第三章 中值定理与导数应用

以导数为工具不仅可以深入认识和理解函数在一点处的局部性状，还可进一步研究函数在区间上的总体性质，用导数描述函数在区间上的总体性质就形成了微分学理论。

第一节：中值定理

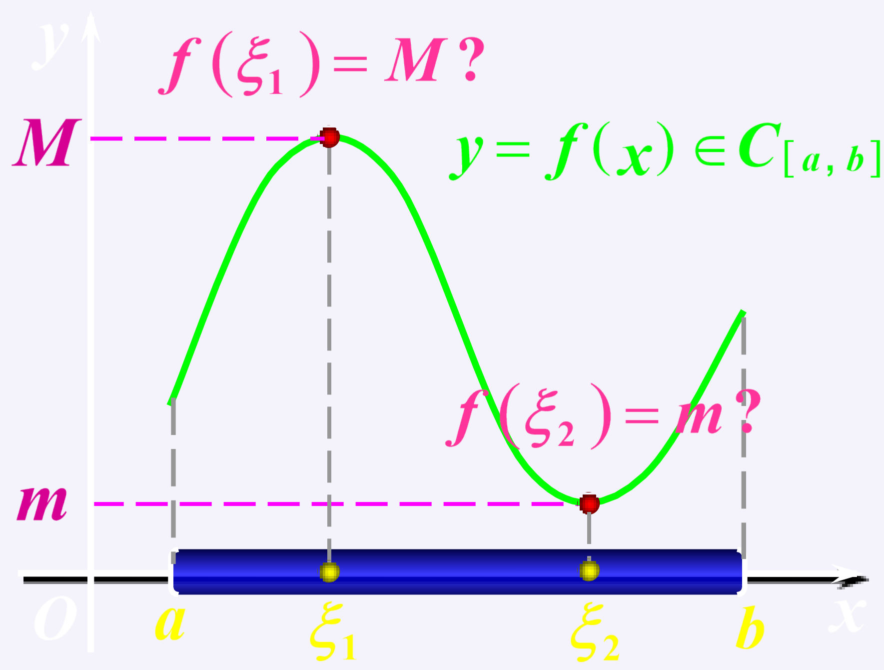
微分学理论的核心由几个中值定理构成，它包括费马定理、罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒中值定理。这些定理揭示了函数在一个区间上的性质与该区间内某点的导数间的联系。由它们可以导出一系列重要定理，使得微分学在更广泛的范围内起着重要的作用。

一、罗尔定理

1. 函数最值研究与费马定理

函数最值讨论是微积分创立前期的重要工作之一。最值定理虽然指出了闭区间上连续函数最值的存在性，却没有指出最值点的位置，也没有给出求最值的方法。

此外，其它区间形式上的最值存在性及计算问题也还没有讨论。因此还必须对最值问题作进一步的研究。



(1) 费马定理及其几何意义

费马定理

若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=\xi$ 的某个邻域 $U(\xi,\delta)$ 内有定义，$f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在该邻域内的最大值或最小值，且函数 $y=f(x)$ 在点 $x=\xi$ 处可导，则有

$$f'(\xi)=0.$$

(2) 对费马定理的认识

- **费马定理的分析意义**

从几何上看，费马定理指出了曲线在最值点处一定有水平的切线。这一认识虽然是来源直观的，并且只是函数在一点取得最值的必要条件，但由于在最值点处有 $f'(\xi)=0$，故求最值点问题可归结为解方程

$$f'(x)=0.$$

因此，费马定理实际给出了求最值的方法。

• 对费马定理的追问

然而，并非任意曲线弧段都有水平切线，且方程 $f'(x)=0$ 并非总是有解的。因此，为求最值还需进一步考察，曲线弧段在什么情况下一定有水平切线，即考察函数

$$y=f(x),\ x\in[a,b]$$

满足什么条件，可使方程 $f'(x)=0$ 总有解。

2. 罗尔定理及其应用

(1) 罗尔定理及其几何意义

罗尔定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且在区间的端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得

$$f'(\xi)=0.$$

(2) 罗尔定理的分析意义

- **为求解最值问题提供了方法**

费马定理指出了函数取得最值的必要条件，即对于给定的函数 $y=f(x)$，求函数最值可归结为求解形如 $f'(x)=0$ 方程。

罗尔定理则进一步指出，为确定方程 $f'(x)=0$ 的根的范围，可设法寻求函数 $y=f(x)$ 的两个等值点 $f(a)=f(b)$，对应于函数的两个等值点，在区间 $[a,b]$ 内必有方程 $f'(x)=0$ 的一个根。

例：已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1$，$f(1)=0$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)+\frac{f(\xi)}{\xi}=0.$$

分析 这是个讨论方程实根存在性的问题，容易想到应用零点定理或罗尔定理进行考察。

对本例方程而言，由于

$$f'(\xi)+\frac{f(\xi)}{\xi}=0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

故若根据零点定理进行考察，需验证形如 $F(x)=xf'(x)+f(x)$ 的函数在区间 $(0,1)$ 的端点处异号，即有 $F(0)\cdot F(1)<0$，但本例条件却不能导出这一结果。因而考虑利用罗尔定理进行考察。

用罗尔定理考察本例方程的实根就是要设法找出一个可导函数 $\varphi(x)$，使其在区间 $(0,1)$ 的端点处满足

$\varphi(0)=\varphi(1)$，而当 $x\in(0,1)$ 时有

$\varphi'(x)=xf'(x)+f(x)$.

由乘积的导数运算想到可取

$\varphi(x)=xf(x)$，$x\in[0,1]$.