

2023-2024 学年安徽省池州市高考冲刺模拟数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_2 = 3$ ， $a_3 + a_4 = 12$ ，则公比 $q =$ ()

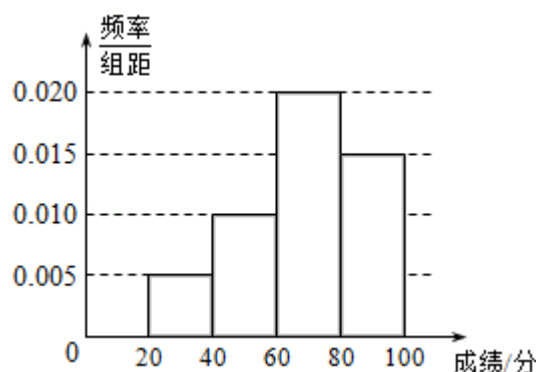
- A. ± 4 B. 4 C. ± 2 D. 2

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点分别为 F_1, F_2 ，其中焦点 F_2 与抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点重合，且椭圆与抛物线的两个交点连线正好过点 F_2 ，则椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $3 - 2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3} - 1$

3. 某学校组织学生参加英语测试，成绩的频率分布直方图如图，数据的分组依次为

$[20, 40), [40, 60), [60, 80), [80, 100]$ ，若低于 60 分的人数是 18 人，则该班的学生人数是 ()



- A. 45 B. 50 C. 55 D. 60

4. 下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数的是 ()

- A. $y = \sqrt{x+1}$ B. $y = x^2 - 1$ C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ D. $y = \log_2 x$

5. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，抛物线 C 与圆 $C': x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$ 交于 M, N 两点，若 $|MN| = \sqrt{6}$ ，则 $\triangle VMNF$ 的面积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

6. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{2-x^2}\}$, $B = \{x | \frac{x-2}{x+1} \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-1, 2]$ B. $[-1, \sqrt{2}]$ C. $(-1, \sqrt{2}]$ D. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

7. 已知 $a > 0, f(x) = ax^2 - x + 1 (x > 0), A = \{x | f(x) \leq x\}, B = \{x | f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$, 若 $A = B \neq \emptyset$ 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1]$ B. $(0, \frac{3}{4}]$ C. $[\frac{3}{4}, 1]$ D. $[1, +\infty)$

8. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 15 > 0\}$, $B = \{x | 0 < x < 7\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B$ 等于 ()

- A. $[-5, 7)$ B. $[-3, 7)$ C. $(-3, 7)$ D. $(-5, 7)$

9. 已知 m, n 为两条不重合直线, α, β 为两个不重合平面, 下列条件中, $\alpha \perp \beta$ 的充分条件是 ()

- A. $m \parallel n, m \subset \alpha, n \subset \beta$ B. $m \parallel n, m \perp \alpha, n \perp \beta$
C. $m \perp n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ D. $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$

10. 已知复数 z 满足 $z \cdot (1+2i) = 5$ (i 为虚数单位), 则在复平面内复数 z 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

11. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , A, B 是抛物线上两个不同的点, 若 $|AF| + |BF| = 8$, 则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 ()

- A. 5 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

12. 已知 a, b 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 且 $a \subset \beta, \alpha \cap \beta = b$, 则“ $a \parallel \alpha$ ”是“ $a \parallel b$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知半径为 R 的圆周上有一定点 A , 在圆周上等可能地任意取一点与点 A 连接, 则所得弦长介于 R 与 $\sqrt{3}R$ 之间的概率为_____.

14. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 a_4 = \frac{9}{2^4}, a_7 a_9 = \frac{9}{2^{14}}$, 则 $a_{13} =$ _____.

15. 在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 点 P 在菱形 $ABCD$ 所在的平面内. 若 $PA = 3, PC = \sqrt{21}$, 则

$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} =$ _____.

16. 函数 $y = \log_{0.5}(x^2 - ax + 5)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上递增, 则实数 a 的取值范围是_____

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某单位准备购买三台设备，型号分别为 A, B, C 已知这三台设备均使用同一种易耗品，提供设备的商家规定：可以在购买设备的同时购买该易耗品，每件易耗品的价格为 100 元，也可以在设备使用过程中，随时单独购买易耗品，每件易耗品的价格为 200 元.为了决策在购买设备时应购买的易耗品的件数.该单位调查了这三种型号的设备各 60 台，调查每台设备在一个月中使用的易耗品的件数，并得到统计表如下所示.

每台设备一个月中使用的易耗品的件数		6	7	8
频数	型号 A	30	30	0
	型号 B	20	30	10
	型号 C	0	45	15

将调查的每种型号的设备频率视为概率，各台设备在易耗品的使用上相互独立.

- (1) 求该单位一个月中 A, B, C 三台设备使用的易耗品总数超过 21 件的概率；
- (2) 以该单位一个月购买易耗品所需总费用的期望值为决策依据，该单位在购买设备时应同时购买 20 件还是 21 件易耗品？

18. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数)，以原点 O 为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 2$.

- (1) 求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；
- (2) 设 A, B 为曲线 C_1 上位于第一，二象限的两个动点，且 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ，射线 OA, OB 交曲线 C_2 分别于 D, C ，求 $\triangle AOB$ 面积的最小值，并求此时四边形 $ABCD$ 的面积.

19. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 上的任意一点 M 到直线 $y = -1$ 的距离比 M 点到点 $F(0, 2)$ 的距离小 1.

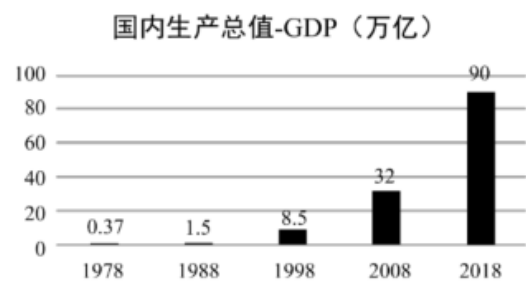
- (1) 求动点 M 的轨迹 C_1 的方程；
- (2) 若点 P 是圆 $C_2: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$ 上一动点，过点 P 作曲线 C_1 的两条切线，切点分别为 A, B ，求直线 AB 斜率的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - x \ln x + ax$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，函数 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最小值.

- (1) 求证： $\ln x_0 + x_0 = 0$ ；
- (2) 若 $x \geq x_0$ 时， $f(x) \geq 1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

21. (12 分) 已知抛物线 $\Gamma: y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点为 F , P 是抛物线 Γ 上一点, 且在第一象限, 满足 $\overline{FP} = (2, 2\sqrt{3})$

- (1) 求抛物线 Γ 的方程;
- (2) 已知经过点 $A(3, -2)$ 的直线交抛物线 Γ 于 M, N 两点, 经过定点 $B(3, -6)$ 和 M 的直线与抛物线 Γ 交于另一点 L , 问直线 NL 是否恒过定点, 如果过定点, 求出该定点, 否则说明理由.
22. (10 分) 根据国家统计局数据, 1978 年至 2018 年我国 GDP 总量从 0.37 万亿元跃升至 90 万亿元, 实际增长了 242 倍多, 综合国力大幅提升.



将年份 1978, 1988, 1998, 2008, 2018 分别用 1, 2, 3, 4, 5 代替, 并表示为 t ; y 表示全国 GDP 总量, 表中

$$z_i = \ln y_i (i=1,2,3,4,5), \quad \bar{z} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 z_i.$$

$\bar{t}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2$	$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(z_i - \bar{z})$
3	26.474	1.903	10	209.76	14.05

- (1) 根据数据及统计图表, 判断 $\hat{y} = bt + a$ 与 $\hat{y} = ce^{dt}$ (其中 $e = 2.718L$ 为自然对数的底数) 哪一个更适宜作为全国 GDP 总量 y 关于 t 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由), 并求出 y 关于 t 的回归方程.
- (2) 使用参考数据, 估计 2020 年的全国 GDP 总量.

线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

参考数据:

n	4	5	6	7	8
-----	---	---	---	---	---

e^n 的近似值	55	148	403	1097	2981
------------	----	-----	-----	------	------

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由 $S_2 = 3$ 得 $a_1 + a_2 = 3$ ，又 $a_3 + a_4 = (a_1 + a_2)q^2 = 12$ ，两式相除即可解出 q 。

【详解】

解：由 $S_2 = 3$ 得 $a_1 + a_2 = 3$ ，

又 $a_3 + a_4 = (a_1 + a_2)q^2 = 12$ ，

$\therefore q^2 = 4$ ， $\therefore q = -2$ ，或 $q = 2$ ，

又正项等比数列 $\{a_n\}$ 得 $q > 0$ ，

$\therefore q = 2$ ，

故选：D。

【点睛】

本题主要考查等比数列的性质的应用，属于基础题。

2、B

【解析】

根据题意可得易知 $c = \frac{p}{2}$ ，且 $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{p^2}{4} \\ p^2 b^2 + 4p^2 a^2 = 4a^2 b^2 \end{cases}$ ，解方程可得 $\begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} p^2 \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} p^2 \end{cases}$ ，再利用 $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ 即可求解。

【详解】

易知 $c = \frac{p}{2}$ ，且 $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{p^2}{4} \\ p^2 b^2 + 4p^2 a^2 = 4a^2 b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} p^2 \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} p^2 \end{cases}$

故有 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 3 - 2\sqrt{2}$ ，则 $e = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

故选：B

【点睛】

本题考查了椭圆的几何性质、抛物线的几何性质，考查了学生的计算能力，属于中档题

3、D

【解析】

根据频率分布直方图中频率=小矩形的高×组距计算成绩低于 60 分的频率，再根据样本容量 = $\frac{\text{频数}}{\text{频率}}$ 求出班级人数.

【详解】

根据频率分布直方图，得：低于 60 分的频率是 $(0.005+0.010) \times 20 = 0.30$ ，

∴ 样本容量（即该班的学生人数）是 $\frac{18}{0.30} = 60$ （人）.

故选：D.

【点睛】

本题考查了频率分布直方图的应用问题，也考查了频率 = $\frac{\text{频数}}{\text{样本容量}}$ 的应用问题，属于基础题

4、C

【解析】

利用基本初等函数的单调性判断各选项中函数在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性，进而可得出结果.

【详解】

对于 A 选项，函数 $y = \sqrt{x+1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

对于 B 选项，函数 $y = x^2 - 1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

对于 C 选项，函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数；

对于 D 选项，函数 $y = \log_2 x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

故选：C.

【点睛】

本题考查函数在区间上单调性的判断，熟悉一些常见的基本初等函数的单调性是判断的关键，属于基础题.

5、B

【解析】

由圆 C' 过原点, 知 M, N 中有一点 M 与原点重合, 作出图形, 由 $|C'M| = |C'N| = \sqrt{3}$, $|MN| = \sqrt{6}$, 得

$C'M \perp C'N$, 从而直线 MN 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 写出 N 点坐标, 代入抛物线方程求出参数 p , 可得 F 点坐标, 从而得三

角形面积.

【详解】

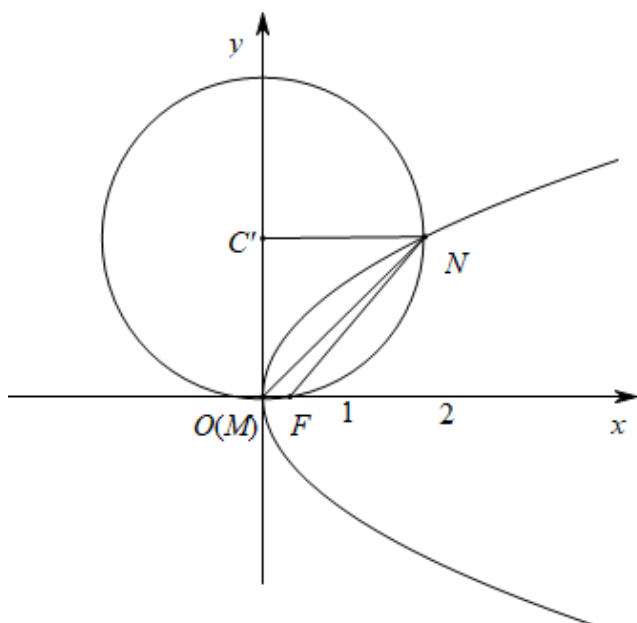
由题意圆 C' 过原点, 所以原点是圆与抛物线的一个交点, 不妨设为 M , 如图,

由于 $|C'M| = |C'N| = \sqrt{3}$, $|MN| = \sqrt{6}$, $\therefore C'M \perp C'N$, $\therefore \angle C'MN = \frac{\pi}{4}$, $\angle NOx = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore$ 点 N 坐标为 $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, 代入抛物线方程得 $(\sqrt{3})^2 = 2p \times \sqrt{3}$, $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore F(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0)$, $S_{\triangle FMN} = \frac{1}{2}|MF| \times y_N = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3} = \frac{3}{8}$.

故选: B.



【点睛】

本题考查抛物线与圆相交问题, 解题关键是发现原点 O 是其中一个交点, 从而 $\triangle MNC'$ 是等腰直角三角形, 于是可得 N 点坐标, 问题可解, 如果仅从方程组角度研究两曲线交点, 恐怕难度会大大增加, 甚至没法求解.

6、C

【解析】

计算 $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $B = (-1, 2]$, 再计算交集得到答案.

【详解】

$$A = \{x \mid y = \sqrt{2-x^2}\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad B = \{x \mid \frac{x-2}{x+1} \leq 0\} = (-1, 2], \quad \text{故 } A \cap B = (-1, \sqrt{2}].$$

故选: C.

【点睛】

本题考查了交集运算, 意在考查学生的计算能力.

7、C

【解析】

根据 $A \neq \phi$, 得到 $f(x) = ax^2 - x + 1 \leq x$ 有解, 则 $\Delta = 4 - 4a \geq 0$, 得 $0 < a \leq 1$, $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}$, 得

到 $A = \{x \mid f(x) \leq x\} = [x_1, x_2] = [\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}]$, 再根据 $B = \{x \mid f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$, 有 $f(f(x)) \leq f(x)$,

即 $a(ax^2 - x + 1)^2 - 2(ax^2 - x + 1) + 1 \leq 0$, 可化为 $(ax^2 - 2x + 1)(a^2x^2 + a - 1) \leq 0$, 根据 $A = B \neq \phi$, 则

$a^2x^2 + a - 1 \geq 0$ 的解集包含 $[\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}]$ 求解,

【详解】

因为 $A \neq \phi$,

所以 $f(x) = ax^2 - x + 1 \leq x$ 有解,

即 $f(x) = ax^2 - 2x + 1 \leq 0$ 有解,

所以 $\Delta = 4 - 4a \geq 0$, 得 $0 < a \leq 1$, $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}$,

所以 $A = \{x \mid f(x) \leq x\} = [x_1, x_2] = [\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}]$,

又因为 $B = \{x \mid f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$,

所以 $f(f(x)) \leq f(x)$,

即 $a(ax^2 - x + 1)^2 - 2(ax^2 - x + 1) + 1 \leq 0$,

可化为 $(ax^2 - 2x + 1)(a^2x^2 + a - 1) \leq 0$,

因为 $A = B \neq \phi$,

所以 $a^2x^2 + a - 1 \geq 0$ 的解集包含 $[\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, \frac{1+\sqrt{1-a}}{a}]$,

所以 $\frac{1+\sqrt{1-a}}{a} \leq \frac{-\sqrt{1-a}}{a}$ 或 $\frac{1-\sqrt{1-a}}{a} \geq \frac{\sqrt{1-a}}{a}$,

解得 $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$,

故选: C

【点睛】

本题主要考查一元二次不等式的解法及集合的关系的应用, 还考查了运算求解的能力, 属于中档题,

8、B

【解析】

解不等式确定集合 A , 然后由补集、并集定义求解.

【详解】

由题意 $A = \{x | x^2 - 2x - 15 > 0\} = \{x | x < -3 \text{ 或 } x > 5\}$,

$\therefore \complement_{\mathbb{R}} A = \{x | -3 \leq x \leq 5\}$,

$(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \{x | -3 \leq x < 7\}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查集合的综合运算, 以及一元二次不等式的解法, 属于基础题型.

9、D

【解析】

根据面面垂直的判定定理, 对选项中的命题进行分析、判断正误即可.

【详解】

对于 A, 当 $m // n$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$ 时, 则平面 α 与平面 β 可能相交, $\alpha \perp \beta$, $\alpha // \beta$, 故不能作为 $\alpha \perp \beta$ 的充分条件, 故 A 错误;

对于 B, 当 $m // n$, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$ 时, 则 $\alpha // \beta$, 故不能作为 $\alpha \perp \beta$ 的充分条件, 故 B 错误;

对于 C, 当 $m \perp n$, $m // \alpha$, $n // \beta$ 时, 则平面 α 与平面 β 相交, $\alpha \perp \beta$, $\alpha // \beta$, 故不能作为 $\alpha \perp \beta$ 的充分条件, 故 C 错误;

对于 D, 当 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, 则一定能得到 $\alpha \perp \beta$, 故 D 正确.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/018075103137006055>