

2024 届云南省红河州高三第二次调测数学试题

注意事项:

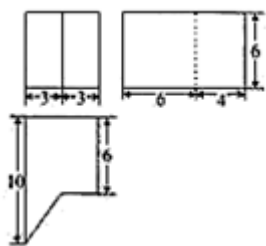
1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 抛物线 C 与圆 $C': x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$ 交于 M, N 两点, 若 $|MN| = \sqrt{6}$, 则 $\triangle VMNF$ 的面积为()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

2. 若某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为()



- A. 240 B. 264 C. 274 D. 282

3. 已知函数 $f(x)$ 满足当 $x \leq 0$ 时, $2f(x-2) = f(x)$, 且当 $x \in (-2, 0]$ 时, $f(x) = |x+1| - 1$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$. 若函数 $f(x)$ 的图象上关于原点对称的点恰好有 3 对, 则 a 的取值范围是()

- A. $(625, +\infty)$ B. $(4, 64)$ C. $(9, 625)$ D. $(9, 64)$

4. 设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 0 < x < 2\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$

- A. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 < x < 1\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

5. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BP$, $AC \perp PC$, $AB \perp AC$, $PB = PC = 2\sqrt{2}$, 点 P 到底面 ABC 的距离为 2, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为()

- A. 3π B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ C. 12π D. 24π

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $C = \frac{\pi}{3}$, 若 $\vec{m} = (c - \sqrt{6}, a - b)$, $\vec{n} = (a - b, c + \sqrt{6})$, 且 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为()

- A. 3 B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

7. 若函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$ 在 $x = -3$ 时取得极值, 则 $a =$ ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

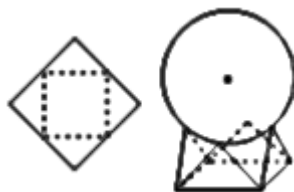
8. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 则 $|\vec{a} - 3\vec{b}| =$ ()

- A. $\sqrt{11}$ B. $\sqrt{37}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $\sqrt{43}$

9. 已知 $x > 0$, $a = x$, $b = x - \frac{x^2}{2}$, $c = \ln(1+x)$, 则 ()

- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

10. 如图, 用一边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形硬纸, 按各边中点垂直折起四个小三角形, 做成一个蛋巢, 将体积为 $\frac{4\pi}{3}$ 的鸡蛋 (视为球体) 放入其中, 蛋巢形状保持不变, 则鸡蛋中心 (球心) 与蛋巢底面的距离为 ()

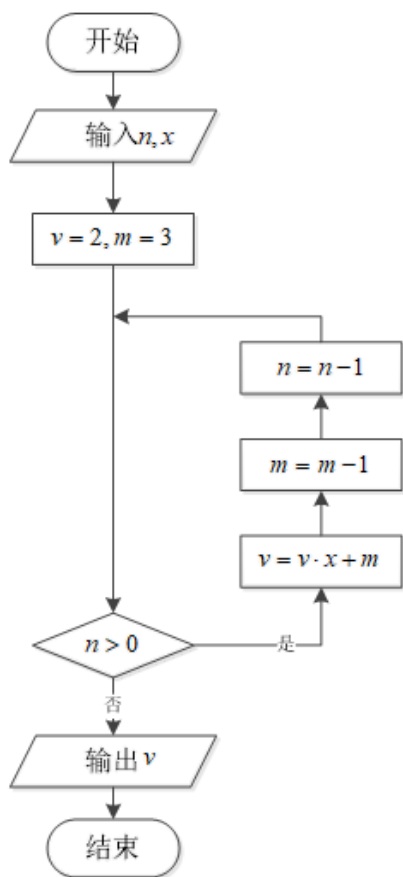


- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

11. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$, 若 $\alpha = a + \frac{1}{a}$, $\beta = b + \frac{1}{b}$, 则 $\alpha + \beta$ 的最小值是 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

12. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 普州 (现四川省安岳县) 人, 他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法, 至今仍是比较先进的算法. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例. 若输入 n 、 x 的值分别为 3、1, 则输出 v 的值为 ()



- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某学校高一、高二、高三年级的学生人数之比为 5:5:4，现按年级采用分层抽样的方法抽取若干人，若抽取的高三年级为 12 人，则抽取的样本容量为_____人.

14. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{4}{5}$ ，那么 $\tan \alpha \cdot \sin \alpha =$ _____.

15. 已知两个单位向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}|$ ，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

16. 设集合 $A = \{1, 3\}$ ， $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，则 $A \cap B =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $y = f(x)$ 与 $y = e^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称. (e 为自然对数的底数)

(1) 若 $y = f(x)$ 的图象在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线经过点 $(-e, -1)$ ，求 x_0 的值；

(2) 若不等式 $f(x) \geq \frac{1}{2}ax^2 - (1-a)x - 1$ 恒成立，求正整数 a 的最小值.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ，且 $2a - c = 2b \cos C$.

(1) 求 $\sin\left(\frac{A+C}{2} + B\right)$ 的值；

(2) 若 $b = \sqrt{3}$ ，求 $c - a$ 的取值范围.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$ ($a > 0$) (其中 $e = 2.718L$ 是自然对数的底数)

(1) 若 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 求正数 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)f'(x)$ 在 $x = x_1, x_2$ ($x_1 < x_2$) 处导数相等, 证明: $x_1 + x_2 < 2 \ln 2a$;

(3) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 证明 对于任意 $k \leq \frac{1}{e} + 1$, 若 $b < \frac{1}{2}$, 则直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一公共点 (注 当 $k > 1$ 时, 直线 $y = x + k$ 与曲线 $y = e^x$ 的交点在 y 轴两侧) .

20. (12分) [2018·石家庄一检] 已知函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ ($a \in R$) .

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $f(x_2) > -\frac{1}{2}$.

21. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 = 3a_3$, $a_4 + a_6 = 8$.

(1) 求 a_n .

(2) 设 $b_n = 2^n \cdot a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

22. (10分) 记函数 $f(x) = \left|x + \frac{1}{2}\right| + |2x - 1|$ 的最小值为 m .

(1) 求 m 的值;

(2) 若正数 a, b, c 满足 $abc = m$, 证明: $ab + bc + ca \geq \frac{9}{a + b + c}$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

由圆 C' 过原点, 知 M, N 中有一点 M 与原点重合, 作出图形, 由 $|C'M| = |C'N| = \sqrt{3}$, $|MN| = \sqrt{6}$, 得

$C'M \perp C'N$, 从而直线 MN 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 写出 N 点坐标, 代入抛物线方程求出参数 p , 可得 F

点坐标，从而得三角形面积.

【详解】

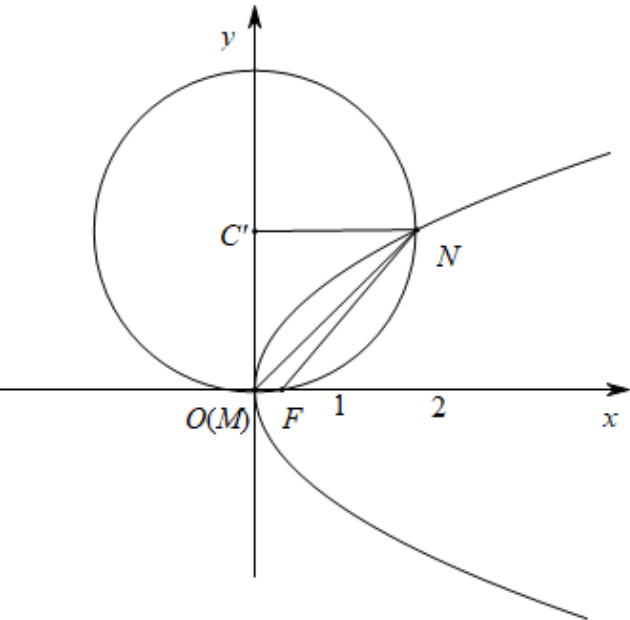
由题意圆 C' 过原点，所以原点是圆与抛物线的一个交点，不妨设为 M ，如图，

由于 $|C'M|=|C'N|=\sqrt{3}$ ， $|MN|=\sqrt{6}$ ， $\therefore C'M \perp C'N$ ， $\therefore \angle C'MN = \frac{\pi}{4}$ ， $\angle NOx = \frac{\pi}{4}$ ，

$\therefore$ 点 N 坐标为 $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ，代入抛物线方程得 $(\sqrt{3})^2 = 2p \times \sqrt{3}$ ， $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore F(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0)$ ， $S_{\triangle FMN} = \frac{1}{2}|MF| \times y_N = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3} = \frac{3}{8}$.

故选：B.



【点睛】

本题考查抛物线与圆相交问题，解题关键是发现原点 O 是其中一个交点，从而 $\triangle MNC'$ 是等腰直角三角形，于是可得 N 点坐标，问题可解，如果仅从方程组角度研究两曲线交点，恐怕难度会大大增加，甚至没法求解.

2、B

【解析】

将三视图还原成几何体，然后分别求出各个面的面积，得到答案.

【详解】

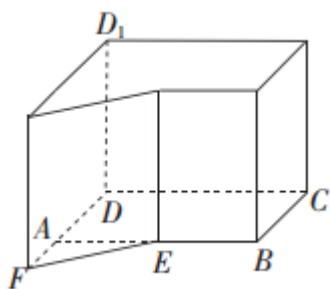
由三视图可得，该几何体的直观图如图所示，

延长 BE 交 DF 于 A 点，

其中 $AB = AD = DD_1 = 6$ ， $AE = 3$ ， $AF = 4$ ，

所以表面积 $S = (36 \times 5 + 3 \times 6) + \frac{3 \times 4}{2} \times 2 + 4 \times 6 + 30 = 264$.

故选 B 项.



【点睛】

本题考查三视图还原几何体，求组合体的表面积，属于中档题

3、C

【解析】

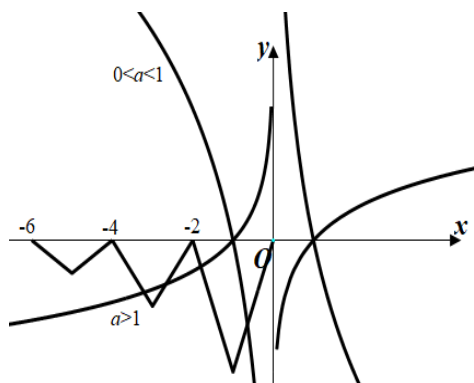
先作出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的部分图象，再作出 $f(x) = \log_a x$ 关于原点对称的图象，分类利用图像列出有 3 个交点时满足的条件，解之即可.

【详解】

先作出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的部分图象，再作出 $f(x) = \log_a x$ 关于原点对称的图象，

如图所示，当 $0 < a < 1$ 时，对称后的图象不可能与 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 的图象有 3 个交点；

当 $a > 1$ 时，要使函数 $f(x)$ 关于原点对称后的图象与所作的图象有 3 个交点，



$$\text{则 } \begin{cases} a > 1 \\ -\log_a 3 > -\frac{1}{2} \\ -\log_a 5 < -\frac{1}{4} \end{cases}, \text{ 解得 } 9 < a < 625.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查利用函数图象解决函数的交点个数问题，考查学生数形结合的思想、转化与化归的思想，是一道中档题.

4、B

【解析】

分析：由题意首先求得 $C_R B$ ，然后进行交集运算即可求得最终结果。

详解：由题意可得： $C_R B = \{x | x < 1\}$ ，

结合交集的定义可得： $A \cap (C_R B) = \{0 < x < 1\}$ 。

本题选择 B 选项。

点睛：本题主要考查交集的运算法则，补集的运算法则等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力。

5、C

【解析】

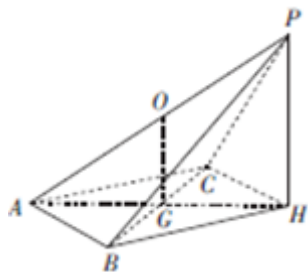
首先根据垂直关系可确定 $OP = OA = OB = OC$ ，由此可知 O 为三棱锥外接球的球心，在 $\triangle PAB$ 中，可以算出 AP 的一个表达式，在 $\triangle OAG$ 中，可以计算出 AO 的一个表达式，根据长度关系可构造等式求得半径，进而求出球的表面积。

【详解】

取 AP 中点 O ，由 $AB \perp BP$ ， $AC \perp PC$ 可知： $OP = OA = OB = OC$ ，

$\therefore O$ 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心，

过 P 作 $PH \perp$ 平面 ABC ，交平面 ABC 于 H ，连接 AH 交 BC 于 G ，连接 OG ， HB ， HC ，



$\because PB = PC$ ， $\therefore HB = HC$ ， $\therefore AB = AC$ ， $\therefore G$ 为 BC 的中点

由球的性质可知： $OG \perp$ 平面 ABC ， $\therefore OG \parallel PH$ ，且 $OG = \frac{1}{2}PH = 1$ 。

设 $AB = x$ ，

$\because PB = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore AO = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 8}$ ，

$\because AG = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ， $\therefore$ 在 $\triangle OAG$ 中， $AG^2 + OG^2 = OA^2$ ，

即 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 8}\right)^2$ ，解得： $x = 2$ ，

∴三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为: $AO = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + (2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$,

∴三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 12\pi$.

故选: C.

【点睛】

本题考查三棱锥外接球的表面积的求解问题, 求解几何体外接球相关问题的关键是能够利用球的性质确定外接球球心的位置.

6、C

【解析】

由 $\vec{m} \parallel \vec{n}$, 可得 $(a-b)^2 = (c-\sqrt{6})(c+\sqrt{6})$, 化简利用余弦定理可得 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$, 解得 ab . 即可得出三角形面积.

【详解】

解: 由 $\vec{m} = (c-\sqrt{6}, a-b)$, $\vec{n} = (a-b, c+\sqrt{6})$, 且 $\vec{m} \parallel \vec{n}$,

∴ $(a-b)^2 = (c-\sqrt{6})(c+\sqrt{6})$, 化为: $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab - 6$.

∴ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab - 6}{2ab} = \frac{1}{2}$, 解得 $ab = 6$.

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查了向量共线定理、余弦定理、三角形面积计算公式, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

7、D

【解析】

对函数求导, 根据函数在 $x = -3$ 时取得极值, 得到 $f'(-3) = 0$, 即可求出结果.

【详解】

因为 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$, 所以 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$,

又函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$ 在 $x = -3$ 时取得极值,

所以 $f'(-3) = 27 - 6a + 3 = 0$, 解得 $a = 5$.

故选 D

【点睛】

本题主要考查导数的应用，根据函数的极值求参数的问题，属于常考题型.

8、D

【解析】

先计算 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，然后将 $|\vec{a} - 3\vec{b}|$ 进行平方，，可得结果.

【详解】

由题意可得：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\therefore (\vec{a} - 3\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 1 + 6 + 36 = 43$$

$$\therefore \text{则 } |\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{43}.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查的是向量的数量积的运算和模的计算，属基础题。

9、D

【解析】

令 $f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ ，求 $f'(x)$ ，利用导数判断函数为单调递增，从而可得 $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ ，设

$g(x) = \ln(1+x) - x$ ，利用导数证出 $g(x)$ 为单调递减函数，从而证出 $\forall x > 0, \ln(1+x) < x$ ，即可得到答案.

【详解】

$$x > 0 \text{ 时, } x > x - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{令 } f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right), \text{ 求导 } f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$$

$\forall x > 0, f'(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 单调递增： $f(x) > f(0) = 0$

$$\therefore \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2},$$

当 $x > 0$ ，设 $g(x) = \ln(1+x) - x$ ，

$$\therefore g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0,$$

$$\text{又 } Q \ g(0) = 0,$$

$$\therefore g(x) = \ln(1+x) - x < 0, \text{ 即 } \forall x > 0, \ln(1+x) < x,$$

$$\text{故 } x > \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}.$$

故选：D

【点睛】

本题考查了作差法比较大小，考查了构造函数法，利用导数判断式子的大小，属于中档题.

10、D

【解析】

先求出球心到四个支点所在球的小圆的距离，再加上侧面三角形的高，即可求解.

【详解】

设四个支点所在球的小圆的圆心为 O' ，球心为 O ，

由题意，球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$ ，即 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}$ 可得球 O 的半径为 1，

又由边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形硬纸，可得圆 O' 的半径为 $\frac{1}{2}$ ，

$$\text{利用球的性质可得 } O'O^2 = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又由 O' 到底面的距离即为侧面三角形的高，其中高为 $\frac{1}{2}$ ，

$$\text{所以球心到底面的距离为 } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了空间几何体的结构特征，以及球的性质的综合应用，着重考查了数形结合思想，以及推理与计算能力，属于基础题.

11、C

【解析】

根据题意，将 a 、 b 代入 $\alpha + \beta$ ，利用基本不等式求出最小值即可.

【详解】

$$\because a > 0, b > 0, a+b=1,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/016054131052010211>