

第五章：旋涡理论 (vortex theory)

课堂提问：为什么处于龙卷风中心会是风平浪静？

为什么游泳时应避开旋涡区？

旋涡场：存在旋涡运动的流场

即流场中 $\vec{\omega} \neq 0$

本章仅讨论旋涡运动，不涉及力，属于运动学容。

旋涡场的特性不同于一般流场，需要专门进行研究

本章讨论内容:

1. 漩涡场的基本概念（涡线，涡管，漩涡强度速度环量）
2. 斯托克斯定理
3. 汤姆逊定理
4. 海姆霍兹定理
5. 毕奥—沙伐尔定理
6. 兰金组合涡

§ 5-1 旋涡运动的基本概念

有旋运动: $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 在流场中不全为零的流动

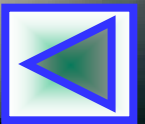
一般, 整个流场中某些区域为旋涡区, 其余的地方则为无旋区域。

自然界中如龙卷风, 桥墩后面规则的双排涡列等等是经常能观察到的旋涡运动的例子。但在大多数情况下流动中的旋涡肉眼难于察觉。

龙卷风1



龙卷风2



海上漩涡









ISS013E62787

气旋

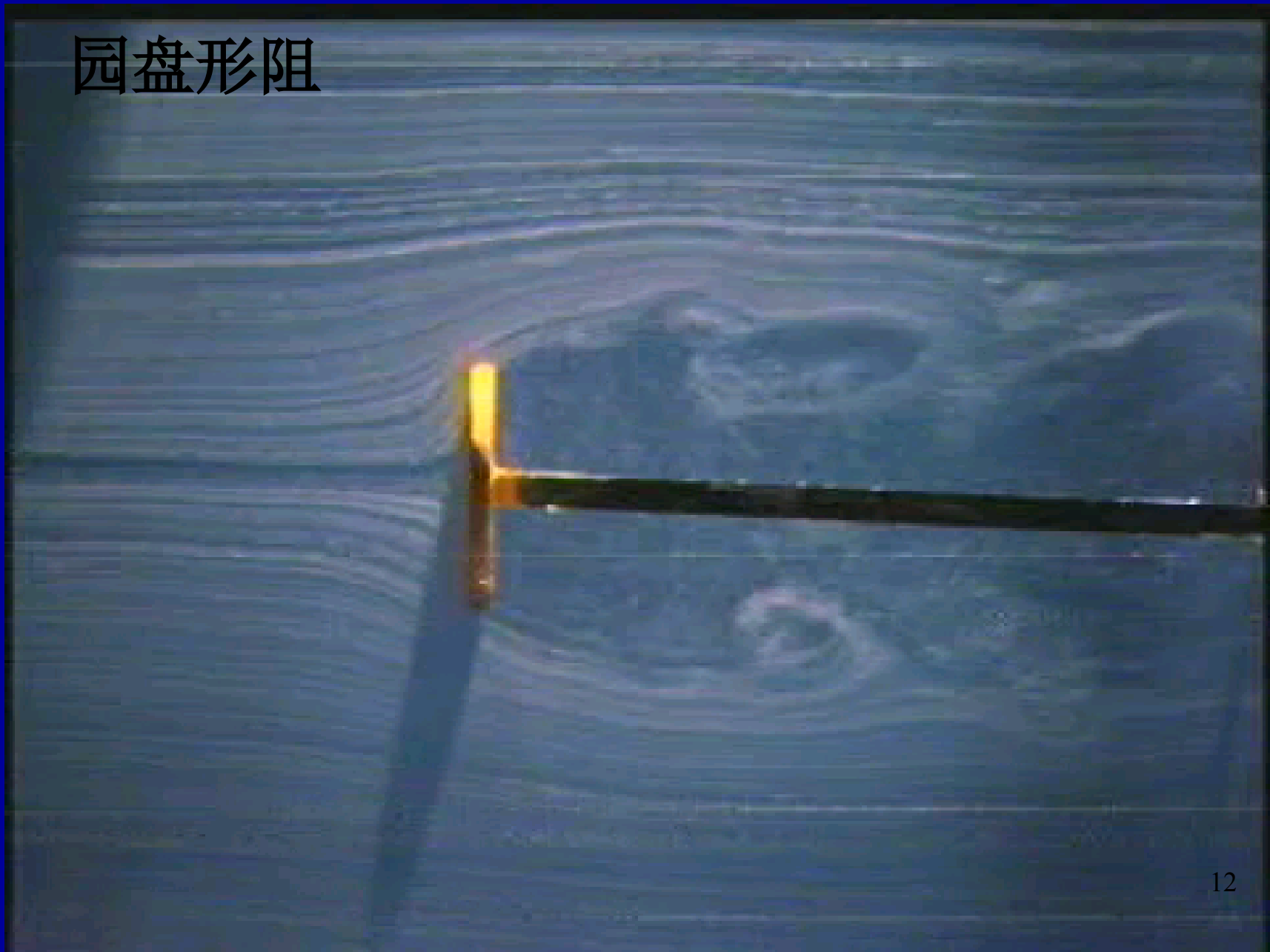


气旋



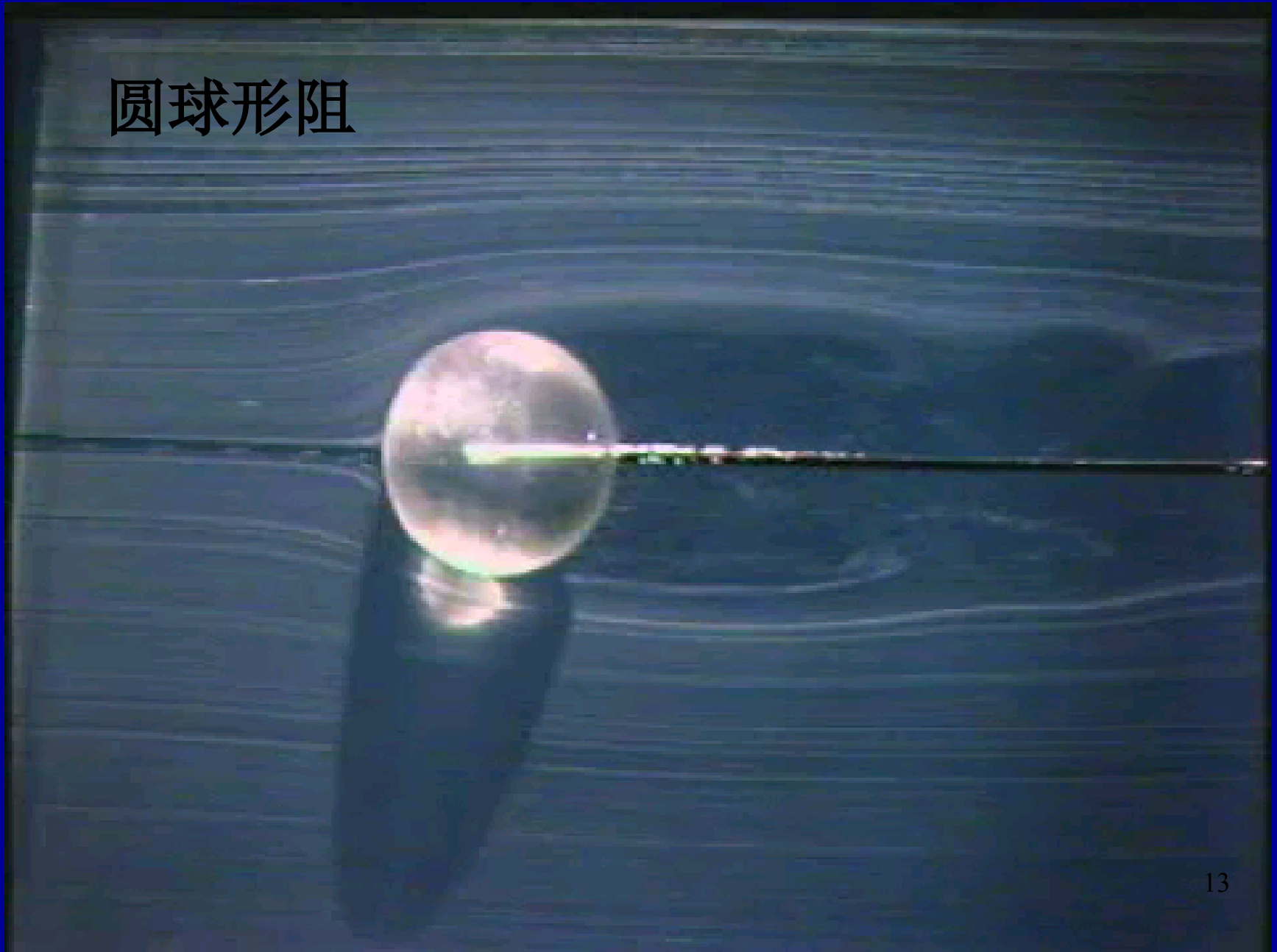
圆盘绕流尾流场中的旋涡

圆盘形阻



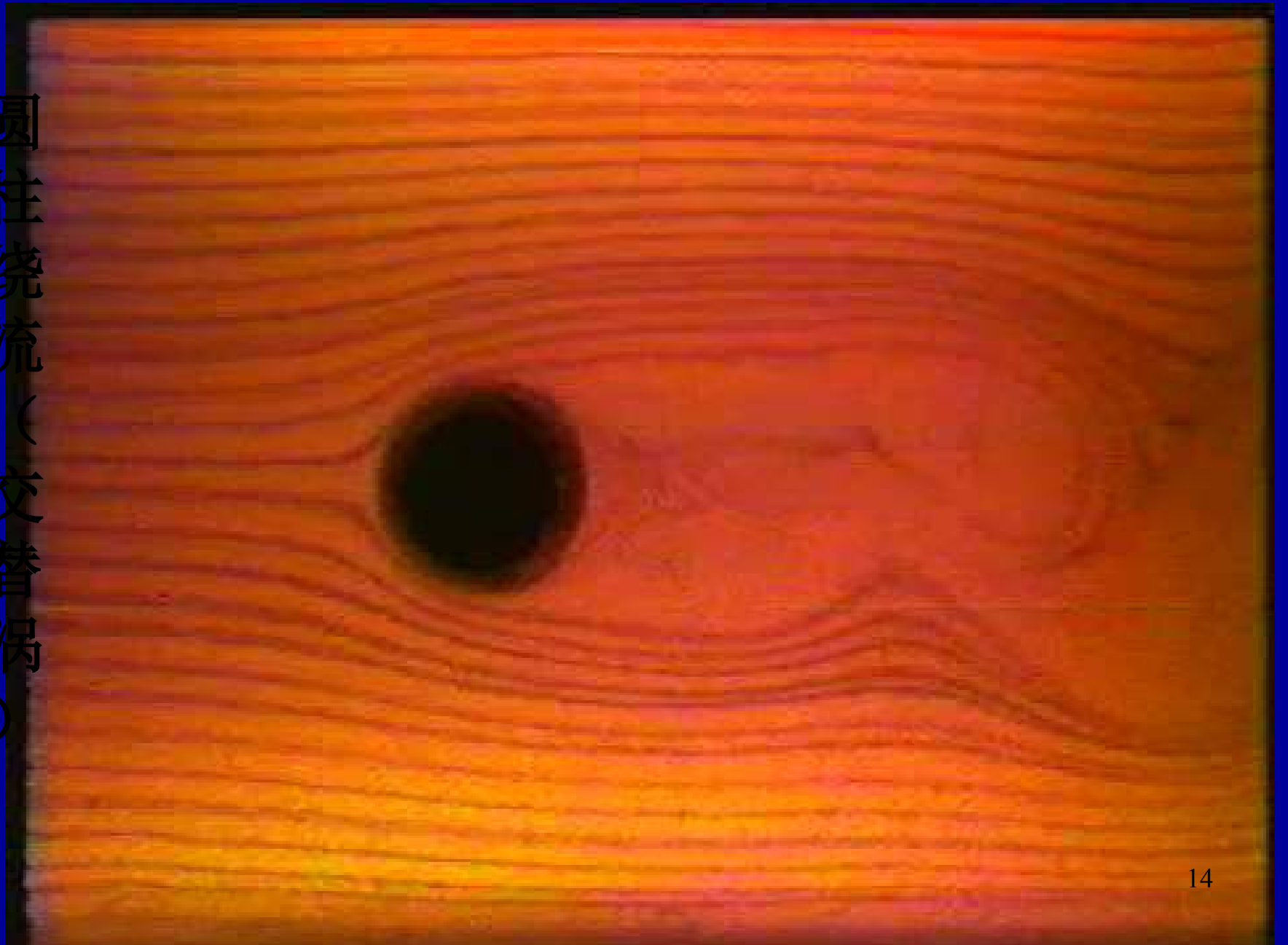
园球绕流尾流场中的旋涡

圆球形阻



园柱绕流尾流场中的旋涡

圆柱绕流（交替涡）



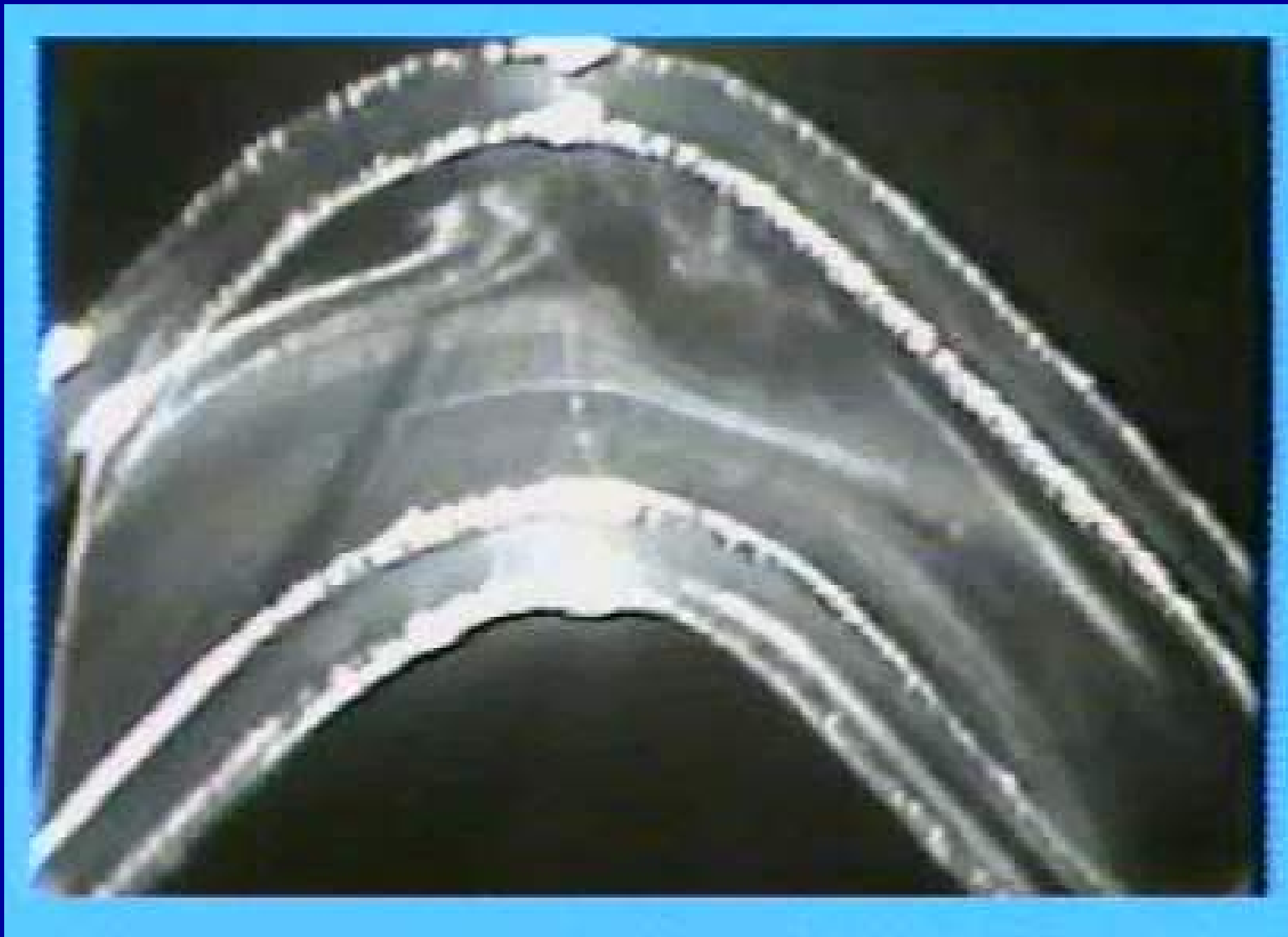
有攻角机翼绕流尾流场中的旋涡

机翼失速
(有攻角)



弯曲槽道内的二次流

弯管二次流



旋涡运动理论广泛地应用于工程实际: 机翼、螺旋桨理论等。旋涡与船体的阻力、振动、噪声等问题密切相关。

旋涡的产生: 与压力差、质量力和粘性力等因素有关。

流体流过固体壁面时, 除壁面附近粘性影响严重的一薄层外, 其余区域的流动可视为理想流体的无旋运动。

旋涡场的几个基本概念:

一、涡线, 涡管, 旋涡强度

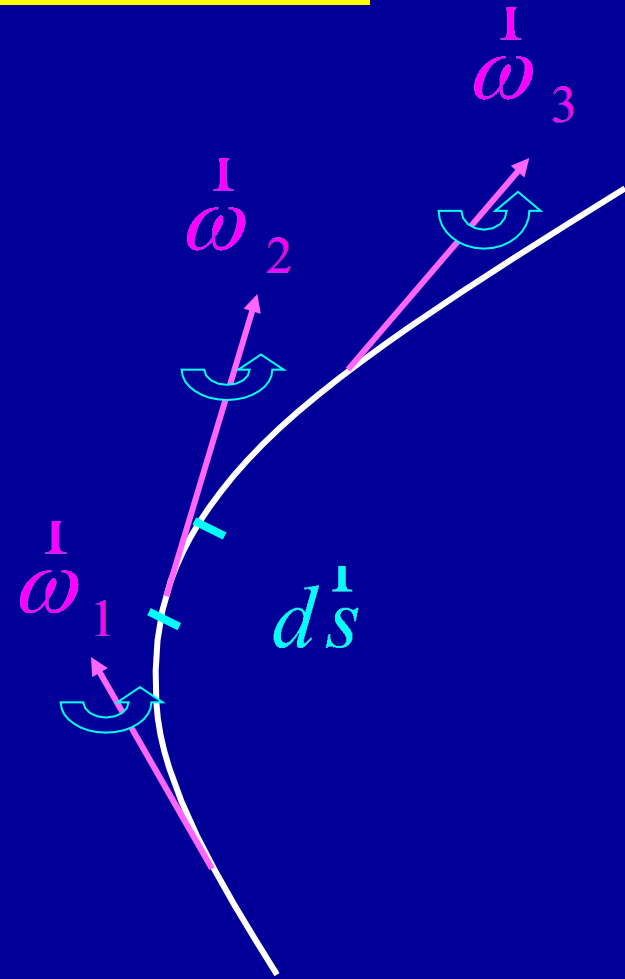
涡线(vortex line):

涡线上所有流体质点在同瞬时的旋转角速度矢量 $\overset{1}{\omega}$ 与此线相切。

涡线微分方程:

取涡线上一段微弧长 $d\overset{r}{s} = dx\overset{1}{i} + dy\overset{1}{j} + dz\overset{1}{k}$

该处的旋转角速度 $\overset{r}{\omega} = \omega_x\overset{1}{i} + \omega_y\overset{1}{j} + \omega_z\overset{1}{k}$



由涡线的定义（涡矢量与涡线相切：
叉积为零），得涡线微分方程式：

$$\frac{dx}{\omega_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{\omega_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{\omega_z(x,y,z,t)} \quad (5-1)$$

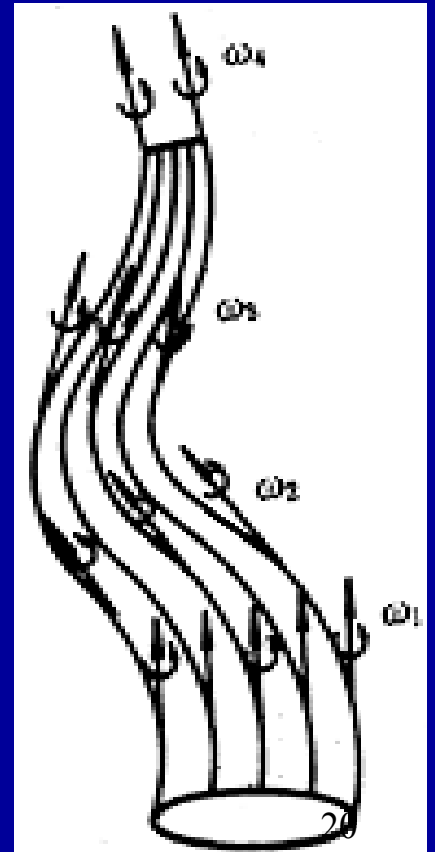
若已知 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ，积分上式可得涡线。
与流线的积分一样，将 t 看成参数。 t 取定
值就得到该瞬时的涡线。

涡管 (vortex tube) :

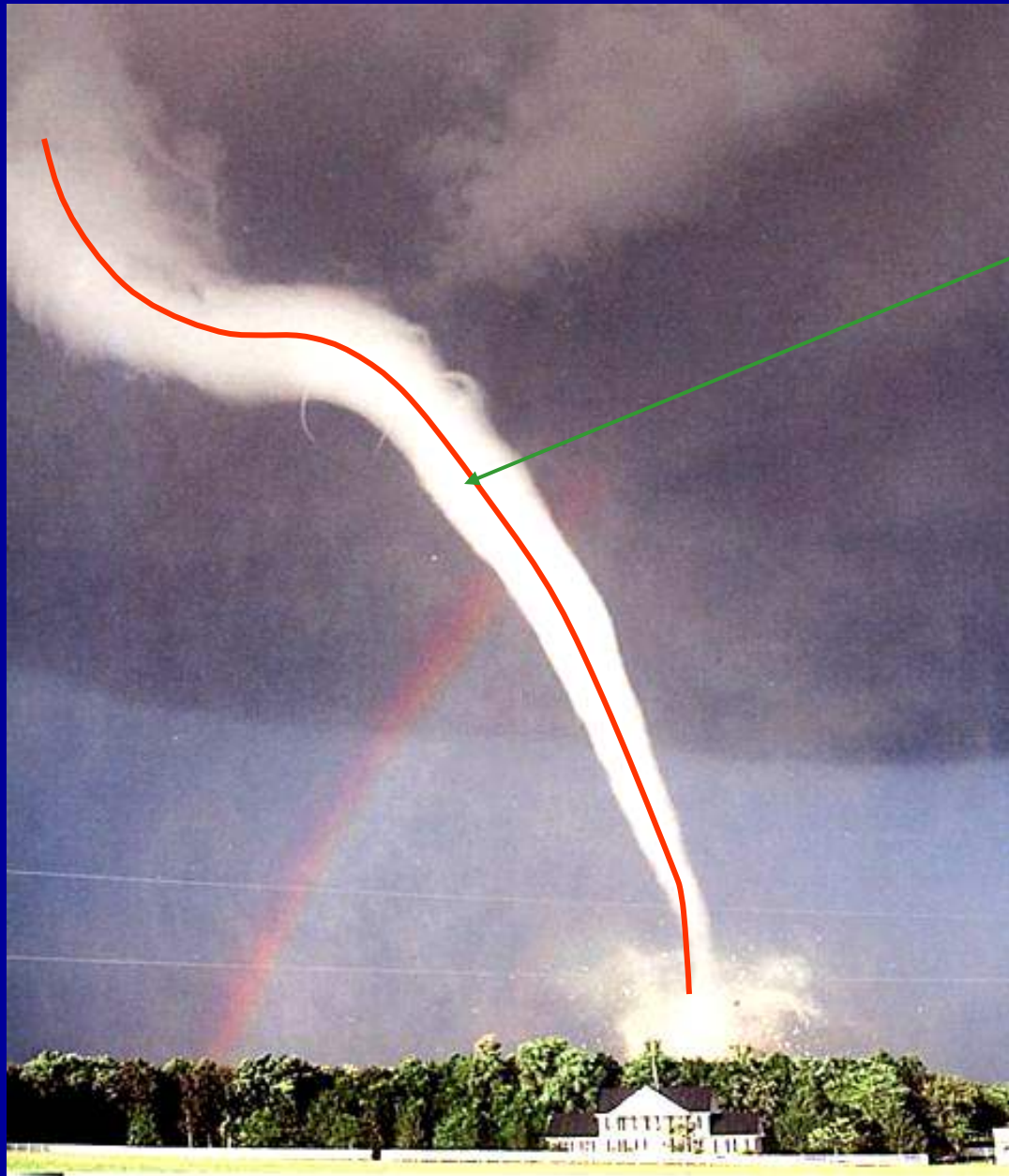
在旋涡场中任取一微小封闭曲线C（不是涡线），过C上每一点作涡线，这些涡线形成的管状曲面称涡管。

涡丝 (vortex filament) :

涡管中充满着作旋转运动的流体，称为**涡束**。截面积为无限小的涡束称为**涡索（涡丝）**。



龙卷风-涡线



涡线

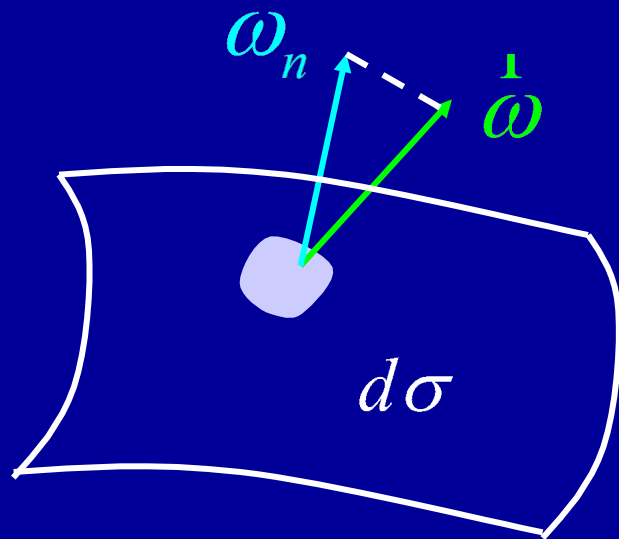
任取微分面积 $d\sigma$ ， $\vec{\omega}$ 法线分量为 ω_n

$$\text{则 } dJ = \Omega_n d\sigma = 2\omega_n d\sigma \quad (5-2)$$

为 $d\sigma$ 上的旋涡强度-涡通量

沿 σ 面积分得旋涡强度:

$$J = \iint_{\sigma} \Omega_n d\sigma \quad (5-3)$$



若 σ 是涡管的截面，则 J 称为旋涡强度, 或涡通量。

J 表征流场中旋涡强弱和分布面积大小的物理量

问题: 式(5-3) 与前面学过的什么公式类似?

二、速度环量 (velocity circulation)

速度环量：速度矢在积分路径方向的分量沿该路径的线积分。

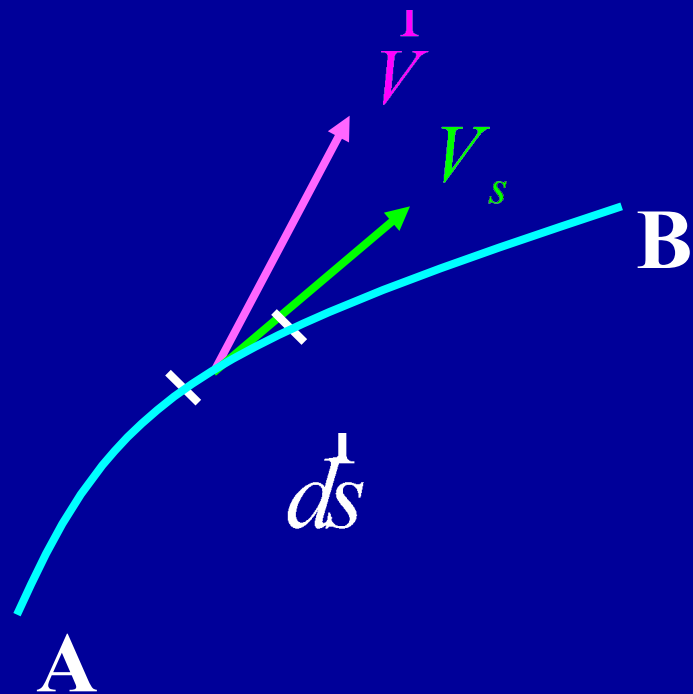
定义 $\Gamma_{AB} = \int_{AB} V_s ds$ (5-4)

某瞬时在流场中任取曲线AB

微元弧 ds

V_s : \vec{v} 在 ds 向的投影

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B V ds$$



速度环量是**标量**，速度方向与积分AB曲线方向相同时（成锐角）为正，反之为负。

线积分方向相反的速度环量相差一负号，即

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA} \quad (5-5)$$

速度环量的其他表示形式：

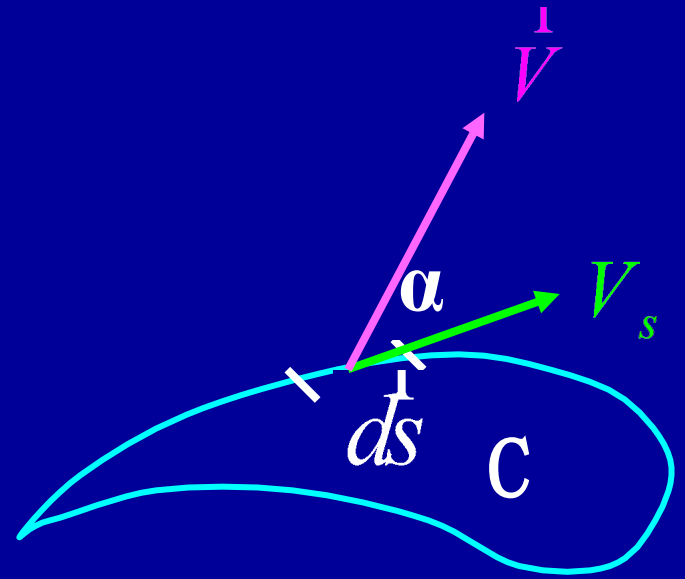
$$\Gamma_{AB} = \int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} V \cos(\vec{V}, d\vec{s}) ds = \int_{AB} V_x dx + V_y dy + V_z dz$$

沿封闭周线C的速度环量

$$\Gamma_c = \oint_C V_s ds$$

$$= \oint_C \mathbf{V}^r \cdot d\mathbf{s}^r$$

$$= \oint_C V_x dx + V_y dy + V_z dz$$



速度环量的计算

1) 已知速度场, 求沿一条开曲线的速度环量

对于无旋流场:

$$\begin{aligned}\Gamma_{AB} &= \int_{AB} V_x dx + V_y dy + V_z dz = \int_{AB} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \\ &= \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A\end{aligned}$$

对于有旋场:

由公式 $\Gamma_{AB} = \int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} V_x dx + V_y dy + V_z dz$ 计算

2. 若已知速度场, 求沿一条闭曲线的速度环量

对于无旋场:

$$\begin{aligned}\Gamma_c &= \oint_c V_x dx + V_y dy + V_z dz = \oint_c \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \\ &= \oint_c d\varphi = 0\end{aligned}$$

对于有旋场:

$$\Gamma_c = \oint_c V_s ds = 2 \iint_{\sigma} \omega_n d\sigma \quad (5-11)$$

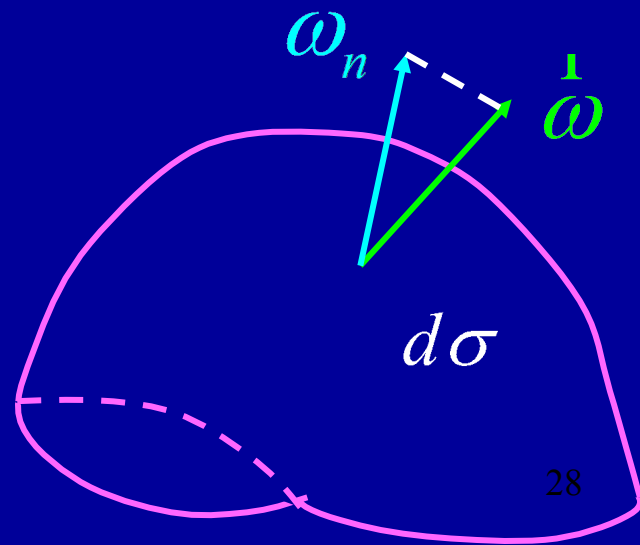
此式称为斯托克斯定理

三、斯托克斯定理

斯托克斯定理：沿任意闭曲线的速度环量等于该曲线为边界的曲面内的旋涡强度，即 $\Gamma_c = J$

$$\text{或 } \Gamma_c = \oint_c V_s ds = \iint_{\sigma} \Omega_n d\sigma = J \quad (5-11)$$

环量与旋涡强度通过线积分与面积分联系起来。



证明:略

上述斯托克斯定理只适用于“单连通区域”

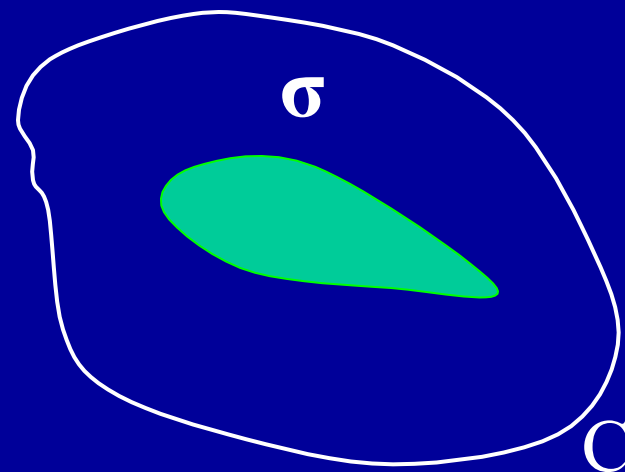
$$\Gamma_c = \oint_c \mathbf{V}_s \cdot d\mathbf{s} = \iint_\sigma \boldsymbol{\Omega}_n \cdot d\boldsymbol{\sigma} = J \quad (5-11)$$

单连通区域: C 所包围的区域 σ 内全部是流体，没有固体或空洞。

复连通域(多连通域):

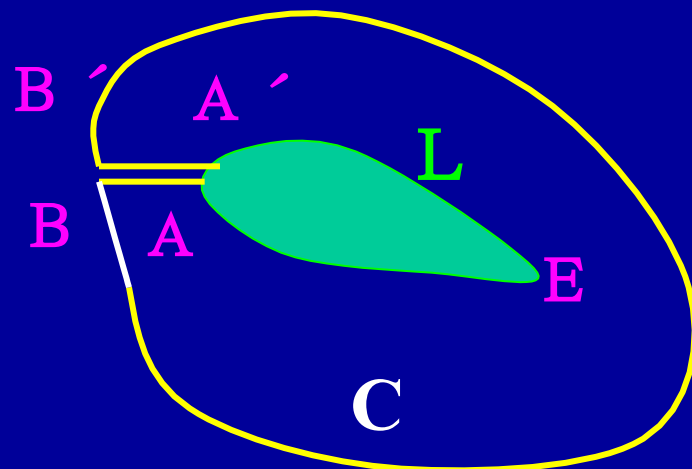
C的内部有空洞或者包含其他的物体。

AB线将 σ 切开, 则沿周线
ABB' A' EA前进所围的区域
为单连通域。



用斯托克斯定理有:

$$\Gamma_{ABB'A'EA} = 2 \iint_{\sigma} \omega_n d\sigma$$



$$\Gamma_{ABB'A'EA} = \Gamma_{AB} + \Gamma_C + \Gamma_{BA} + \Gamma_L$$

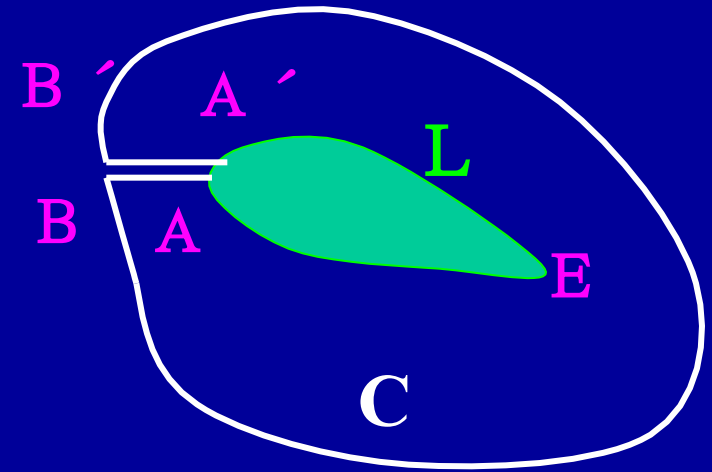
区域在走向的左侧

Γ_C : 沿外边界逆时针的环量

Γ_L : 沿内边界顺时针的环量

$$\Gamma_{AB} = \Gamma_{B'A'}$$

积分路线相反，抵消掉了。



最后有
$$\Gamma_C + \Gamma_L = 2 \iint_{\sigma} \omega_n d\sigma \quad (5-13)$$

这就是双连通域的斯托克斯定理。

推论一 单连域内的无旋运动，流场中处处 ω 为零，则沿任意封闭周线的速度环量为零

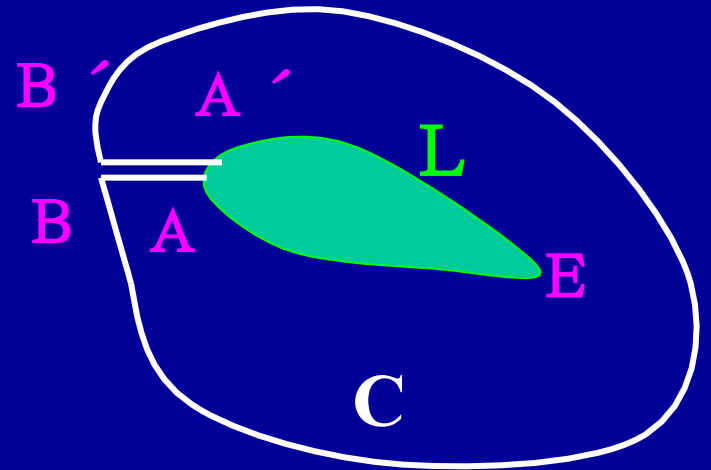
$$\Gamma_c = 2 \iint_{\sigma} \omega_n d\sigma = 2 \iint_{\sigma} 0 d\sigma = 0$$

反之，若沿任意封闭周线的速度环量等于零，可得处处 ω 为零的结论。

但沿某闭周线的速度环量为零，并不一定无旋（可能包围强度相同转向相反的旋涡）。

推论二 对于包含一固体在内的双连通域，若流动无旋，则沿包含固体在内的任意两个封闭周线的环量彼此相等。

$$\text{即 } \Gamma_C + \Gamma_L = 2 \iint_{\sigma} \omega_n d\sigma$$



$$\text{则有: } \Gamma_C + \Gamma_L = 0$$

$$\text{即 } \Gamma_C = \Gamma_L \text{ (与积分路径方向一致时)}$$

§5-2 汤姆逊定理

假设：

- (1) 理想流体；
- (2) 质量力有势；
- (3) 正压流体（流体密度仅为压力的函数）

汤姆逊定理：沿流体质点组成的任一封闭流体周线的速度环量 **不随时间** 而变。

$$\text{即 } \frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (5-14)$$

汤姆逊定理和斯托克斯定理说明：

- 1) 在理想正压流体中, 速度环量和旋涡不生不灭。因为不存在切向应力, 不能传递旋转运动。
- 2) 推论: 流场中原来有旋涡和速度环量的, 永远有旋涡并保持环量不变, 原来没有旋涡和速度环量的, 就永远无旋涡和速度环量。

例如, 从静止开始的波浪运动, 由于流体静止时是无旋的, 因此产生波浪以后, 波浪运动是无旋运动。

又如绕流物体的流动，远前方流动对物体无扰动，该处流动无旋，接近物体时流动不再是均匀流，根据汤姆逊定理和斯托克斯定理，流动仍保持为无旋运动。

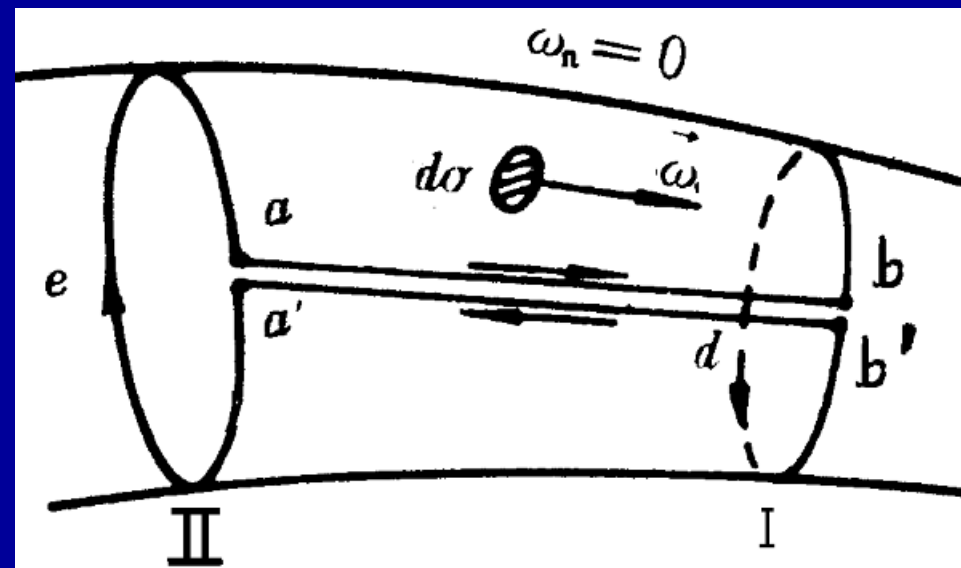
注意：贴近物体表面极薄一层要除外，由于粘性的存在，这极薄一层为有旋运动。

§ 5-3 海姆霍兹定理

海姆霍兹第一定理 —— 涡管强度守恒定理

(同一涡管各截面上的旋涡强度都相同)

海姆霍兹第一定理
说明涡管各截面上的旋
涡强度都相同。

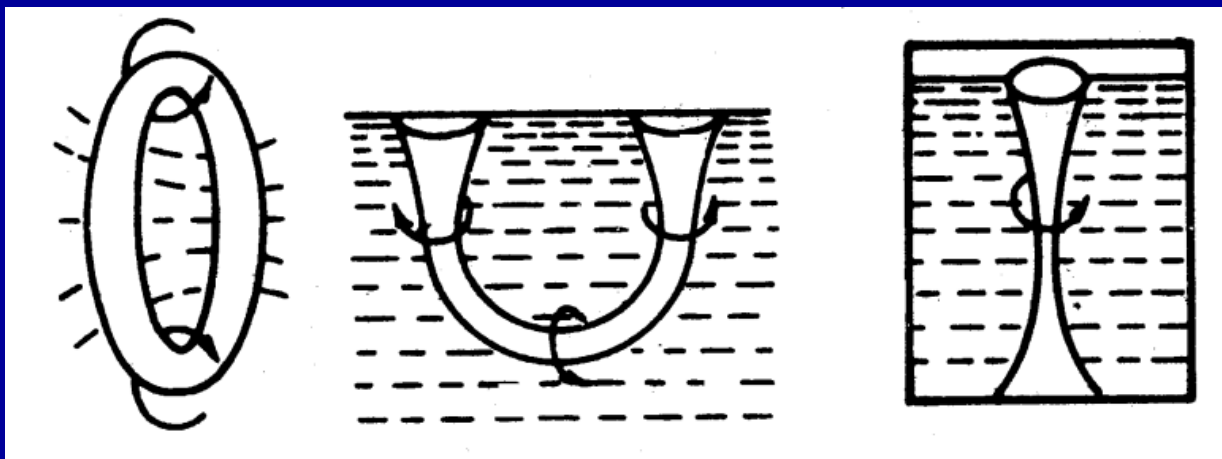
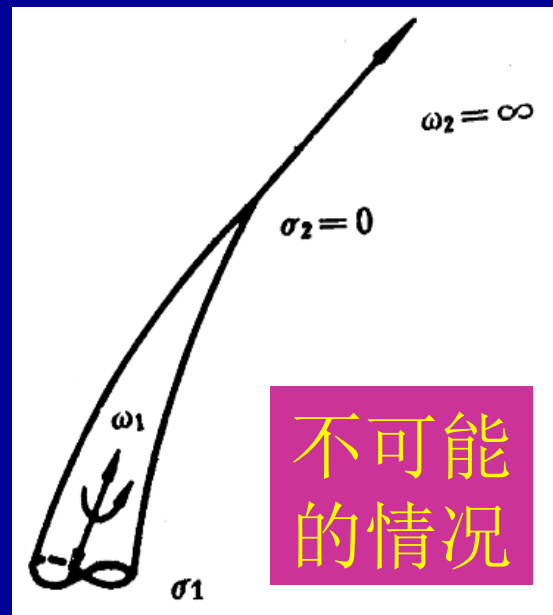


若涡管很小， ω 垂直于 $d\sigma$ ，则上式可写成
 $\omega d\sigma = \text{const.}$

结论： 涡管不能在流体中以尖端形式终止或开始，否则 $d\sigma \rightarrow 0$ 时有 $\omega \rightarrow \infty$ 。

因为 $\iint_{\sigma} \omega_n d\sigma = const$

涡管存在的形式： 要么终止于流体边界或固体边界，要么自行封闭形成涡环。



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/018047143035006112>