

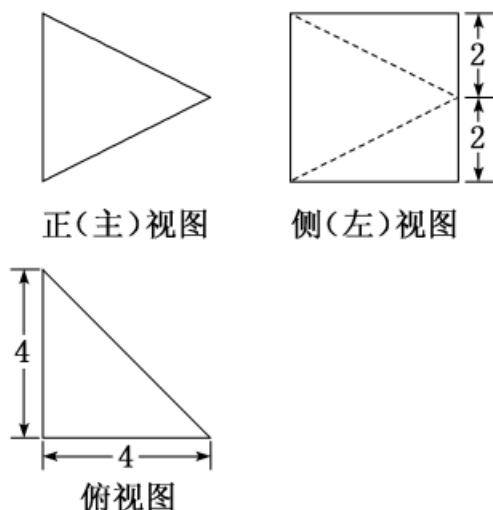
2023-2024 学年广东省汕头市达濠华桥中学高三第五次模拟考试（数学试题理）试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是（ ）



- A. $\frac{64}{3}$ B. 64 C. $\frac{32}{3}$ D. 32
2. 已知七人排成一排拍照，其中甲、乙、丙三人两两不相邻，甲、丁两人必须相邻，则满足要求的排队方法数为（ ）。

- A. 432 B. 576 C. 696 D. 960

3. 已知定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \frac{1}{2}f(x+2)$ ，且当 $x \in [0, 2)$ 时， $f(x) = -x^2 + 2x$ 。设 $f(x)$ 在

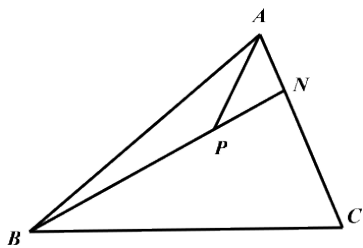
$[2n-2, 2n)$ 上的最大值为 a_n ($n \in \mathbb{N}^*$)，且数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n 。若对于任意正整数 n 不等式

$k(S_n + 1) \geq 2n - 9$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为（ ）

- A. $[0, +\infty)$ B. $\left[\frac{1}{32}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{3}{64}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{7}{64}, +\infty\right)$

4. 已知符号函数 $\text{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的减函数， $g(x) = f(x) - f(ax)$ ($a > 1$)，则（ ）

- A. $\text{sgn}[g(x)] = \text{sgn}x$ B. $\text{sgn}[g(x)] = -\text{sgn}x$
C. $\text{sgn}[g(x)] = \text{sgn}[f(x)]$ D. $\text{sgn}[g(x)] = -\text{sgn}[f(x)]$



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{9}$ C. 1 D. 2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a} = (-4, 3)$, $\vec{b} = (6, m)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m =$ _____.
14. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 直线 l 与圆 O 交于 P, Q 两点, $A(2, 2)$, 若 $|AP|^2 + |AQ|^2 = 40$, 则弦 PQ 的长度的最大值为_____.
15. 平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 已知 $A(3, 1), B(-1, 3)$, 若点 C 满足 $\vec{OC} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 且 $\alpha + \beta = 1$, 则点 C 的轨迹方程为_____

16. 某高中共有 1800 人, 其中高一、高二、高三年级的人数依次成等差数列, 现用分层抽样的方法从中抽取 60 人, 那么高二年级被抽取的人数为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x-a}{x+1} + \ln(x+1), a \in \mathbb{R}$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 函数 $g(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, 若对于 $\forall x_1 \in (-1, +\infty), \exists x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 求 a 的取值范围.
18. (12 分) 如图, 设 A 是由 $n \times n$ 个实数组成的 n 行 n 列的数表, 其中 $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$ 表示位于第 i 行第 j 列的实数, 且 $a_{ij} \in \{1, -1\}$. 记 $S(n, n)$ 为所有这样的数表构成的集合. 对于 $A \in S(n, n)$, 记 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行各数之积,

$c_j(A)$ 为 A 的第 j 列各数之积. 令 $l(A) = \sum_{i=1}^n r_i(A) + \sum_{j=1}^n c_j(A)$

a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_{21}	a_{22}		a_{2n}
...	...	...	...
a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

(I) 请写出一个 $A \in S(4, 4)$, 使得 $l(A) = 0$;

(Ⅱ) 是否存在 $A \in S(9, 9)$, 使得 $I(A)=0$? 说明理由;

(Ⅲ) 给定正整数 n , 对于所有的 $A \in S(n, n)$, 求 $I(A)$ 的取值集合.

19. (12 分) 已知点 $B(0, -2)$ 和椭圆 $M: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. 直线 $l: y = kx + 1$ 与椭圆 M 交于不同的两点 P, Q .

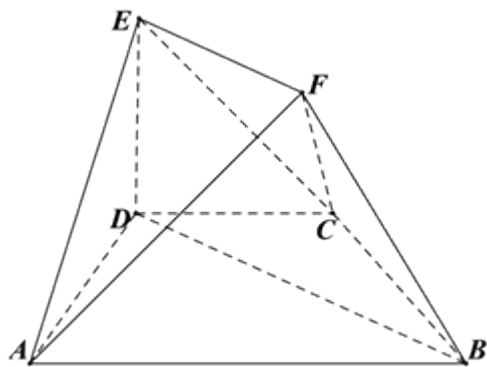
(1) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 求 $\triangle PBQ$ 的面积;

(2) 设直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 当 C 为 PB 中点时, 求 k 的值.

20. (12 分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ABD = 30^\circ$, $AB = 2CD = 2AD = 2$, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel BD$, 且 $BD = 2EF$.

(Ⅰ) 求证: 平面 $ADE \perp$ 平面 $BDEF$;

(Ⅱ) 若二面角 $C-BF-D$ 的大小为 60° , 求 CF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.

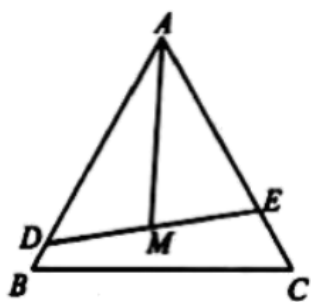


21. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 以坐标原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$.

(1) 写出直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, $\triangle PAB$ 的顶点 P 也在曲线 C 上运动, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

22. (10 分) 某公园有一块边长为 3 百米的正三角形 ABC 空地, 拟将它分割成面积相等的三个区域, 用来种植三种花卉. 方案是: 先建造一条直道 DE 将 $\triangle ABC$ 分成面积之比为 $2:1$ 的两部分 (点 D, E 分别在边 AB, AC 上); 再取 DE 的中点 M , 建造直道 AM (如图). 设 $AD = x$, $DE = y_1$, $AM = y_2$ (单位: 百米).



(1) 分别求 y_1 , y_2 关于 x 的函数关系式;

(2) 试确定点 D 的位置, 使两条直道的长度之和最小, 并求出最小值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

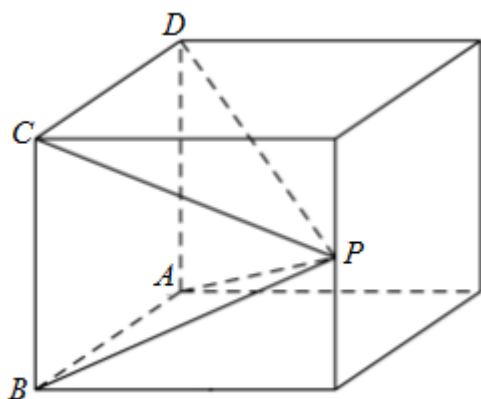
1、A

【解析】

根据三视图, 还原空间几何体, 即可得该几何体的体积.

【详解】

由该几何体的三视图, 还原空间几何体如下图所示:



可知该几何体是底面在左侧的四棱锥, 其底面是边长为 4 的正方形, 高为 4,

$$\text{故 } V = \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 4 = \frac{64}{3}.$$

故选: A

【点睛】

本题考查了三视图的简单应用, 由三视图还原空间几何体, 棱锥体积的求法, 属于基础题.

2、B

【解析】

先把没有要求的3人排好，再分如下两种情况讨论：1.甲、丁两者一起，与乙、丙都不相邻，2.甲、丁一起与乙、丙二者之一相邻。

【详解】

首先将除甲、乙、丙、丁外的其余3人排好，共有 A_3^3 种不同排列方式，甲、丁排在一起共有 A_2^2 种不同方式；

若甲、丁一起与乙、丙都不相邻，插入余下三人产生的空档中，共有 A_4^3 种不同方式；

若甲、丁一起与乙、丙二者之一相邻，插入余下三人产生的空档中，共有 $C_2^1 A_4^2$ 种不同方式；

根据分类加法、分步乘法原理，得满足要求的排队方法数为 $A_3^3 A_2^2 (A_4^3 + C_2^1 A_4^2) = 576$ 种。

故选：B.

【点睛】

本题考查排列组合的综合应用，在分类时，要注意不重不漏的原则，本题是一道中档题。

3、C

【解析】

由已知先求出 $f(x)_{\max} = 2^{n-1}$ ，即 $a_n = 2^{n-1}$ ，进一步可得 $S_n = 2^n - 1$ ，再将所求问题转化为 $k \geq \frac{2n-9}{2^n}$ 对于任意正整数 n 恒成立，设 $c_n = \frac{2n-9}{2^n}$ ，只需找到数列 $\{c_n\}$ 的最大值即可。

【详解】

当 $2n-2 \leq x < 2n$ 时，则 $0 \leq x+2-2n < 2$ ， $f(x+2-2n) = -(x+2-2n)(x-2n)$ ，

所以， $f(x) = 2^{n-1} f[x-2(n-1)] = -2^{n-1} (x+2-2n)(x-2n)$ ，显然当 $x = 2n-1$ 时，

$f(x)_{\max} = 2^{n-1}$ ，故 $a_n = 2^{n-1}$ ， $S_n = \frac{1 \times (1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1$ ，若对于任意正整数 n 不等式

$k(S_n + 1) \geq 2n-9$ 恒成立，即 $k2^n \geq 2n-9$ 对于任意正整数 n 恒成立，即 $k \geq \frac{2n-9}{2^n}$ 对于任

意正整数 n 恒成立，设 $c_n = \frac{2n-9}{2^n}$ ， $c_{n+1} - c_n = \frac{11-2n}{2^{n+1}}$ ，令 $\frac{11-2n}{2^{n+1}} > 0$ ，解得 $n < \frac{11}{2}$ ，

令 $\frac{11-2n}{2^{n+1}} < 0$ ，解得 $n > \frac{11}{2}$ ，考虑到 $n \in \mathbb{N}^*$ ，故有当 $n \leq 5$ 时， $\{c_n\}$ 单调递增，

当 $n \geq 6$ 时，有 $\{c_n\}$ 单调递减，故数列 $\{c_n\}$ 的最大值为 $c_6 = \frac{3}{2^6} = \frac{3}{64}$ ，

所以 $k \geq \frac{3}{64}$ 。

故选：C.

【点睛】

本题考查数列中的不等式恒成立问题，涉及到求函数解析、等比数列前 n 项和、数列单调性的判断等知识，是一道较为综合的数列题.

4、A

【解析】

根据符号函数的解析式，结合 $f(x)$ 的单调性分析即可得解.

【详解】

根据题意， $g(x) = f(x) - f(ax)$ ，而 $f(x)$ 是 R 上的减函数，

当 $x > 0$ 时， $x < ax$ ，则有 $f(x) > f(ax)$ ，则 $g(x) = f(x) - f(ax) > 0$ ，此时 $\operatorname{sgn}[g(x)] = 1$ ，

当 $x = 0$ 时， $x = ax$ ，则有 $f(x) = f(ax)$ ，则 $g(x) = f(x) - f(ax) = 0$ ，此时 $\operatorname{sgn}[g(x)] = 0$ ，

当 $x < 0$ 时， $x > ax$ ，则有 $f(x) < f(ax)$ ，则 $g(x) = f(x) - f(ax) < 0$ ，此时 $\operatorname{sgn}[g(x)] = -1$ ，

综合有： $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}(x)$ ；

故选：A.

【点睛】

此题考查函数新定义问题，涉及函数单调性辨析，关键在于读懂定义，根据自变量的取值范围分类讨论.

5、D

【解析】

先根据向量坐标运算求出 $\vec{u} + \vec{v} = (3, \sqrt{3})$ 和 $\cos \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$ ，进而求出 $\sin \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$ ，代入题中给的定义即可求解.

【详解】

由题意 $\vec{v} = \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) = (1, \sqrt{3})$ ，则 $\vec{u} + \vec{v} = (3, \sqrt{3})$ ， $\cos \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，得 $\sin \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}$ ，由定义知

$$\left| \vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) \right| = \left| \vec{u} \right| \cdot \left| \vec{u} + \vec{v} \right| \sin \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3},$$

故选:D.

【点睛】

此题考查向量的坐标运算，引入新定义，属于简单题目.

6、B

【解析】

利用复数的四则运算以及几何意义即可求解.

【详解】

解: $z = \frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-1+2i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i,$

则复数 $z = \frac{i}{2-i}$ (i 是虚数单位) 在复平面内对应的点的坐标为: $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right),$

位于第二象限.

故选: B.

【点睛】

本题考查了复数的四则运算以及复数的几何意义, 属于基础题.

7、D

【解析】

由 $a_7 = 2a_6 + 3a_5$, 可得 $q = 3$, 由 $a_m \cdot a_n = 9a_1^2$, 可得 $m + n = 4$, 再利用“1”的妙用即可求出所求式子的最小值.

【详解】

设等比数列公比为 $q (q > 0)$, 由已知, $a_5 q^2 = 2a_5 q + 3a_5$, 即 $q^2 = 2q + 3$,

解得 $q = 3$ 或 $q = -1$ (舍), 又 $a_m \cdot a_n = 9a_1^2$, 所以 $a_1 3^{m-1} \cdot a_1 3^{n-1} = 9a_1^2$,

即 $3^{m+n-2} = 3^2$, 故 $m + n = 4$, 所以 $\frac{1}{m} + \frac{9}{n} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m} + \frac{9}{n} \right) (m + n) = \frac{1}{4} \left(10 + \frac{n}{m} + \frac{9m}{n} \right)$
 $\geq \frac{1}{4} (10 + 2\sqrt{9}) = 4$, 当且仅当 $m = 1, n = 3$ 时, 等号成立.

故选: D.

【点睛】

本题考查利用基本不等式求式子和的最小值问题, 涉及到等比数列的知识, 是一道中档题.

8、B

【解析】

利用正态分布密度曲线的对称性可得出 $P(X < 0) = P(X > 2)$, 进而可得出结果.

【详解】

Q $X: N(1, 4)$, 所以, $P(X < 0) = P(X > 2) = 0.3$.

故选: B.

【点睛】

本题考查利用正态分布密度曲线的对称性求概率, 属于基础题.

9、A

【解析】

通过方差公式分析可知方差没有改变，中位数、众数和平均数都发生了改变.

【详解】

由题可知，中位数和众数、平均数都有变化.

本次和上次的月考成绩相比，成绩和平均数都增加了 50，所以 $(x_n - \bar{x})^2$ 没有改变，

根据方差公式 $S^2 = \frac{1}{8}[(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_8 - \bar{x})^2]$ 可知方差不变.

故选：A

【点睛】

本题主要考查样本的数字特征，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

10、A

【解析】

由已知可得到直线 $2bx - ay = 0$ 的倾斜角为 45° ，有 $\frac{2b}{a} = 1$ ，再利用 $a^2 = b^2 + c^2$ 即可解决.

【详解】

由 F 到直线 $2bx - ay = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}c$ ，得直线 $2bx - ay = 0$ 的倾斜角为 45° ，所以 $\frac{2b}{a} = 1$ ，

即 $4(a^2 - c^2) = a^2$ ，解得 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查椭圆离心率的问题，一般求椭圆离心率的问题时，通常是构造关于 a, b, c 的方程或不等式，本题是一道容易题.

11、A

【解析】

由题可知 $0 < x_i < y_i \leq 4$ ，且 $x_i^{y_i} = y_i^{x_i}$ 可得 $\frac{\ln x_i}{x_i} = \frac{\ln y_i}{y_i}$ ，构造函数 $h(t) = \frac{\ln t}{t}$ ($0 < t \leq 4$) 求导，通过导函数求出 $h(t)$

的单调性，结合图像得出 $t_{\min} = 2$ ，即 $2 \leq x_i < e$ 得出 $3x_n < 3e$ ，

从而得出 n 的最大值.

【详解】

因为 $0 < x_i < y_i \leq 4$ ， $x_i^{y_i} = y_i^{x_i}$

则 $\ln x_i^{y_i} = \ln y_i^{x_i}$, 即 $y_i \ln x_i = x_i \ln y_i$

整理得 $\frac{\ln x_i}{x_i} = \frac{\ln y_i}{y_i}$, 令 $t = x_i = y_i$,

设 $h(t) = \frac{\ln t}{t} (0 < t \leq 4)$,

则 $h'(t) = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - 1 \cdot \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}$,

令 $h'(t) > 0$, 则 $0 < t < e$, 令 $h'(t) < 0$, 则 $e < t \leq 4$,

故 $h(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, 4)$ 上单调递减, 则 $h(e) = \frac{1}{e}$,

因为 $x_i < y_i$, $h(x_i) = h(y_i)$,

由题可知: $h(t) = \frac{1}{4} \ln 4$ 时, 则 $t_{\min} = 2$, 所以 $2 \leq t < e$,

所以 $2 \leq x_i < e < y_i \leq 4$,

当 x_n 无限接近 e 时, 满足条件, 所以 $2 \leq x_n < e$,

所以要使得 $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} < 3x_n < 3e \approx 8.154$

故当 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ 时, 可有 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 < 8.154$,

故 $n-1 \leq 4$, 即 $n \leq 5$,

所以: n 最大值为 5.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查利用导数求函数单调性、极值和最值, 以及运用构造函数法和放缩法, 同时考查转化思想和解题能力.

12、B

【解析】

$mAC = AP - \frac{2}{3}AB$ 变形为 $AP = mAC + \frac{2}{3}AB$, 由 $AN = \frac{1}{3}AC$ 得 $AC = 3AN$, 转化在 $VABN$ 中, 利用 B 、 P 、 N

三点共线可得.

【详解】

解: 依题: $AP = mAC + \frac{2}{3}AB = 3mAN + \frac{2}{3}AB$,

又 B , P , N 三点共线,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/017062015033006161>