//\beta$”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

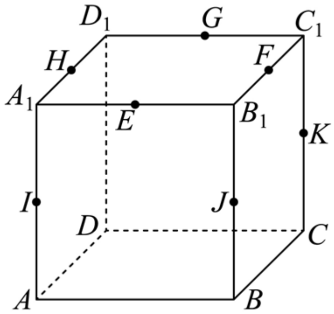
9．向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示，则 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=$（　）



A．45°　　B．60°

C．120°　　D．135°

10．如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，其中E，F，G，H，I，J，K分别为棱A_1B_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1A_1，AA_1，BB_1，CC_1的中点，那么三棱柱B_1FJ-A_1HI与三棱柱B_1EJ-C_1GK在正方体内部的公共部分的体积为（　）



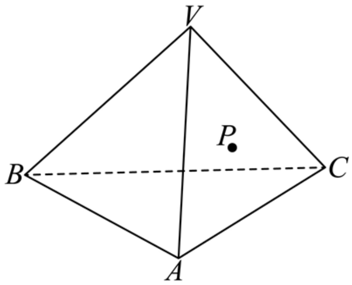
A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

二、填空题

11．已知向量$\vec{a}=(x+1,2)$，$\vec{b}=(2,-3)$，若$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则实数x的值为______.

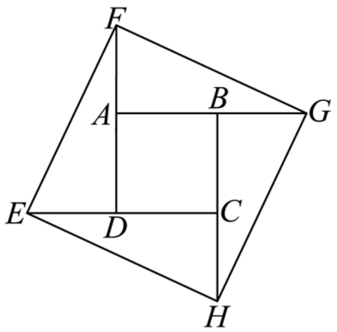
12．已知纯虚数z满足$|z-2i|=1$，则z可以是______.

13．一木块如图所示，所有棱长都等于10cm，点P为三角形VAC的中心，过点P将木块锯开，截面平行于直线VB和AC，则截面面积为______cm^2．



14．某实验室一天的温度（单位：℃）随时间t（单位：h）的变化近似满足函数关系：$f(t)=10-a\cos\dfrac{\pi}{12}t-b\sin\dfrac{\pi}{12}t$，$t\in[0,24]$，$a$，$b$为正实数，若$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则该实验室这一天的最大温差为______℃；若该实验室这一天的最大温差为10℃，则$a+b$的最大值为______．

15．赵爽为《周髀算经》一书作注时介绍了“勾股圆方图”，即“赵爽弦图”．下图是某同学绘制的赵爽弦图，其中$AD=ED=2$，点P,Q分别是正方形$ABCD$和正方形$EFGH$上的动点，给出下列四个结论：



①$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=4$；

②$\left|\overrightarrow{EQ}\right|\le 2\sqrt{10}$；

③设$\overrightarrow{FB}$与$\overrightarrow{FE}$的夹角为θ，则$\tan\theta$的值为3；

④$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{EQ}$的最大值为12．

其中所有正确结论的序号是______．

三、解答题

16．已知$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$．

(1)求$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$的值；

(2)求$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin 2\alpha$的值．

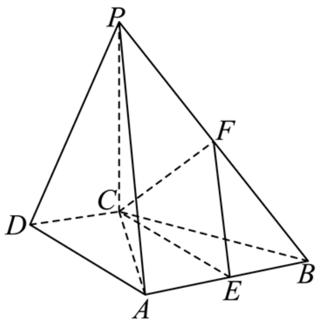
17．某中学调查了某班全部45名同学参加书法小组和科创小组的情况，数据如下（单位：人）：

	参加书法小组	未参加书法小组
参加科创小组	8	4
未参加科创小组	3	30

(1)从该班随机选1名同学，求该同学至少参加上述一个小组的概率；

(2)在既参加书法小组又参加科创小组的8名同学中，有5名男同学A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，3名女同学B_1，B_2，B_3，现从这5名男同学和3名女同学中各随机选1人，求A_1被选中且B_1未被选中的概率．

18．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PC\perp$平面$ABCD$，$AB//DC$，$DC\perp AC$．

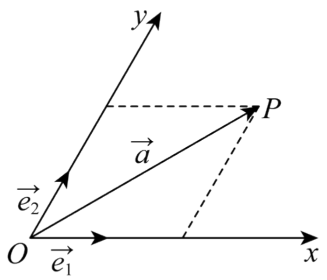


(1)求证：$DC\perp$平面PAC；

(2)求证：平面$PAB\perp$平面PAC；

(3)设点E为AB的中点，过点C，E的平面与棱PB交于点F，且$PA//$平面CEF，求$\frac{PF}{PB}$的值．

19．如图，设Ox,Oy是平面内相交成$60°$角的两条数轴，$\vec{e_1},\vec{e_2}$分别是与x轴、y轴正方向同向的单位向量．若向量$\overrightarrow{OP}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$，则把有序数对$(x,y)$叫做向量$\overrightarrow{OP}$在坐标系$Oxy$中的坐标． 设$\overrightarrow{OP}=2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$，



(1)求$|\overrightarrow{OP}|$的模长；

(2)设$\overrightarrow{OQ}=\vec{e}_1+m\vec{e}_2$，若$\overrightarrow{OP}//\overrightarrow{OQ}$，求实数$m$的值；

(3)若$\overrightarrow{OA}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2$，$\overrightarrow{OB}=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2$，有同学认为“$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$”的充要条件是“$x_1x_2+y_1y_2=0$”，你认为是否正确？若正确，请给出证明，若不正确，请说明理由.

20．设函数$f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$．从下列三个条件中选择两个作为已知，使函数$f\left(x\right)$存在.

(1)求$f\left(x\right)$的最小正周期及单调递减区间；

(2)若对于任意的$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，都有$f\left(x\right)\le c$，求实数$c$的取值范围.

条件①：函数$f\left(x\right)$的图象经过点$\left(-\frac{\pi}{6},2\right)$；

条件②：$f\left(x\right)$在区间$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增；

条件③：$x=\frac{\pi}{12}$是$f\left(x\right)$的一条对称轴.

注：如果选择的条件不符合要求，第（1）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

21．设n为正整数，集合$A_n=\left\{\alpha\middle|\alpha=\left(t_1,t_2,\ldots,t_n\right),t_k\in\left\{0,1\right\},k=1,2,\ldots,n\right\}$．对于集合$A_n$中的任意元素$\alpha=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$和$\beta=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$，定义$\alpha*\beta=\left(x_1\cdot y_1,x_2\cdot y_2,\ldots,x_n\cdot y_n\right)$，$\alpha \text{ e } \beta=\left(\left|x_1-y_1\right|,\left|x_2-y_2\right|,\ldots,\left|x_n-y_n\right|\right)$，以及$\left|\alpha\right|=x_1+x_2+\ldots+x_n$.

(1)若$n=5$，$\alpha=\left(1,1,1,0,1\right)$，$\alpha*\beta=\left(0,1,1,0,1\right)$，$\left|\beta\right|=4$，求$\beta$；

(2)若$\boldsymbol{n=9}$，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\left(k\ge2\right)$均为$A_n$中的元素，且$\left|\alpha_i\right|=3\left(1\le i\le k\right)$，$\left|\alpha_i*\alpha_j\right|=0\left(1\le i<j\le k\right)$，求$k$的最大值；

(3)若$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\left(k\geq 2\right)$均为$A_n\left(n\geq 5\right)$中的元素，其中$\left|\alpha_0\right|=0$，$\left|\alpha_k\right|=n$，且满足$\left|\alpha_i \text{ e } \alpha_{i+1}\right|=n-2\left(0\leq i\leq k-1\right)$，求$k$的最小值．

参考答案：

1．A

【分析】计算出复数的表达式，即可求出在复平面内所表示的点的位置.

【详解】由$z_1=3-\mathrm{i}$，$z_2=-1+2\mathrm{i}$，$z=z_1+z_2=3-\mathrm{i}-1+2\mathrm{i}=2+\mathrm{i}$，

由复数的几何意义，可知$z=z_1+z_2$对应的是第一象限.

故选：A

2．B

【分析】逆用和、差角的余弦公式化简、求值.

【详解】$\cos30°\cos15°-\sin30°\sin15°=\cos\left(30°+15°\right)=\cos45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

故选：B

3．A

【分析】记2张红色卡片为A、B，2张黑色卡片为a、b，列出样本空间，再对各选项的事件列出其基本事件，根据互斥事件、对立事件的定义判断即可.

【详解】记2张红色卡片为A、B，2张黑色卡片为a、b，

所以样本空间$\Omega=\left\{AB,Aa,Ab,Ba,Bb,ab\right\}$，

对于A："恰有一张黑色卡片"$=\left\{Aa,Ab,Ba,Bb\right\}$，

"都是黑色卡片"$=\left\{ab\right\}$，故"恰有一张黑色卡片"与"都是黑色卡片"为互斥事件，故A正确；

对于B："至少有一张红色卡片" $=\left\{AB,Aa,Ab,Ba,Bb\right\}$，

"至少有一张黑色卡片" $=\left\{Aa,Ab,Ba,Bb,ab\right\}$，

所以"至少有一张红色卡片"与"至少有一张黑色卡片"不互斥，故B错误；

对于C："恰有一张红色卡片" $=\left\{Aa,Ab,Ba,Bb\right\}$，

"都是黑色卡片"$=\left\{ab\right\}$，所以恰有一张红色卡片"与"都是黑色卡片"为互斥事件，但不是对立事件，故C错误；

对于D："至多有一张黑色卡片" $=\left\{AB,Aa,Ab,Ba,Bb\right\}$，

"都是红色卡片"$=\left\{AB\right\}$，

所以"都是红色卡片"包含于"至多有一张黑色卡片"，故D错误.

故选：A

4．B

【分析】利用正弦定理将边化角，即可求出$\tan B$，从而得解.

【详解】因为$\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\sin C}$，由正弦定理可得$\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin C}{\sin C}=1$，即$\tan B=1$，

又$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$B=\dfrac{\pi}{4}$.

故选：B

5．C

【分析】根据线性运算判断AB；根据数量积的运算律判断CD.

【详解】当$\vec{a}\perp\vec{b}$时，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，故A错；

当$\vec{a}$与$\vec{b}$反向共线时，且$\left|\vec{a}\right|>\left|\vec{b}\right|$时，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$，故B错；

$\left(2\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(2\vec{b}\right)$，故C正确；

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$，$\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2$，故D错.

故选：C.

6．D

【分析】设李明最终通过面试为事件A，根据对立事件及相互独立事件的概率公式计算可得.

【详解】设李明最终通过面试为事件A，

则$P\left(A\right)=1-0.4\times0.4\times0.4=0.936$.

故选：D

7．A

【分析】由三角函数平移变换可得函数解析式$y=\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，令$2x-\dfrac{2\pi}{3}=\pi+k\pi$，可得对称中心，进而得到$\left|\varphi\right|$的最小值.

【详解】将函数$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位得：

$y=\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

令$2x-\dfrac{2\pi}{3}=k\pi$，$k\in Z$，得$x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}$，

所以$y=\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$图象的对称中心为$\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2},0\right)$

$\therefore$当$k=-1$时，$|\varphi|$取得最小值$\dfrac{\pi}{6}$.

故选：A.

8．A

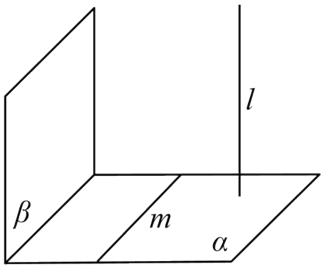
【分析】通过面面平行的性质判断充分性，通过列举例子判断必要性.

【详解】$l\perp\beta$，且$l\perp\alpha$，所以$\alpha//\beta$，又$m\subset\alpha$，所以$m//\beta$，充分性满足，

如图：满足$m//\beta$，$m\subset\alpha, l\perp\alpha$，但$l\perp\beta$不成立，故必要性不满足，

所以“$l\perp\beta$”是“$m//\beta$”的充分而不必要条件.

故选：A.

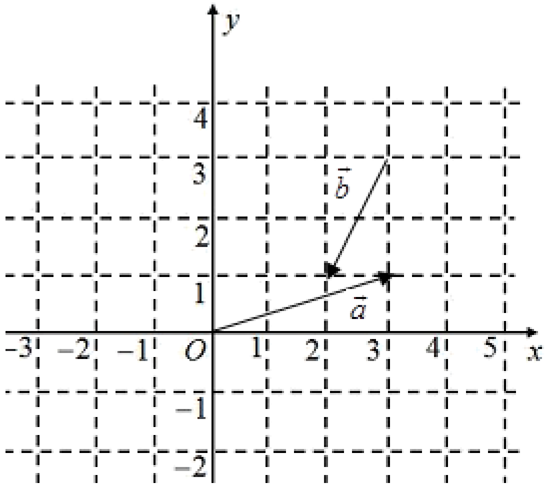


9．D

【分析】建立平面直角坐标系，利用数量积的坐标运算即可求解.

【详解】设小正方形的边长为1，

建立如图所示的平面直角坐标系，



则$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(2,1)-(3,3)=(-1,-2)$，

$$\cos\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3-2}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

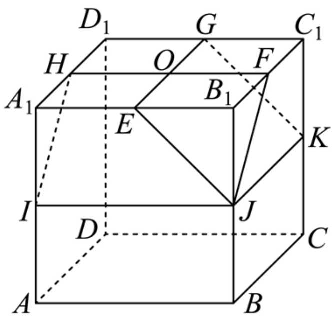
因为$0\le\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle\le\pi$，所以$\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=135^\circ$.

故选：D

10．C

【分析】先得出公共部分为四棱锥$J-B_1FOE$，然后结合棱锥的体积公式直接计算即可求解.

【详解】



如图所示，设HF,GE交于点O，由题意三棱柱B_1FJ-A_1HI与三棱柱B_1EJ-C_1GK在正方体内部的公共部分为四棱锥$J-B_1FOE$，

显然四棱锥$J-B_1FOE$的高为$JB_1=1$，底面是边长为1的正方形，

故所求体积为$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{3}$.

故选：C.

11． 2

【分析】根据$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，数量积求解参数x的值.

【详解】由$\vec{a}=\left(x+1,2\right),\vec{b}=\left(2,-3\right)$,若$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则$2\left(x+1\right)-2\times 3=0$，解得$x=2$.

故答案为：2.

12． 3i（答案不唯一）

【分析】由复数概念和复数的模即可求解.

【详解】$\because z$为纯虚数，$\therefore$设$z=b\mathrm{i},b\in\mathrm{R}$，$\left|z-2\mathrm{i}\right|=\left|b\mathrm{i}-2\mathrm{i}\right|=\left|(b-2)\mathrm{i}\right|=1$，

$\therefore\left(b-2\right)^2=1$，解得$b=3$或$1$，即$z=3\mathrm{i}$或$z=\mathrm{i}$.

故答案为：3i（答案不唯一）

13． $\frac{200}{9}$

【分析】取AC的中点D，连接VD，BD，过点P作$HG//AC$交VA、VC于点H、G，取BA、BC的三等分E、F（靠近A、C），连接HE、EF、FG，即可得到四边形$EFGH$