专题 13 二次函数

【专题目录】

【考纲要求】

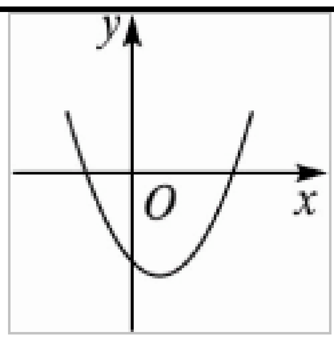
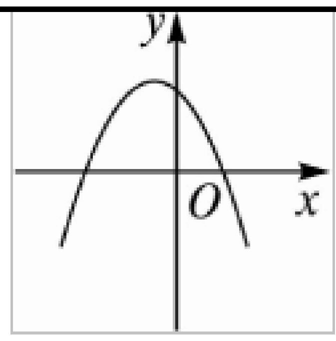
1、理解二次函数的有关概念，会用描点法画二次函数的图象，能从图象上认识二次函数的性质．

2、会根据公式确定图象的顶点、开口方向和对称轴，并能掌握二次函数图象的平移．

3、熟练掌握二次函数解析式的求法，并能用它解决有关的实际问题．

【考点总结】一、二次函数

<table>
<tr><td rowspan="3">二次函数</td><td>二次函数的概念</td><td>一般地，如果 $y=ax^2+bx+c(a，b，c$ 是常数，$a\neq0)$，那么 y 叫做 x 的二次函数．
注意：
(1)二次项系数 $a\neq0$；
(2)ax^2+bx+c 必须是整式；
(3)一次项可以为零，常数项也可以为零，一次项和常数项可以同时为零；
(4)自变量 x 的取值范围是全体实数．</td></tr>
<tr><td rowspan="2">二次函数的图象及性质</td><td>二次函数 $y=ax^2+bx+c(a，b，c$ 为常数，$a\neq0)$</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

		图象	 (a＞0)	 (a＜0)
		开口方向	开口向上	开口向下
		对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$	直线 $x=-\frac{b}{2a}$
		顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
		增减性	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小； 当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大； 当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小
		最值	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

【考点总结】二、二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的性质

1、抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的顶点式 $(h,0)$，对称轴是平行于 y 轴的直线 $x=h$。

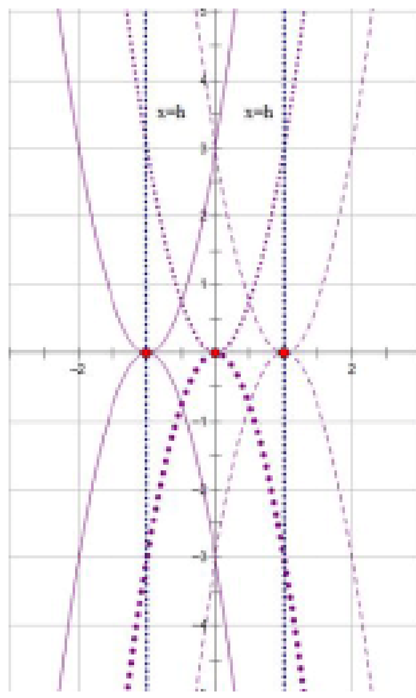
2、当 $a>0$ 时，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 在 x 轴的上方（除顶点外），它的开口向上，并且向上无限伸展；

当 $a<0$ 时，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 在 x 轴的下方（除顶点外），它的开口向下，并且向下无限伸展。

3、当 $a>0$ 时，在对称轴（$x=h$）的左侧，y 随着 x 的增大而减小；在对称轴（$x=h$）的右侧，y 随着 x 的增大而增大；当 $x=h$ 时，函数 y 的值最小（是 0）；

当 $a<0$ 时，在对称轴（$x=h$）的左侧，y 随着 x 的增大而增大；在对称轴（$x=h$）的右侧，y 随着 x 的增大而减小；当 $x=h$ 时，函数 y 的值最大（是 0）。

4、二次函数 $y=a(x-h)^2$ 与 $y=ax^2$ 的图像形状相同，可以看作是抛物线 $y=ax^2$ 整体沿 x 轴平移了 $|h|$ 个单位（当 $h>0$ 时，向右平移 $|h|$ 个单位；当 $h<0$



时，向左平移$\|h\|$个单位）得到的。	

【考点总结】三、二次函数 $y \quad a \quad x \quad h^{2} \quad k$ 与 $y \quad ax^{2}$ 的关系

二次函数 $y \quad a \quad x \quad h^{2} \quad k$ 与 $y \quad ax^{2}$ 的关系

1	一般地，由 $y \quad ax^{2}$ 的图像便可得到二次函数 $y \quad a \quad x \quad h^{2} \quad k$ 的图像：$y \quad a \quad x \quad h^{2} \quad k \quad a \quad 0$ 的图像可以看成 $y \quad ax^{2}$ 先沿 x 轴整体左（右）平移了$\|h\|$个单位（当 $h \quad 0$ 时，向右平移$\|h\|$个单位；当 $h \quad 0$ 时，向左平移$\|h\|$个单位），再沿 y 轴整体上（下）平移了$\|k\|$个单位（当 $k \quad 0$ 时，向上平移$\|k\|$个单位；当 $k \quad 0$ 时，向下平移$\|k\|$个单位）。
2	因此，二次函数 $y \quad a \quad x \quad h^{2} \quad k$ 的图像是一条抛物线，它的开口方向、对称轴和顶点坐标与 a, h, k 的值有关

二次函数 $y \quad a \quad x \quad h^{2} \quad k$ 的图像与性质

抛物线	$y \quad a \quad x \quad h^{2} \quad k \quad a \quad 0$	$y \quad a \quad x \quad h^{2} \quad k \quad a \quad 0$
顶点坐标	h, k	h, k
对称轴	直线 $x \quad h$	直线 $x \quad h$
位置	由 h 和 k 的符号确定	由 h 和 k 的符号确定
开口方向	向上	向下
增减性	在对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而减小； 在对称轴的右侧，y 随着 x 的增大而增大。	在对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而增大； 在对称轴的右侧，y 随着 x 的增大而减小。
最值	当 $x \quad h$ 时，最小值为 k	当 $x \quad h$ 时，最大值为 k
开口大小	$\|a\|$ 越大,开口越小，$\|a\|$ 越小,开口越大。	

【注意】

二次函数 $ax^2+bx+c=0$

① a 决定开口方向及开口大小，这与 $y=ax^2$ 中的 a 完全一样.

$a>0$ 时，抛物线开口向上；$a<0$ 时，抛物线开口向下；a 的绝对值越大，开口越小.

② b 和 a 共同决定抛物线对称轴的位置.由于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x\ \frac{b}{2a}$，故：

A. b=0 时，对称轴为 y 轴；B. $x\ \frac{b}{2a}>0$（即 a, b同号）时，对称轴在 y 轴左侧；C. $x\ \frac{b}{2a}<0$（即 a, b 异号）时，对称轴在 y 轴右侧.(口诀:"左同右异")

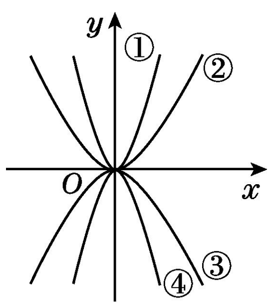
【技巧归纳】

技巧 1：二次函数的图像与系数的六种关系

【类型】一、a 与图像的关系

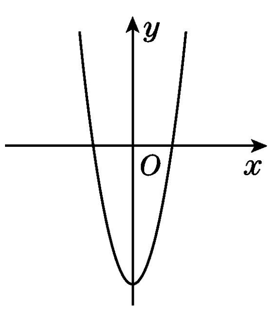
1．如图，四个函数 的图像分别对应的是①$y=ax^2$；②$y=bx^2$；③$y=cx^2$；④$y=dx^2$，则 a，b，c，d 的大小关系为(　　)

A．a＞b＞c＞d　　B．a＞b＞d＞c　　C．b＞a＞c＞d　　D．b＞a＞d＞c



【类型】二、b 与图像的关系

2．若二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图像如图所示，则 b 的值是(　　)

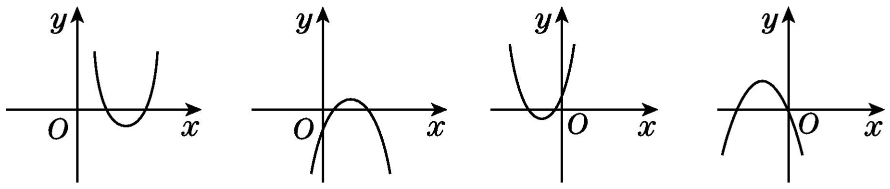


A．－5　　B．0　　C．3　　D．4

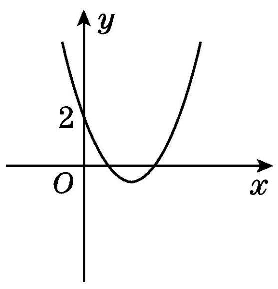
3．当抛物线 $y=x^2-nx+2$ 的对称轴是 y 轴时，n______0；当对称轴在 y 轴左侧时，n______0；当对称轴在 y 轴右侧时，n______0. 填"＞""＜"或"＝")

【类型】三、c 与图像的关系

4．下列抛物线可能是 $y=ax^2+bx$ 的图像的是(　　)

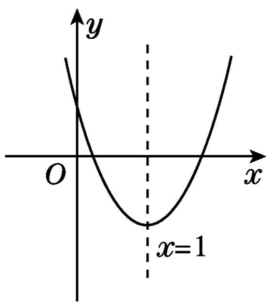


5．若将抛物线 $y=ax^2+bx+c-3$ 向上平移 4 个单位长度后得到的图像如图所示，则 c＝________.



【类型】四、a，b 与图像的关系

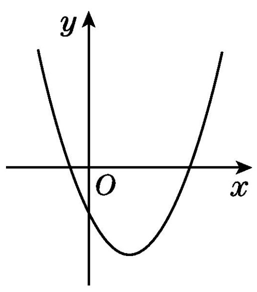
6．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图所示，则下列说法中不正确的是(　　)



A．$a>0$　　B．$b<0$　　C．$3a+b>0$　　D．$b>-2a$

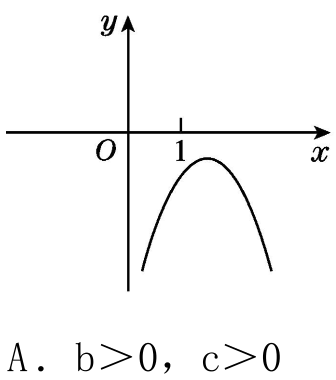
【类型】五、a，c 与图像的关系

7．二次函数 $y=(3-m)x^2-x+n+5$ 的图像如图所示，试求 $\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{n^2}-|m+n|$ 的值.



【类型】六、b，c 与图像的关系

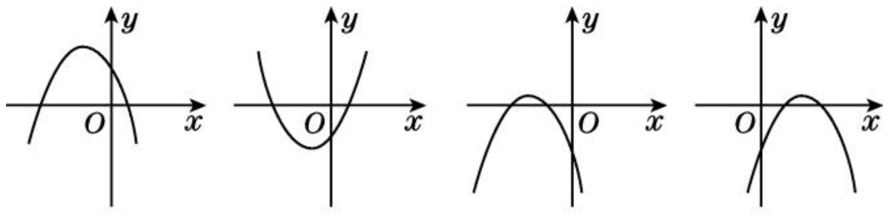
8．【中考·六盘水】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则(　　)



A．$b>0$，$c>0$　B．$b>0$，$c<0$　C．$b<0$，$c<0$　D．$b<0$，$c>0$

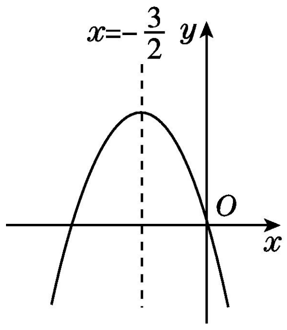
【类型】七、a，b，c 与图像的关系

9．在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，$a<0$，$b>0$，$c<0$，则符合条件的图像是(　　)



A　　　B　　　C　　　D

10．如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图象如图所示，给出以下四个结论：



①$abc=0$，②$a+b+c>0$，③$a>b$，④$4ac-b^2<0$.其中正确的结论有(　　)

A．1个　　　B．2个　　　C．3个　　　D．4个

参考答案

1．A　点拨：本题运用数形结合思想，在二次函数 $y=ax^2$ 中，$|a|$越大，其图像的开口越小，所以①，②中，$a>b>0$，③，④中，$d<c<0$，所以 $a>b>c>d$，故选 A.

2．C　点拨：∵二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图像关于 y 轴对称，∴$b-3=0$，$b=3$.

3．$=$；$<$；$>$

4．D　5.1　6.D

7．解：由图像知$\begin{cases}3-m>0,\\ n+5<0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m<3,\\ n<-5.\end{cases}$

∴$m-3<0$，$m+n<-2$.

∴$\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{n^2}-|m+n|=3-m-n+m+n=3$.

8．B　点拨：∵二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的开口向下，∴$a<0$.∵二次函数的图象与 y 轴交于负半轴，∴$c<0$.

∵对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$，∴$b>0$.

故选 B.

9．D

10．C　点拨：首先根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过原点，可得 $c=0$，所以 $abc=0$；然后根据 $x=1$ 时，$y<0$，可得 $a+b+c<0$；再根据图象开口向下，可得 $a<0$，图象的对称轴为直线 $x=-\frac{3}{2}$，可得$-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2}$，$b<0$，所以 $b=3a$，$a>b$；最后根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个交点，可得 $b^2-4ac>0$，所以 $4ac-b^2<0$，据此解答即可.

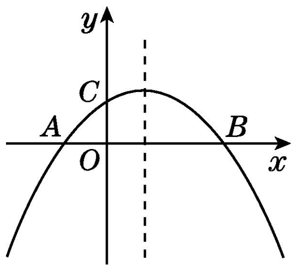
技巧2：二次函数图像信息题的四种常见类型

【类型】一、根据抛物线的特征确定a，b，c及与其有关的代数式的符号

1．如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图像与x轴交于A，B两点，与y轴交于点C，且 $OA=OC$. 则下列结论：

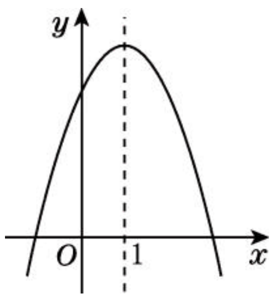
①$abc<0$；②$\frac{b^2-4ac}{4a}>0$；③$ac-b+1=0$；④$OA\cdot OB=-\frac{c}{a}$.其中正确结论的个数是(　　)

A．4　B．3　C．2　D．1



【类型】二、利用二次函数的图像比较大小

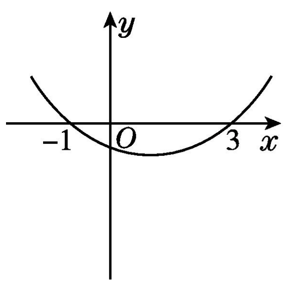
2．二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图像如图，若点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$在此函数图像上，且 $x_1<x_2<1$，则 y_1 与 y_2 的大小关系是(　　)



A．$y_1\leq y_2$　B．$y_1<y_2$　C．$y_1\geq y_2$　D．$y_1>y_2$

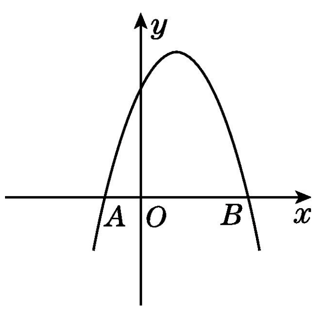
【类型】三、利用二次函数的图像求方程的解或不等式的解集

3．二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图像如图所示，则当函数值 $y>0$ 时，x的取值范围是(　　)



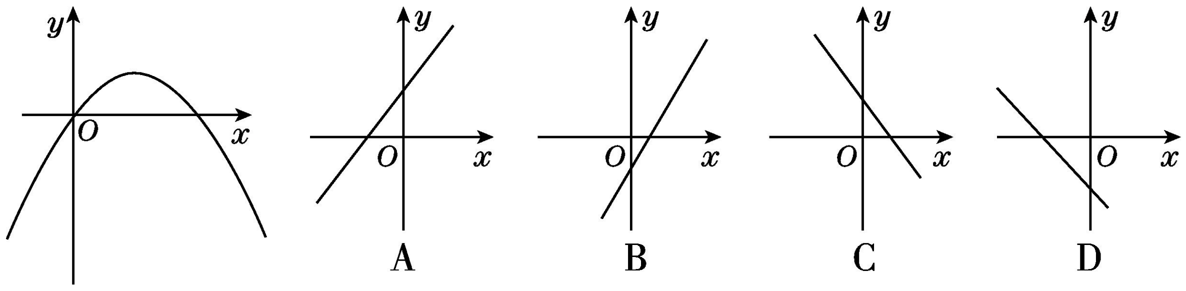
A．$x<-1$　B．$x>3$　C．$-1<x<3$　D．$x<-1$ 或 $x>3$

4．如图，二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 的图像经过点 $A(-1，0)$，$B(3，0)$，那么一元二次方程 $ax^2+bx=0$ 的根是____________.



【类型】四、根据抛物线的特征确定其他函数的图像

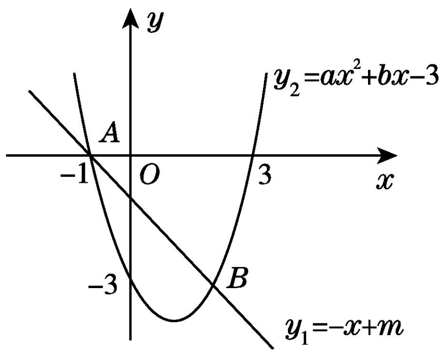
5．二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图像如图所示，那么一次函数 $y=ax+b$ 的图像大致是(　　)



6．如图，A(－1，0)，B(2，－3)两点在一次函数 $y_1=-x+m$ 与二次函数 $y_2=ax^2+bx-3$ 的图像上.

(1)求 m 的值和二次函数的表达式；

(2)设二次函数的图像交 y 轴于点 C，求△ABC 的面积.



参考答案

1．B　2.B　3.D　4.$x_1=0$，$x_2=2$　5.C

6．解：(1)将点 A(－1，0)的坐标代入 $y_1=-x+m$，得 $m=-1$；

将点 A(－1，0)，B(2，－3)的坐标分别代入 $y_2=ax^2+bx-3$，得 $\begin{cases}a-b-3=0,\\4a+2b-3=-3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$

∴$y_2=x^2-2x-3$.

(2)易知 C 点的坐标为(0，－3)，一次函数的图像与 y 轴的交点坐标为(0，－1).

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times[-1-(-3)]\times1+\frac{1}{2}\times[-1-(-3)]\times2=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times2=3$.

技巧 3：求二次函数表达式的常见类型

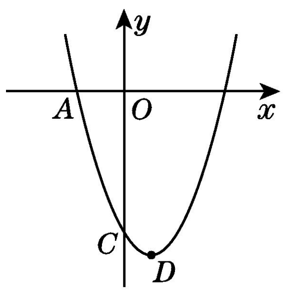
【类型】一、由函数的基本形式求表达式

题型 1：利用一般式求二次函数表达式

1．已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像与 y 轴交于点 C(0，－6)，与 x 轴的一个交点坐标是 A(－2，0).

(1)求二次函数的表达式，并写出顶点 D 的坐标；

(2)将二次函数的图像沿 x 轴向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位长度，当 $y<0$ 时，求 x 的取值范围.



题型 2：利用顶点式求二次函数表达式

2．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=1$ 时，有最大值 8，其图像的形状、开口方向与抛物线 $y=-2x^2$ 相同，则这个二次函数的表达式是(　　)

A．$y=-2x^2-x+3$　　B．$y=-2x^2+4$

C．$y=-2x^2+4x+8$　D．$y=-2x^2+4x+6$

3．已知某个二次函数的最大值是 2，图像顶点在直线 $y=x+1$ 上，并且图像经过点(3，－6)．求这个二次函数的表达式．

题型 3：利用交点式求二次函数表达式

4．已知抛物线与 x 轴交于 A(1，0)，B(－4，0)两点，与 y 轴交于点 C，且 AB＝BC，求此抛物线对应的函数表达式．

题型 4：利用平移法求二次函数表达式

5．把二次函数 $y=2x^2$ 的图像向左平移 1 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，平移后抛物线的表达式是___________．

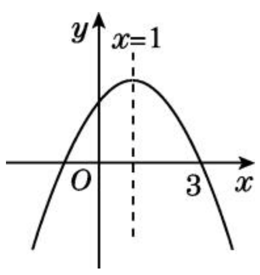
6．已知 $y=x^2+bx+c$ 的图像向右平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，得到的图像的表达式为 $y=x^2-2x-3$．

(1)b=________，c=________；

(2)求原函数图像的顶点坐标；

(3)求两个图像顶点之间的距离．

题型 5：利用对称轴法求二次函数表达式



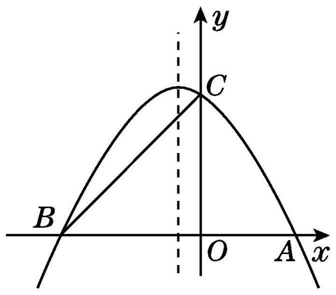
7．如图，已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=1$，且与 x 轴的一个交点为(3，0)，那么它对应的函数表达式是________________．

8．如图，抛物线与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C 点，点 A 的坐标为(2，0)，点 C 的坐标为(0，3)，

抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{1}{2}$.

(1)求抛物线的表达式；

(2)M 是线段 AB 上的任意一点，当△MBC 为等腰三角形时，求点 M 的坐标.

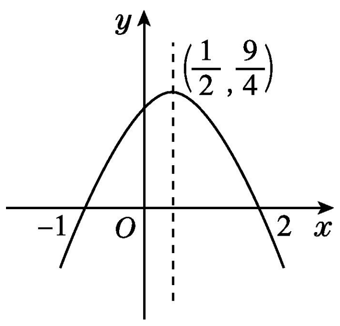


题型 6：灵活运用方法求二次函数的表达式

9．已知抛物线的顶点坐标为(－2，4)，且与 x 轴的一个交点坐标为(1，0)，求抛物线对应的函数表达式.

【类型】二、由函数图像中的信息求表达式

10．如图，是某个二次函数的图像，根据图像可知，该二次函数的表达式是(　　)



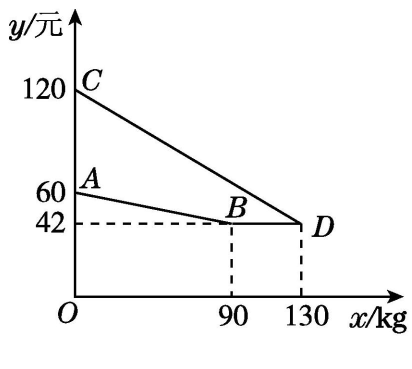
A．$y=x^2-x-2$　B．$y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2$　C．$y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$　D．$y=-x^2+x+2$

11．某企业生产并销售某种产品，假设销售量与产量相等．如图中的折线 ABD，线段 CD 分别表示该产品每千克生产成本 y_1(单位：元)，销售价 y_2(单位：元)与产量 x(单位：kg)之间的函数关系.

(1)请解释图中点 D 的横坐标、纵坐标的实际意义；

(2)求线段 AB 所表示的 y_1 与 x 之间的函数表达式；

(3)当该产品产量为多少时，获得的利润最大？最大利润是多少？



【类型】三、由表格信息求表达式

12．若 $y=ax^2+bx+c$，则由表格中信息可知 y 与 x 之间的函数关系式是(　　)

x	－1	0	1

ax^2			1
ax^2+bx+c	8	3	

A. $y=x^2-4x+3$　　B. $y=x^2-3x+4$　　C. $y=x^2-3x+3$　　D. $y=x^2-4x+8$

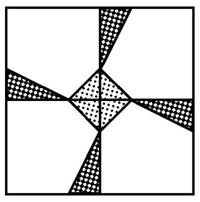
13. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 自变量 x 和函数值 y 的部分对应值如下表：

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…
y	…	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	…

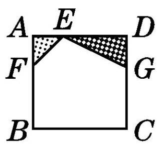
则该二次函数的表达式为______________.

【类型】四、几何应用中求二次函数的表达式

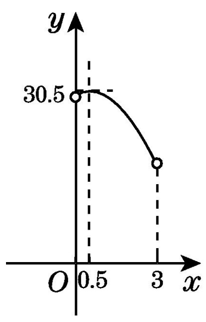
14. 某校校园内有一个大正方形花坛，如图甲所示，它由四个边长为 3 米的小正方形组成，且每个小正方形的种植方案相同．其中的一个小正方形 ABCD 如图乙所示，DG ＝1 米，AE ＝AF ＝x 米，在五边形 EFBCG 区域上种植花卉，则大正方形花坛种植花卉的面积 y 与 x 的函数图像大致是(　　)



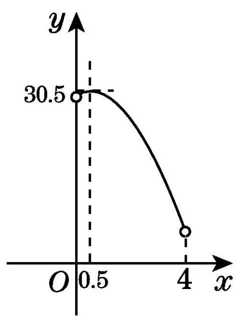
甲



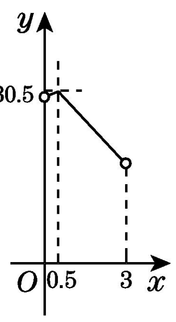
乙



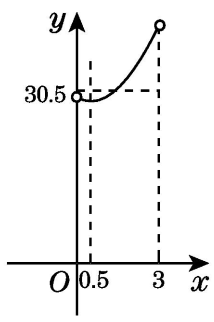
A



B



C



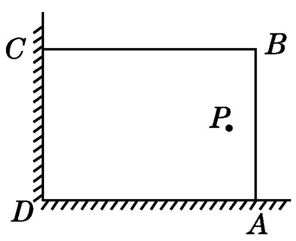
D

【类型】五、实际问题中求二次函数表达式

15. 在美化校园的活动中，某兴趣小组想借助如图所示的直角墙角(两墙足够长)，用 28 m 长的篱笆围成一个矩形花园 ABCD(篱笆只围 AB ，BC 两边)，设 AB ＝x m，花园的面积为 S m^2.

(1)求 S 与 x 之间的函数表达式；

(2)若在 P 处有一棵树与墙 CD ，AD 的距离分别是 15 m 和 6 m，要将这棵树围在花园内(含边界，不考虑树的粗细)，求花园面积的最大值．



参考答案

1．解：(1)∵把 C 点坐标(0，－6)代入二次函数的表达式得 c＝－6，把 A 点坐标(－2，0)代入 $y=x^2+bx-6$

得 $b=-1$，

∴二次函数的表达式为 $y=x^2-x-6$.

即 $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$.

∴顶点 D 的坐标为$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{25}{4}\right)$.

(2)将二次函数的图像沿 x 轴向左平移$\frac{5}{2}$个单位长度所得图像对应的函数表达式为 $y=(x+2)^2-\frac{25}{4}$.

令 $y=0$，得 $(x+2)^2-\frac{25}{4}=0$，

解得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{9}{2}$.

∵$a>0$，

∴当 $y<0$ 时，x 的取值范围是 $-\frac{9}{2}<x<\frac{1}{2}$.

2．D

3．解：设二次函数图像的顶点坐标为 $(x,\ 2)$，则 $2=x+1$，所以 $x=1$，所以图像的顶点坐标为 $(1,\ 2)$．设二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2+2$，将点 $(3,\ -6)$的坐标代入上式，可得 $a=-2$.所以该函数的表达式为 $y=-2(x-1)^2+2$，即 $y=-2x^2+4x$.

4．解：由 $A(1,\ 0)$，$B(-4,\ 0)$可知 $AB=5$，$OB=4$.

又∵$BC=AB$，∴$BC=5$.

在 Rt△BCO 中，$OC=\sqrt{BC^2-OB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∴C 点的坐标为 $(0,\ 3)$或 $(0,\ -3)$.

设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)(x+4)$，将点 $(0,\ 3)$的坐标代入得 $3=a(0-1)\times(0+4)$，解得 $a=-\frac{3}{4}$.

将点 $(0,\ -3)$的坐标代入得 $-3=a(0-1)\times(0+4)$，解得 $a=\frac{3}{4}$.

∴该抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{3}{4}(x-1)(x+4)$或 $y=\frac{3}{4}(x-1)(x+4)$，即 $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+3$ 或 $y=\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x-3$.

点拨：若给出抛物线与 x 轴的交点坐标或对称轴及抛物线与 x 轴的两交点间的距离，通常可设交点式求解.

5．$y=2x^2+4x$

6．解：(1)2；0

(2)原函数的表达式为 $y=x^2+2x=(x+1)^2-1$.

∴其图像的顶点坐标为$(-1，-1)$.

(3)原函数图像的顶点为$(-1，-1)$，新函数图像的顶点为$(1，-4)$．由勾股定理易得两个顶点之间的距离为$\sqrt{13}$.

7．$y=-x^2+2x+3$

8．解：(1)设抛物线的表达式为 $y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+k$.

把点(2，0)，(0，3)的坐标代入，得$\begin{cases}\frac{25}{4}a+k=0,\\ \frac{1}{4}a+k=3.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ k=\frac{25}{8}.\end{cases}$

∴$y=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{8}$,

即 $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$.

(2)由 $y=0$，得$-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{8}=0$,

解得 $x_1=2$，$x_2=-3$，∴$B(-3，0)$．[来源:学.科.网 Z.X.X.K]

①当 CM ＝BM 时，∵BO ＝CO ＝3，即△BOC 是等腰三角形，∴当 M 点在原点 O 处时，△MBC 是等腰三角形.

∴M 点坐标为(0，0).

②当 BC ＝BM 时，在 Rt△BOC 中，BO ＝CO ＝3，由勾股定理得 $BC=\sqrt{OC^2+OB^2}=3\sqrt{2}$，∴$BM=3\sqrt{2}$.

∴M 点坐标为$(3\sqrt{2}-3，0)$.

综上所述，点 M 坐标为(0，0)或$(3\sqrt{2}-3，0)$.

9．解：方法一：设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$，由题意得$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=-2,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=4,\\ a+b+c=0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-\frac{4}{9},\\ b=-\frac{16}{9},\\ c=\frac{20}{9}.\end{cases}$

∴抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

方法二：设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x+2)^2+4$，将点(1，0)的坐标代入得 $0=a(1+2)^2+4$，解

得 $a=-\frac{4}{9}$.

∴抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{9}(x+2)^2+4$.

即 $y=-\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

方法三：∵抛物线的顶点坐标为(－2，4)，与 x 轴的一个交点坐标为(1，0)，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=-2$，与 x 轴的另一个交点坐标为(－5，0).

设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)(x+5)$，将点(－2，4)的坐标代入得 $4=a(-2-1)(-2+5)$，

解得 $a=-\frac{4}{9}$.

∴抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{9}(x-1)(x+5)$，

即 $y=-\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

点拨：本题分别运用了一般式、顶点式、交点式求二次函数表达式，求二次函数的表达式时要根据题目条件灵活选择方法，如本题中，第一种方法列式较复杂，且计算量大，第二、三种方法较简便，计算量小.

10．D

11．解：(1)点 D 的横坐标、纵坐标的实际意义：当产量为 130 kg 时，该产品每千克生产成本与销售价相等，都为 42 元.

(2)设线段 AB 所表示的 y_1 与 x 之间的函数表达式为 $y_1=k_1x+b_1$.

因为 $y_1=k_1x+b_1$ 的图像过点(0，60)与(90，42)，

所以 $\begin{cases}b_1=60,\\90k_1+b_1=42.\end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases}k_1=-0.2,\\b_1=60.\end{cases}$

这个一次函数的表达式为 $y_1=-0.2x+60(0\leqslant x\leqslant 90)$

(3)设 y_2 与 x 之间的函数表达式为 $y_2=k_2x+b_2$.

因为 $y_2=k_2x+b_2$ 的图像过点(0，120)与(130，42)，

所以 $\begin{cases}b_2=120,\\130k_2+b_2=42.\end{cases}$

解方程得 $\begin{cases}k_2=-0.6,\\b_2=120.\end{cases}$

这个一次函数的表达式为 $y_2=-0.6x+120(0\leqslant x\leqslant 130)$

设产量为 x kg 时，获得的利润为 W 元.

当 $0\leqslant x\leqslant 90$ 时，$W=x[(-0.6x+120)-(-0.2x+60)]=-0.4(x-75)^2+2\,250$.

所以，当 $x=75$ 时，W 的值最大，最大值为 2 250.

当 $90<x\leqslant 130$ 时，$W=x[(-0.6x+120)-42]=-0.6(x-65)^2+2\,535$.

当 $x=90$ 时，$W=-0.6\times(90-65)^2+2\,535=2\,160$.

由 $-0.6<0$ 知，当 $x>65$ 时，W 随 x 的增大而减小，所以 $90<x\leqslant 130$ 时，$W<2\,160$.

因此，当该产品产量为 75 kg 时，获得的利润最大，最大利润是 2 250 元.

12. A　13. $y=x^2+x-2$

14. A　点拨：先求出△AEF 和△DEG 的面积，然后可得到五边形 EFBCG 的面积，继而可得 y 与 x 的函数表达式.

$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\times AF=\frac{1}{2}x^2$，$S_{\triangle DEG}=\frac{1}{2}DG\times DE=\frac{1}{2}\times 1\times(3-x)=\frac{3-x}{2}$，

$S_{五边形EFBCG}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle AEF}-S_{\triangle DEG}=9-\frac{1}{2}x^2-\frac{3-x}{2}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$，

则 $y=4\times\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}\right)=-2x^2+2x+30$.

$\because 0<AE<AD$，$\therefore 0<x<3$，

$\therefore y=-2x^2+2x+30(0<x<3)$.

故选 A.

15. 解：(1)$\because AB=x$ m，$\therefore BC=(28-x)$ m.

于是易得 $S=AB\cdot BC=x(28-x)=-x^2+28x$.

即 $S=-x^2+28x(0<x<28)$.

(2)由题意可知，$\begin{cases}x\geqslant 6\\28-x\geqslant 15.\end{cases}$

解得 $6\leqslant x\leqslant 13$.

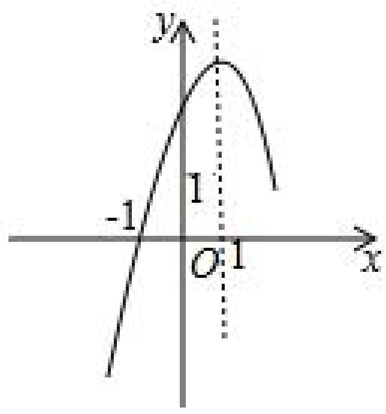
由(1)知，$S=-x^2+28x=-(x-14)^2+196$.

易知当 $6\leqslant x\leqslant 13$ 时，S 随 x 的增大而增大，$\therefore$ 当 $x=13$ 时，$S_{最大值}=195$，即花园面积的最大值为 195 m^2.

【题型讲解】

【题型】一、二次函数的图象及性质

例 1、二次函数 $y\quad ax^2\quad bx\quad c$ 的部分图象如图所示，则下列选项错误的是（ ）



A．若 $\quad 2, y_1$ ， $\quad 5, y_2$ 是图象上的两点，则 $y_1\quad y_2$

B．$3a\quad c\quad 0$

C．方程 $ax^2\quad bx\quad c\qquad 2$ 有两个不相等的实数根

D．当 $x\quad 0$ 时，y 随 x 的增大而减小

【答案】D

【提示】根据二次函数的图象与性质（对称性、增减性）、二次函数与一元二次方程的联系逐项判断即可得.

【详解】由函数的图象可知，二次函数 $y\quad ax^2\quad bx\quad c$ 的对称轴为 $x\qquad \frac{b}{2a}\quad 1$

则当 $x\quad 1$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x\quad 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，选项 D 错误

由对称性可知，$x\quad 4$ 时的函数值与 $x\qquad 2$ 时的函数值相等

则当 $x\quad 4$ 时，函数值为 y_1

$4\quad 5$

$y_1\quad y_2$，则选项 A 正确

$\frac{b}{2a}\quad 1$

$b\qquad 2a$

又 当 $x\qquad 1$ 时，$a\quad b\quad c\quad 0$

$a\quad (\ 2a)\quad c\quad 0$，即 $3a\quad c\quad 0$，选项 B 正确

由函数的图象可知，二次函数 $y\quad ax^2\quad bx\quad c$ 的图象与 x 轴有两个交点

则将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象向上平移 2 个单位长度得到的二次函数 $y=ax^2+bx+c+2$ 与 x 轴也有两个交点

因此，关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c+2=0$ 有两个不相等的实数根

即方程 $ax^2+bx+c=-2$ 有两个不相等的实数根，选项 C 正确

故选：D．

【题型】二、二次函数的图象与系数之间的关系

例 2、如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$ 与 x 轴交于点（4，0），其对称轴为直线 $x=1$，结合图象给出下列结论：

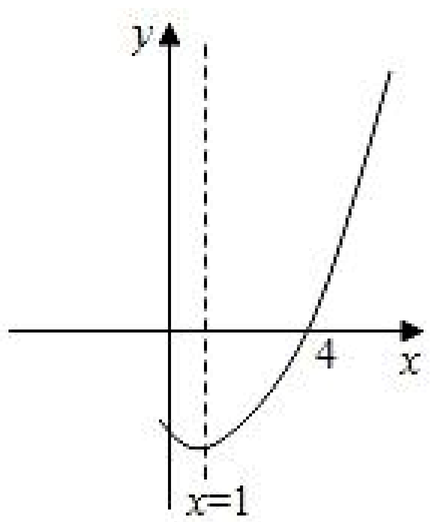
①$ac<0$；

②$4a-2b+c>0$；

③当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而增大；

④关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根．

其中正确的结论有（　　）



A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

【答案】C

【提示】根据抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标、增减性以及与 x 轴 y 轴的交点，综合判断即可．

【详解】解：抛物线开口向上，因此 $a>0$，与 y 轴交于负半轴，因此 $c<0$，故 $ac<0$，所以①正确；

抛物线对称轴为 $x=1$，与 x 轴的一个交点为（4，0），则另一个交点为（﹣2，0），于是有 $4a-2b+c=0$，所以②不正确；

$x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，所以③正确；

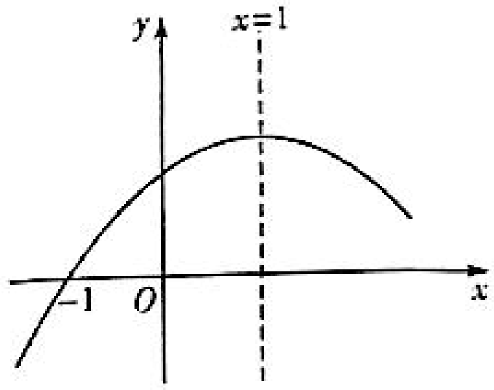
抛物线与 x 轴有两个不同交点，因此关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，所以④正确；

综上所述，正确的结论有：①③④，

故选：C．

【题型】三、二次函数的对称性

例 3、抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 x 轴的一个交点坐标为 $(-1,0)$，对称轴是直线 $x=1$，其部分图象如图所示，则此抛物线与 x 轴的另一个交点坐标是（　　）



A．$\left(\frac{7}{2},0\right)$　　B．$(3,0)$　　C．$\left(\frac{5}{2},0\right)$　　D．$(2,0)$

【答案】B

【提示】由函数的对称性可得结论.

【详解】

解：设此抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为（x，0），

∵抛物线与 x 轴的一个交点坐标为 $(-1,0)$，对称轴是直线 $x=1$，

∴$\frac{x+(-1)}{2}=1$，解得 x=3,

此抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为（3，0），

故选：B．

【题型】四、二次函数的最值

例 4、点 P(m，n)在以 y 轴为对称轴的二次函数 $y=x^2+ax+4$ 的图象上．则 m－n 的最大值等于（　　）

A．$\frac{15}{4}$　　B．4　　C．$-\frac{15}{4}$　　D．$-\frac{17}{4}$

【答案】C

【提示】根据题意，可以得到 a 的值以及 m 和 n 的关系，然后将 m、n 作差，利用二次函数的性质，即可求出 m－n 的最大值.

【详解】解：∵点 P（m，n）在以 y 轴为对称轴的二次函数 $y=x^2+ax+4$ 的图象上，