

第 03 讲 7.2 离散型随机变量及其分布列

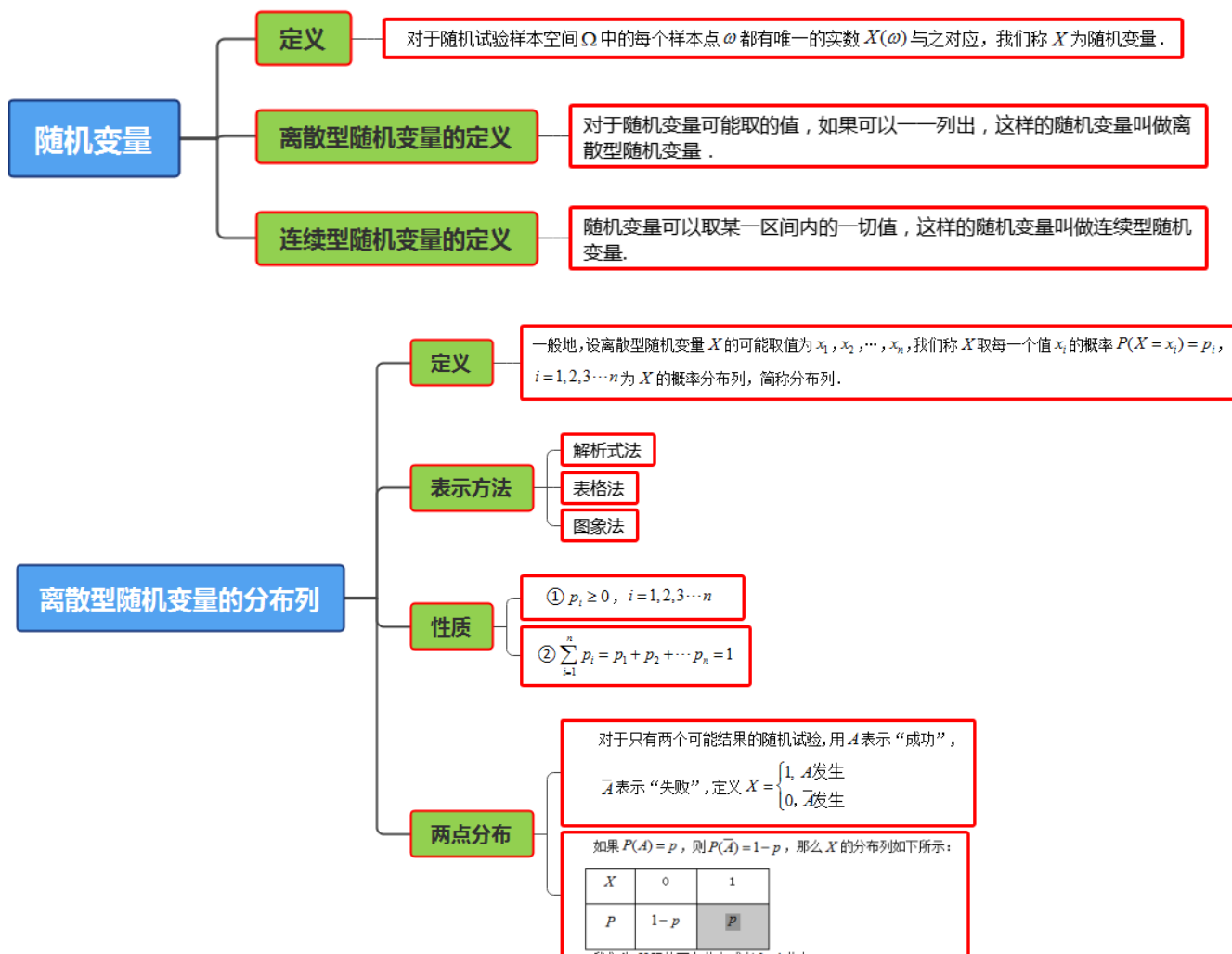
01

学习目标

课程标准	学习目标
1.通过具体案例，了解离散型随机变量的概念，理解随机变量的分布列及其性质。 2.通过具体案例，了解两点分布的概念及特点。 3.会求离散型随机变量的分布列及两点分布列的相关量。	通过本节课的学习，要求会求简单应用问题中的离散型随机变量的分布列，能应用分布列的相关性质求问题中的相关量，会应用两点分布的特点解决与两点分布有关的问题

02

思维导图



知识点 01: 离散型随机变量

(1) 随机变量的定义

一般地, 对于随机试验样本空间 Ω 中的每个样本点 ω 都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应, 我们称 X 为随机变量.

表示: 用大写英文字母表示随机变量, 如 X, Y, Z ; 用小写英文字母表示随机变量的取值, 如 x, y, z .

特征: 随机试验中, 每个样本点都有唯一的一个实数与之对应, 随机变量有如下特征:

- ① 取值依赖于样本点.
- ② 所有可能取值是明确的.

(2) 随机变量与函数的关系

共同点: 随机变量和函数都是一种映射

区别: 随机变量把试验的结果映为实数, 函数把实数映为实数

联系: 试验结果的范围相当于函数的定义域, 随机变量的取值范围相当与函数的值域;

注意: 所有随机变量的取值范围的集合叫做随机变量的值域.

(3) 离散型随机变量的定义

对于随机变量可能取的值, 如果可以一一列出, 这样的随机变量叫做离散型随机变量.

离散型随机变量的特征:

- ① 可用数值表示;
- ② 试验之前可以判断其可能出现的所有值;
- ③ 试验之前不能确定取何值;
- ④ 试验结果能一一列出;
- ⑤ 本章研究的离散型随机变量只取有限个值

(4) 连续型随机变量的定义

随机变量可以取某一区间内的一切值, 这样的随机变量叫做连续型随机变量.

知识点 02: 离散型随机变量的分布列

(1) 离散型随机变量的分布列的定义

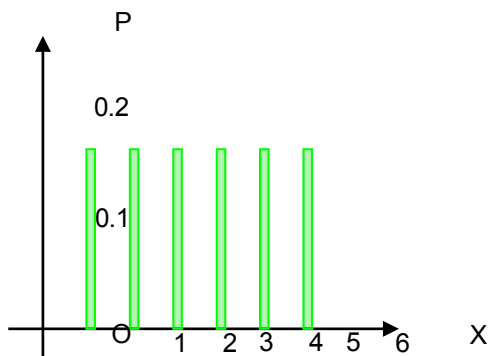
一般地, 设离散型随机变量 X 的可能取值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 我们称 X 取每一个值 x_i 的概率 $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 为 X 的概率分布列, 简称分布列.

① 解析式法: $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$

② 表格法:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n

③图象法：



(2) 离散型随机变量的分布列的性质

① $p_i \geq 0, i=1, 2, 3, \dots, n$

② $\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

注意：①.列出随机变量的所有可能取值；

②.求出随机变量的每一个值发生的概率.

【即学即练 1】 1. (2024 上·辽宁·高二校联考期末) 设 $0 < p < 1$ ，随机变量 ξ 的分布列为：

ξ	5	8	9
P	$\frac{1-p}{3}$	$\frac{p}{2}$	$\frac{2p}{3}$

则 $p = (\quad)$

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

【答案】 D

【详解】 由 $\frac{1-p}{3} + \frac{p}{2} + \frac{2p}{3} = 1$ ，得 $p = \frac{4}{5}$ ，

所以 $p = \frac{4}{5}$.

故选：D

知识点 03：两点分布

对于只有两个可能结果的随机试验，用 A 表示“成功”，

$\bar{A}$ 表示“失败”，定义 $X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & \bar{A} \text{ 发生} \end{cases}$

如果 $P(A) = p$ ，则 $P(\bar{A}) = 1 - p$ ，那么 X 的分布列如下所示：

X	0	1
P	$1 - p$	p

我们称 X 服从两点分布或者 0-1 分布.

【即学即练 2】 (2024·全国·高二假期作业) 已知离散型随机变量 X 的分布列服从两点分布，且 $P(X=0) = 2 - 5P(X=1) = a$ ，则 $a =$ ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【详解】 因为 X 的分布列服从两点分布，所以 $P(X=0) + P(X=1) = 1$ ，
又 $P(X=0) = 2 - 5P(X=1) = a$ ，所以 $P(X=0) = 2 - 5[1 - P(X=0)]$ ，
所以 $P(X=0) = \frac{3}{4}$ ，所以 $a = \frac{3}{4}$.

故选：A.

知识点 04：写离散型随机变量的分布列的步骤

- (1) 找：理解并确定 $X = x_i$ 的意义，找出随机变量 X 的所有可能的取值 x_i ($i = 1, 2, 3 \dots n$)
- (2) 求：借助概率的有关知识求出随机变量 X 取每一个值的概率 $P(X = x_i) = p_i$ ($i = 1, 2, 3 \dots n$) 注意应用计数原理、古典概型等知识
- (3) 列：列出表格并检验所求的概率是否满足分布列的两条性质.

注意：写出分布列时要注意将 p_i 化为最简分式形式，但是在利用 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 检验分布列是否正确时可利用化简前的分式结果.

04

题型精讲

题型 01 随机变量

【典例 1】 (2024·全国·高三专题练习) 袋中有 2 个黑球、5 个红球，从中任取 2 个，可以作为随机变量的是 ()

- A. 取到的球的个数 B. 取到红球的个数
C. 至少取到一个红球 D. 至少取到一个红球的概率

【答案】B

【详解】 选项 A 的取值是一个固定的数字，不具有随机性，故 A 错误；

选项 B 取到红球的个数是一个随机变量，它的可能取值是 0, 1, 2，故 B 正确；

选项 C 是一个事件而非随机变量，故 C 错误；

选项 D 中一个事件的概率值是一个定值而非随机变量，故 D 错误.

故选：B.

【典例 2】（2024·全国·高二假期作业）将一颗质地均匀的骰子掷两次，不能作为随机变量的是（ ）

- A. 两次掷出的点数之和
- B. 两次掷出的最大点数
- C. 第一次与第二次掷出的点数之差
- D. 两次掷出的点数

【答案】D

【详解】A 中，将一个骰子掷两次，两次掷出的点数之和是一个变量，且随试验结果的变化而变化，是一个随机变量.

B 中，两次掷出的最大点数是一个变量，且随试验结果的变化而变化，是一个随机变量.

C 中，第一次与第二次掷出的点数是一个变量，且随试验结果的变化而变化，之差也都是随机变量，

D 中，两次掷出的点数不是一个变量，所以不是随机变量.

故选：D.

【典例 3】（2024·全国·高二假期作业）在下列表述中不是离散型随机变量的是（ ）

- ①某机场候机室中一天的旅客数量 X ；
- ②某寻呼台一天内收到的寻呼次数 X ；
- ③某篮球下降过程中离地面的距离 X ；
- ④某立交桥一天经过的车辆数 X .

- A. ①中的 X B. ②中的 X C. ③中的 X D. ④中的 X

【答案】C

【详解】①②④中的随机变量 X 可能取的值，我们都可以按一定的次序一一列出，因此，它们都是离散型随机变量；③中的 X 可以取一区间内的一切值，无法按一定次序一一列出，故 X 不是离散型随机变量.

故选：C

【变式 1】（2024·全国·高三专题练习）下列叙述中，是离散型随机变量的为（ ）

- A. 将一枚质地均匀的硬币掷五次，出现正面和反面向上的次数之和
- B. 某人早晨在车站等出租车的时间
- C. 连续不断地射击，首次命中目标所需要的次数
- D. 袋中有 2 个黑球 6 个红球，任取 2 个，取得一个红球的可能性

【答案】C

【详解】对于 A，掷硬币只有正面向上和反面向上两种结果，则掷五次，出现正面和反面向上的次数之和为 5，是常量，A 错误；

对于 B，等出租车的事件是随机变量，但无法一一列出，不是离散型随机变量，B 错误；

对于 C，连续不断地射击，首次命中目标所需要的次数是有限个或可列举的无限多个，是离散型随机变量，C 正确；

对于 D，事件发生的可能性不是随机变量，D 错误.

故选：C.

【变式 2】（2024·全国·高二假期作业）5 件产品中有 3 件次品，从中任取 2 件，可作为随机变量的是（ ）

- A. 取到产品的件数
- B. 取到正品的概率
- C. 取到次品的件数
- D. 取到次品的概率

【答案】C

【详解】对于 A，5 件产品中有 3 件次品，从中任取 2 件，取到产品的件数是一个常量不是变量，BD 也是一个定值，而 C 中取到次品的件数可能为 0、1、2 是随机变量.

故选：C

【变式 3】（2024·全国·高二假期作业）袋中有大小相同质地均匀的 5 个黑球、3 个白球，从中任取 2 个，则可以作为随机变量的是（ ）

- A. 至少取到 1 个黑球
- B. 取到黑球的个数
- C. 至多取到 1 个黑球
- D. 取到的球的个数

【答案】B

【详解】根据离散型随机变量的定义，能够一一列出的只能是 B 选项，其中 A、C 选项是事件，D 选项取到球的个数是 2 个为确定值，ACD 错误；

故选：B.

题型 02 分布列及其性质的应用

【典例 1】（2024·全国·高三专题练习）设某种疫苗试验的失败率是成功率的 5 倍，用随机变量 X 去描述 1 次试验的成功次数，则 $P(X=0)$ 等于（ ）

- A. 0
- B. $\frac{1}{6}$
- C. $\frac{5}{6}$
- D. 1

【答案】C

【详解】解：根据题意得，“ $X=0$ ”表示试验失败，“ $X=1$ ”表示试验成功，成功率为 p ，失败率为 $5p$ ，

故 X 的分布列为：

X	0	1
P	$5p$	p

所以 $5p + p = 1$ ，得 $p = \frac{1}{6}$ ，

所以失败率为 $\frac{5}{6}$ ，即 $P(X=0)=\frac{5}{6}$ 。

故选：C。

【典例 2】（2024 下·全国·高二随堂练习）随机变量 ξ 的分布列如下：

ξ	-1	0	1
P	a	b	c

其中 $2b = a + c$ ，则 $P(|\xi|=1)$ 等于（ ）

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【详解】由 $2b = a + c$ ，且 $a + b + c = 1$ ，

解得 $b = \frac{1}{3}$ ，

$$\therefore P(|\xi|=1) = P(\xi = -1) + P(\xi = 1) = a + c = 2b = \frac{2}{3}.$$

故选：D。

【典例 3】（2024 上·吉林·高二校联考期末）随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	1	2	3	4
P	0.1	m	0.3	$2m$

则 $P(X > 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】0.7 / $\frac{7}{10}$

【详解】由分布列的性质可得， $0.1 + m + 0.3 + 2m = 1$ ，可得 $m = 0.2$ ，

所以 $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.3 + 2 \times 0.2 = 0.7$ 。

故答案为：0.7

【典例 4】（2024·全国·高二假期作业）已知离散型随机变量 X 的分布列如表所示，则 m 的值为_____。

X	0	1	2	3
P	m^2	$2m^2$	$1 - 2m + m^2$	$1 - 3m$

【答案】 $\frac{1}{4}$ / 0.25

【详解】依题意， $m^2 + 2m^2 + (1 - 2m + m^2) + (1 - 3m) = 1$ ，整理得 $4m^2 - 5m + 1 = 0$ ，解得 $m = 1$ 或 $m = \frac{1}{4}$ ，

当 $m=1$ 时, $2m^2=2>1$, $1-3m=-2<0$, 不符合题意,

当 $m=\frac{1}{4}$ 时, $m^2=\frac{1}{16}$, $2m^2=\frac{1}{8}$, $1-2m+m^2=\frac{9}{16}$, $1-3m=\frac{1}{4}$, 符合题意,

所以 m 的值为 $\frac{1}{4}$.

故答案为: $\frac{1}{4}$

【变式 1】(2024 下·全国·高二随堂练习) 设随机变量 X 的分布列为 $P(X=i)=a\left(\frac{1}{2}\right)^i$, $i=1,2,3$, 则 a 的值为 ()

A. $\frac{8}{7}$

B. $\frac{7}{8}$

C. $\frac{7}{16}$

D. $\frac{16}{7}$

【答案】A

【详解】由题意 $a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=1$, $a=\frac{8}{7}$.

故选: A.

【变式 2】(多选) (2024·全国·高二假期作业) 已知随机变量 X 的分布列为 $P(X=n)=\frac{a}{(n+1)(n+2)}$

($n=0,1,2$), 其中 a 是常数, 则 ()

A. $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$

B. $a=\frac{4}{3}$

C. $P(0\leq X<2)=\frac{8}{9}$

D. 以上均不正确

【答案】ABC

【详解】根据题意, 随机变量 X 的分布列为 $P(X=n)=\frac{a}{(n+1)(n+2)}$,

则 $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{a}{2}+\frac{a}{6}+\frac{a}{12}=1$, 解得 $a=\frac{4}{3}$,

则 $P(0\leq X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$.

故选: ABC.

【变式 3】(2024 上·河南·高二校联考期末) 设随机变量 X 的分布列为 $P(X=i)=ai$ ($i=1,2,\dots,8$), 则常数 $a=$ _____.

【答案】 $\frac{1}{36}$

【详解】 $P(X=i)=ai$ ($i=1,2,\dots,8$), $\therefore a(1+2+3+\dots+8)=36a=1$,

解得 $a=\frac{1}{36}$,

故答案为: $\frac{1}{36}$.

【变式 4】(2024·全国·高三专题练习) 离散型随机变量 X 的概率分布规律为

$$P(X=n) = \frac{a}{n(n+1)} (n=1,2,3,4), \text{ 其中 } a \text{ 是常数, 则 } P\left(\frac{1}{2} < n < \frac{5}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{5}{6}$

【详解】 $Q P(X=n) = \frac{a}{n(n+1)} (n=1,2,3,4), \therefore \frac{a}{2} + \frac{a}{6} + \frac{a}{12} + \frac{a}{20} = 1$, 解得: $a = \frac{5}{4}$,

$$\therefore P\left(\frac{1}{2} < n < \frac{5}{2}\right) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

故答案为: $\frac{5}{6}$.

题型 03 求离散型随机变量的分布列

【典例 1】(2024·全国·高三专题练习) 某县教育局从县直学校推荐的 6 名教师中任选 3 人去参加进修活动, 这 6 名教师中, 语文、数学、英语教师各 2 人.

(1) 求选出的数学教师人数多于语文教师人数的概率;

(2) 设 X 表示选出的 3 人中数学教师的人数, 求 X 的分布列.

【答案】 (1) $\frac{3}{10}$

(2) 分布列见解析

【详解】 (1) 从 6 名老师中选 3 人的方法种数有: $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$.

数学老师多于语文老师的选法有:

① 1 名数学, 2 名英语的选法: $C_2^1 C_2^2 = 2$ 种;

② 2 名数学的选法有: $C_2^2 C_4^1 = 4$ 种.

所以数学老师多于语文老师的选法有: $2+4=6$ 种.

故数学老师多于语文老师的概率为: $P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

(2) 由题意, X 的可能取值为: 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = 0.2, \quad P(X=1) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = 0.6, \quad P(X=2) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = 0.2.$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

【典例 2】（2024 下·全国·高二随堂练习）一台设备由三个部件构成，假设在一天的运转中，部件 1，2，3 需要调整的概率分别为 0.1，0.2，0.2，各部件的状态相互独立.

(1)求设备在一天的运转中，部件 1，2 中至少有 1 个需要调整的概率；

(2)记设备在一天的运转中需要调整的部件个数为 X ，求随机变量 X 的分布列.

【答案】(1)0.28

(2)分布列见解析

【详解】(1) 部件 1，2 都不需要调整的概率为 $(1-0.1)(1-0.2)=0.72$ ，

则部件 1，2 中至少有 1 个需要调整的概率为 $P=1-0.72=0.28$ ；

(2) 由题意， X 的所有可能取值为 0，1，2，3，且

$$P(X=0)=0.9\times 0.8\times 0.8=0.576，$$

$$P(X=1)=0.1\times 0.8\times 0.8+0.9\times 0.2\times 0.8+0.9\times 0.8\times 0.2=0.352，$$

$$P(X=2)=0.1\times 0.2\times 0.8+0.1\times 0.8\times 0.2+0.9\times 0.2\times 0.2=0.068，$$

$$P(X=3)=0.1\times 0.2\times 0.2=0.004，$$

X	0	1	2	3
P	0.576	0.352	0.068	0.004

【典例 3】（2024 下·全国·高二随堂练习）某食堂为了了解同学们在高峰期打饭的时间，故安排一名食堂阿姨随机收集了在食堂某窗口打饭的 100 位同学的相关数据(假设同学们打饭所用时间均为下表列出时间之一)，如下表所示.

学生数(人)	x	25	y	10
打饭时间(秒/人)	10	15	20	25

已知这 100 位同学的打饭时间从小排到大的第 65 百分位数为 17.5 秒.

(1)确定 x ， y 的值；

(2)若各学生的结算相互独立，记 X 为该窗口开始打饭至 20 秒末已经打饭结束的学生人数，求 X 的分布列. (注：将频率视为概率)

【答案】(1) $x=40, y=25$

(2)分布列见解析

【详解】(1) 因为第 65 百分位数为 17.5 = $\frac{15+20}{2}$ ，所以 $\begin{cases} x+25=65 \\ x+25+y+10=100 \end{cases}$ ，

所以 $x=40, y=25$.

(2) 由已知得打饭时间为 10 秒的概率为 $\frac{40}{100}=0.4$ ，打饭时间为 15 秒的概率为 $\frac{25}{100}=0.25$ ，

打饭时间为 20 秒的概率为 $\frac{25}{100} = 0.25$ ，打饭时间为 25 秒的概率为 $\frac{10}{100} = 0.1$ ，

由题可知 X 的可能取值为 0, 1, 2,

$$\therefore P(X=0)=0.1, \quad P(X=1)=0.25+0.25+[0.4 \times (1-0.4)]=0.74, \quad P(X=2)=0.4 \times 0.4=0.16,$$

$\therefore$ 分布列如下:

X	0	1	2
P	0.1	0.74	0.16

【典例 4】(2024·全国·高二假期作业) 第 33 届夏季奥林匹克运动会即将于 2024 年在巴黎举办，其中游泳比赛分为预赛、半决赛和决赛三个阶段，只有预赛、半决赛都获胜才有资格进入决赛。已知甲在预赛和半决赛中获胜的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{3}$ ，乙在预赛和半决赛中获胜的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$ ，丙在预赛和半决赛中获胜的概率分别为 p 和 $\frac{4}{3}-p$ ，其中 $\frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$ 。

(1) 甲、乙、丙三人中，哪个人进入决赛的可能性更大?

(2) 如果甲、乙、丙三人中恰有两人进入决赛的概率为 $\frac{11}{36}$ ，求 p 的值;

(3) 在 (2) 的条件下，设甲、乙、丙三人中进入决赛的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列。

【答案】(1) 乙

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 分布列见解析

【详解】(1) 解：甲进入决赛的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ，乙进入决赛的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ ，

丙进入决赛的概率为 $p \cdot (\frac{4}{3} - p) = -(p - \frac{2}{3})^2 + \frac{4}{9}$ ，

因为 $\frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$ ，所以 $-(p - \frac{2}{3})^2 + \frac{4}{9} < \frac{4}{9}$ ，

显然，乙进入决赛的概率最大，所以乙进入决赛的可能性最大。

(2) 解：因为甲、乙、丙三人中恰有两队进入决赛的概率为 $\frac{11}{36}$ ，

$$\text{则 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times [1 - p \cdot (\frac{4}{3} - p)] + (1 - \frac{1}{3}) \times \frac{1}{2} \times [p \cdot (\frac{4}{3} - p)] + \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{2}) \times [p \cdot (\frac{4}{3} - p)] = \frac{11}{36},$$

整理得 $12p^2 - 16p + 5 = 0$ ，解得 $p = \frac{1}{2}$ 或 $p = \frac{5}{6}$ ，

因为 $\frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$ ，所以 $p = \frac{1}{2}$ 。

(3) 解：由 (2) 知，丙进入决赛的概率为 $\frac{1}{2} \cdot (\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{5}{12}$ ，

所以甲、乙、丙三人进入决赛的概率分布为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}$,

根据题意, 得到随机变量 ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

可得 $P(\xi=0) = (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{2})(1-\frac{5}{12}) = \frac{7}{36}$;

$P(\xi=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1-\frac{5}{12}) + \frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{2}) \times \frac{5}{12} + (1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{11}{36}$,

$P(\xi=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{72}$,

则 $P(\xi=1) = 1 - \frac{7}{36} - \frac{11}{36} - \frac{5}{72} = \frac{31}{72}$,

所以随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{7}{36}$	$\frac{31}{72}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{5}{72}$

【变式 1】 (2024·全国·高三专题练习) 学校举行定点投篮比赛, 规定每人投篮 4 次, 投中一球得 2 分, 没

有投中得 0 分, 假设每次投篮投中与否是相互独立的. 已知小明每次投篮投中的概率都是 $\frac{1}{3}$.

(1) 求小明在投篮过程中直到第三次才投中的概率;

(2) 求小明在 4 次投篮后的总得分 ξ 的分布列

【答案】 (1) $\frac{4}{27}$

(2) 分布列见解析

【详解】 (1) 设“小明在投篮过程中直到第三次才投中”为事件 A,

事件 A 说明小明前两次没有投中, 第三次投中,

$$\therefore P(A) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27},$$

$\therefore$ 小明在投篮过程中直到第三次才投中的概率为 $\frac{4}{27}$.

(2) 小明在 4 次投篮后的总得分 ξ 的可能取值为 0, 2, 4, 6, 8,

$$P(\xi=0) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4 = \frac{16}{81},$$

$$P(\xi=2) = C_4^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{32}{81},$$

$$P(\xi=4) = C_4^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27},$$

$$P(\zeta=6)=C_4^3\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81},$$

$$P(\zeta=8)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81},$$

则总得分的分布列为:

ζ	0	2	4	6	8
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

【变式 2】 (2024 下·全国·高二随堂练习) 已知新高考数学共 4 道多选题, 评分标准是每题满分 5 分, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有错选或不选的得 0 分. 每道多选题共有 4 个选项, 正确答案往往为 2 项或 3 项. 为了研究多选题的答题规律, 某数学兴趣小组研究发现: 多选题正确答案是“选两项”的概率为 $\frac{1}{2}$, 正确答案是“选三项”的概率为 $\frac{1}{2}$. 现有学生甲、乙两人, 由于数学基础很差, 多选题完全没有思路, 只能靠猜.

(1) 已知某题正确答案是“选两项”, 求学生甲不得 0 分的概率;

(2) 学生甲的答题策略是“猜一个选项”, 学生乙的策略是“猜两个选项”, 试写出甲、乙两名学生得分的分布列.

【答案】 (1) $\frac{2}{3}$;

(2) 答案见解析.

【详解】 (1) 某题正确答案是“选两项”的条件下, 他不得 0 分的情况有两种:

① 只选一个选项得 2 分的概率为: $P_1 = \frac{C_2^1}{C_4^1} = \frac{1}{2}$;

② 选两个选项, 得 5 分的概率为: $P_2 = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}$;

所以某题正确答案是“选两项”的条件下, 学生甲不得 0 分的概率为: $P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$;

(2) 结合题意: 设学生甲得分为 X , 则 X 的可能取值为 0, 2,

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8};$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8};$$

学生甲得分的分布列为:

--	--	--

--	--	--

设学生乙得分为 Y , 则 Y 的可能取值为 0, 2, 5,

$$P(Y=2) = \frac{1}{2} \times \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{4};$$

$$P(Y=5) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{12};$$

$$P(Y=0) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3};$$

学生乙得分的分布列为:

【变式 3】 (2024 下·全国·高二随堂练习) 设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.2	0.1	0.1	0.3	m

(1) 求随机变量 $\eta = |X-1|$ 的分布列;

(2) 求随机变量 $\xi = X^2$ 的分布列.

【答案】 (1) 分布列见解析

(2) 分布列见解析

【详解】 (1) 由分布列的性质知: $0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.3 + m = 1$, 解得 $m = 0.3$,
列表为

X	0	1	2	3	4
$ X-1 $	1	0	1	2	3

即随机变量 η 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

可得 $P(\eta=0) = P(X=1) = 0.1$,

$P(\eta=1) = P(X=0) + P(X=2) = 0.2 + 0.1 = 0.3$,

$P(\eta=2) = P(X=3) = 0.3, P(\eta=3) = P(X=4) = 0.3$,

故 $\eta = |X-1|$ 的分布列为

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/018031141073006072>