

2023-2024 学年安徽省池州市贵池区高三第四次模拟考试数学试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在声学中，声强级 L （单位：dB）由公式 $L = 10 \lg \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$ 给出，其中 I 为声强（单位： W/m^2 ）。 $L_1 = 60\text{dB}$ ，

$L_2 = 75\text{dB}$ ，那么 $\frac{I_1}{I_2} =$ （ ）

- A. $10^{\frac{4}{5}}$ B. $10^{-\frac{4}{5}}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $10^{-\frac{3}{2}}$

2. 已知复数 $z = 1 - i$ ， $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $\frac{1+z}{\bar{z}} =$ （ ）

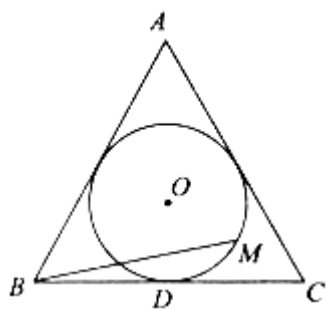
- A. $\frac{3+i}{2}$ B. $\frac{1+i}{2}$ C. $\frac{1-3i}{2}$ D. $\frac{1+3i}{2}$

3. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$ ，则双曲线的焦距为（ ）

- A. $2\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{5}$ C. 6 D. 8

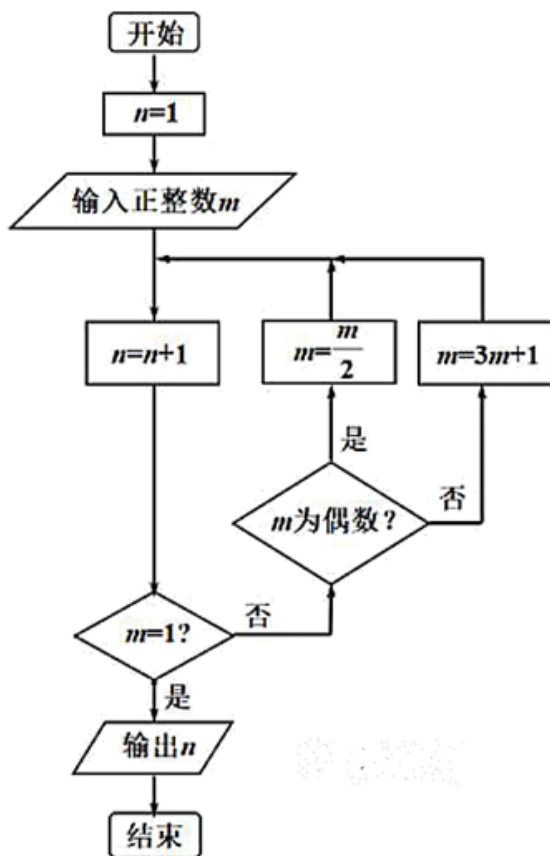
4. 如图，圆 O 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 的内切圆，其与 BC 边相切于点 D ，点 M 为圆上任意一点，

$\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD}$ ($x, y \in \mathbb{R}$)，则 $2x + y$ 的最大值为（ ）



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

5. 20 世纪产生了著名的“ $3x + 1$ ”猜想：任给一个正整数 x ，如果 x 是偶数，就将它减半；如果 x 是奇数，则将它乘 3 加 1，不断重复这样的运算，经过有限步后，一定可以得到 1. 如图是验证“ $3x + 1$ ”猜想的一个程序框图，若输入正整数 m 的值为 40，则输出的 n 的值是（ ）



- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

6. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$, 则 $|z| =$

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

7. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = \frac{1}{9}$, $S_3 = \frac{7}{27}$, 则 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最小值为 ()

- A. $(\frac{4}{27})^2$ B. $(\frac{4}{27})^3$ C. $(\frac{4}{27})^4$ D. $(\frac{4}{27})^5$

8. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 - a_1 = 15$, $a_4 - a_2 = 6$, 则 $a_3 =$ ()

- A. 2 B. 4 C. $\frac{1}{2}$ D. 8

9. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边经过点 $P(1, 2)$, 则 $\cos 2\theta =$ ()

- A. $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

10. 已知 m, n 是两条不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面, 下列命题正确的是 ()

A. 若 $m \perp \alpha$, $m \perp \beta$, $n \parallel \alpha$, $n \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

B. 若 $m \parallel n$, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

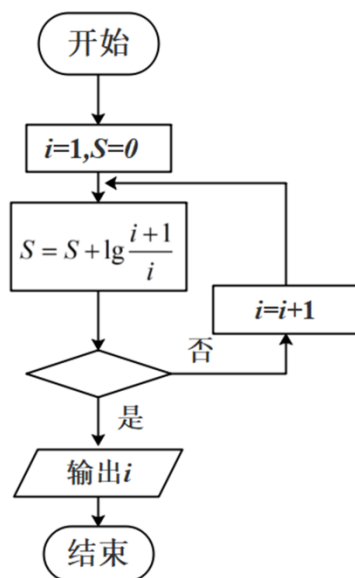
C. 若 $m \perp n$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

D. 若 $m \perp n$, $m \subset \alpha$, $n \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

11. 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 是正方形内部 (不包括正方形的边) 一点, 且 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$, 则 $(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC})^2$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{23}{2}$ B. 12 C. $\frac{25}{2}$ D. 13

12. 运行如图所示的程序框图, 若输出的 i 的值为 99, 则判断框中可以填 ()



- A. $S \geq 1$ B. $S > 2$ C. $S > \lg 99$ D. $S \geq \lg 98$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$), 直线 $l: x = 4a$ 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A , B 两点.

若 $\triangle OAB$ (点 O 为坐标原点) 的面积为 32, 且双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 则双曲线 C 的离心率为_____.

14. 若 $a + b \neq 0$, 则 $a^2 + b^2 + \frac{1}{(a+b)^2}$ 的最小值为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 = 1, a_3 = 36$, 则 $a_2 =$ _____.

16. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, 过左焦点 F_1 的直线与椭圆 C 交于 A, B

两点, 且 $|AF_1| = 3|BF_1|, |AB| = |BF_2|$, 则椭圆的离心率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\cos 2C + 3\cos C - 1 = 0$.

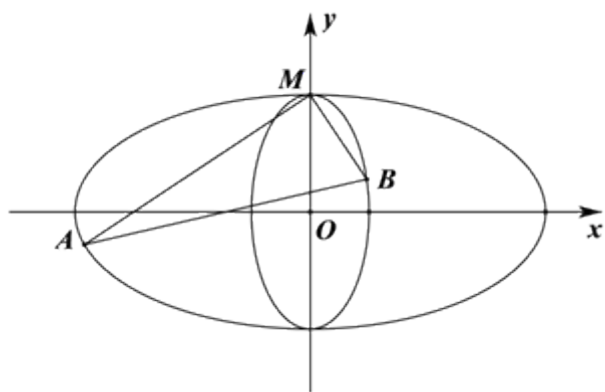
(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $b = 3a$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3} \sin A \sin B$, 求 $\sin A$ 及 c 的值.

18. (12分) 如图, 焦点在 x 轴上的椭圆 C_1 与焦点在 y 轴上的椭圆 C_2 都过点 $M(0,1)$, 中心都在坐标原点, 且椭圆 C_1 与 C_2 的离心率均为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求椭圆 C_1 与椭圆 C_2 的标准方程;

(II) 过点 M 的互相垂直的两直线分别与 C_1 , C_2 交于点 A , B (点 A , B 不同于点 M), 当 $\triangle MAB$ 的面积取最大值时, 求两直线 MA , MB 斜率的比值.



19. (12分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 点 $P(2, n)$ ($n > 0$) 在抛物线 C 上, $|PF| = 3$, 直线 l 过点 F , 且与抛物线 C 交于 A , B 两点.

(1) 求抛物线 C 的方程及点 P 的坐标;

(2) 求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最大值.

20. (12分) 设 $f(x) = (a-4)\log_a x - \frac{3}{a-1}x + \frac{3}{a-1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 证明: 当 $a = 4$ 时, $\ln x + f(x) \leq 0$;

(2) 当 $x \geq 1$ 时 $f(x) \leq 0$, 求整数 a 的最大值. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10, \ln 5 \approx 1.61, \ln 7 \approx 1.95$)

21. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - 2x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 的切线方程为 $y = ax + 1$, 求实数 a 的值;

(2) 若函数 $\varphi(x) = mf(x) + 2mx - x^2 + 3$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点, 求实数 m 的取值范围.

22. (10分) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = 2(x - \ln x)$

(I) 当 $x > 0$ 时, 证明 $f(x) > g(x)$;

(II) 已知点 $P(x, xf(x))$, 点 $Q(-\sin x, \cos x)$, 设函数 $h(x) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 试判断 $h(x)$ 的零点个数.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由 $L = 101g\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ 得 $\lg I = \frac{L}{10} - 12$, 分别算出 I_1 和 I_2 的值, 从而得到 $\frac{I_1}{I_2}$ 的值.

【详解】

$$\because L = 101g\left(\frac{I}{10^{-12}}\right),$$

$$\therefore L = 10(\lg I - \lg 10^{-12}) = 10(\lg I + 12),$$

$$\therefore \lg I = \frac{L}{10} - 12,$$

$$\text{当 } L_1 = 60 \text{ 时, } \lg I_1 = \frac{L_1}{10} - 12 = \frac{60}{10} - 12 = -6, \therefore I_1 = 10^{-6},$$

$$\text{当 } L_2 = 75 \text{ 时, } \lg I_2 = \frac{L_2}{10} - 12 = \frac{75}{10} - 12 = -4.5, \therefore I_2 = 10^{-4.5},$$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-6}}{10^{-4.5}} = 10^{-1.5} = 10^{-\frac{3}{2}},$$

故选: D.

【点睛】

本小题主要考查对数运算, 属于基础题.

2、C

【解析】

求出 $\bar{z}$ ，直接由复数的代数形式的乘除运算化简复数.

【详解】

$$\frac{1+z}{\bar{z}} = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1-3i}{2}.$$

故选：C

【点睛】

本题考查复数的代数形式的四则运算，共轭复数，属于基础题.

3、A

【解析】

依题意可得 $b^2 = 4$ ，再根据离心率求出 a^2 ，即可求出 c ，从而得解；

【详解】

解：∵双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$ ，

所以 $e^2 = 1 + \frac{4}{a^2} = 3$ ，∴ $a^2 = 2$ ，∴ $c = \sqrt{6}$ ，双曲线的焦距为 $2\sqrt{6}$ ．

故选：A

【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质，属于基础题.

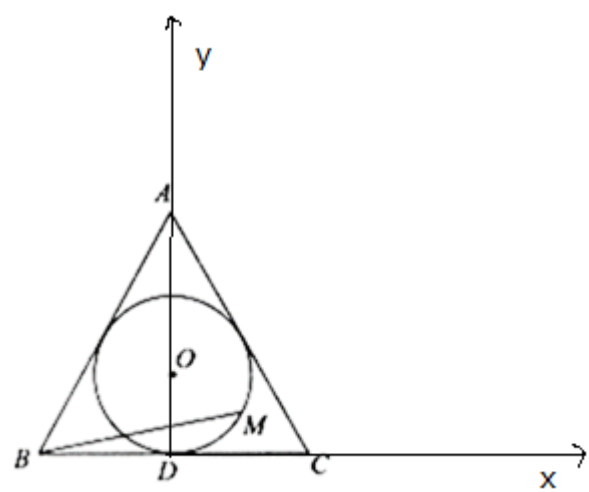
4、C

【解析】

建立坐标系，写出相应的点坐标，得到 $2x + y$ 的表达式，进而得到最大值.

【详解】

以 D 点为原点，BC 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，建立坐标系，



设内切圆的半径为 1, 以 (0, 1) 为圆心, 1 为半径的圆;

根据三角形面积公式得到 $\frac{1}{2} \times l_{\text{周长}} \times r = S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ$,

可得到内切圆的半径为 1;

可得到点的坐标为: $B(-\sqrt{3}, 0), C(\sqrt{3}, 0), A(0, 3), D(0, 0), M(\cos \theta, 1 + \sin \theta)$

$$\vec{BM} = (\cos \theta + \sqrt{3}, 1 + \sin \theta), \vec{BA} = (\sqrt{3}, 3), \vec{BD} = (\sqrt{3}, 0)$$

$$\text{故得到 } \vec{BM} = (\cos \theta + \sqrt{3}, 1 + \sin \theta) = (\sqrt{3}x + \sqrt{3}y, 3x)$$

$$\text{故得到 } \cos \theta = \sqrt{3}x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}, \sin \theta = 3x - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sin \theta}{3} \\ y = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \theta}{3} + \frac{2}{3} \end{cases}, \quad 2x + y = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \frac{\sin \theta}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \sin(\theta + \varphi) + \frac{4}{3} \leq 2.$$

故最大值为: 2.

故答案为 C.

【点睛】

这个题目考查了向量标化的应用, 以及参数方程的应用, 以向量为载体求相关变量的取值范围, 是向量与函数、不等式、三角函数等相结合的一类综合问题. 通过向量的运算, 将问题转化为解不等式或求函数值域, 是解决这类问题的一般方法.

5、C

【解析】

列出循环的每一步, 可得出输出的 n 的值.

【详解】

$$n = 1, \text{ 输入 } m = 40, \quad n = 1 + 1 = 2, \quad m = 1 \text{ 不成立, } m \text{ 是偶数成立, 则 } m = \frac{40}{2} = 20;$$

$$n = 2 + 1 = 3, \quad m = 1 \text{ 不成立, } m \text{ 是偶数成立, 则 } m = \frac{20}{2} = 10;$$

$$n = 3 + 1 = 4, \quad m = 1 \text{ 不成立, } m \text{ 是偶数成立, 则 } m = \frac{10}{2} = 5;$$

$$n = 4 + 1 = 5, \quad m = 1 \text{ 不成立, } m \text{ 是偶数不成立, 则 } m = 3 \times 5 + 1 = 16;$$

$$n = 5 + 1 = 6, \quad m = 1 \text{ 不成立, } m \text{ 是偶数成立, 则 } m = \frac{16}{2} = 8;$$

$$n = 6 + 1 = 7, \quad m = 1 \text{ 不成立, } m \text{ 是偶数成立, 则 } m = \frac{8}{2} = 4;$$

$n = 7 + 1 = 8$, $m = 1$ 不成立, m 是偶数成立, 则 $m = \frac{4}{2} = 2$;

$n = 8 + 1 = 9$, $m = 1$ 不成立, m 是偶数成立, 则 $m = \frac{2}{2} = 1$;

$n = 9 + 1 = 10$, $m = 1$ 成立, 跳出循环, 输出 n 的值为 10.

故选: C.

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果, 考查计算能力, 属于基础题.

6、C

【解析】

分析: 利用复数的除法运算法则: 分子、分母同乘以分母的共轭复数, 化简复数 z , 然后求解复数的模.

详解: $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i = \frac{(1-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} + 2i$

$$= -i + 2i = i,$$

则 $|z| = 1$, 故选 c.

点睛: 复数是高考中的必考知识, 主要考查复数的概念及复数的运算. 要注意对实部、虚部的理解, 掌握纯虚数、共轭复数这些重要概念, 复数的运算主要考查除法运算, 通过分母实数化转化为复数的乘法, 运算时特别要注意多项式相乘后的化简, 防止简单问题出错, 造成不必要的失分.

7、D

【解析】

由 $S_2 = \frac{1}{9}, S_3 = \frac{7}{27}$, 可求出等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{2^{n-1}}{27}$, 进而可知当 $1 \leq n \leq 5$ 时, $a_n < 1$; 当 $n \geq 6$ 时,

$a_n > 1$, 从而可知 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最小值为 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, 求解即可.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$,

$$\text{由题意得, } a_3 = S_3 - S_2 = \frac{4}{27}, \text{ 得 } \begin{cases} a_1 q^2 = \frac{4}{27} \\ a_1 + a_1 q = \frac{1}{9} \\ q > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = \frac{1}{27} \\ q = 2 \end{cases},$$

$$\text{得 } a_n = \frac{2^{n-1}}{27}.$$

当 $1 \leq n \leq 5$ 时, $a_n < 1$; 当 $n \geq 6$ 时, $a_n > 1$,

则 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最小值为 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = (a_3)^5 = \left(\frac{4}{27}\right)^5$.

故选: D.

【点睛】

本题考查等比数列的通项公式的求法, 考查等比数列的性质, 考查学生的计算求解能力, 属于中档题.

8、B

【解析】

根据题意得到 $a_5 - a_1 = a_1 q^4 - a_1 = 15$, $a_4 - a_2 = a_1 q^3 - a_1 q = 6$, 解得答案.

【详解】

$$a_5 - a_1 = a_1 q^4 - a_1 = 15, \quad a_4 - a_2 = a_1 q^3 - a_1 q = 6, \quad \text{解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = -16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{舍去}).$$

故 $a_3 = a_1 q^2 = 4$.

故选: B.

【点睛】

本题考查了等比数列的计算, 意在考查学生的计算能力.

9、A

【解析】

由已知可得 $\sin \theta$, 根据二倍角公式即可求解.

【详解】

角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合,

终边经过点 $P(1, 2)$, 则 $|OP| = \sqrt{5}$, $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$\therefore \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = -\frac{3}{5}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查三角函数定义、二倍角公式, 考查计算求解能力, 属于基础题.

10、B

【解析】

根据空间中直线、线面位置关系, 逐项判断即可得出结果.

【详解】

A 选项, 若 $m \perp \alpha$, $m \perp \beta$, $n \parallel \alpha$, $n \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ 或 α 与 β 相交; 故 A 错;

B 选项, 若 $m \parallel n$, $m \perp \alpha$, 则 $n \perp \alpha$, 又 $n \perp \beta$, α, β 是两个不重合的平面, 则 $\alpha \perp \beta$, 故 B 正确;

C 选项, 若 $m \perp n$, $m \subset \alpha$, 则 $n \subset \alpha$ 或 $n \parallel \alpha$ 或 n 与 α 相交, 又 $n \subset \beta$, α, β 是两个不重合的平面, 则 $\alpha \perp \beta$ 或 α 与 β 相交; 故 C 错;

D 选项, 若 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, 则 $n \subset \alpha$ 或 $n \parallel \alpha$ 或 n 与 α 相交, 又 $n \perp \beta$, α, β 是两个不重合的平面, 则 $\alpha \perp \beta$ 或 α 与 β 相交; 故 D 错;

故选 B

【点睛】

本题主要考查与线面、线线相关的命题, 熟记线线、线面位置关系, 即可求解, 属于常考题型.

11、C

【解析】

分别以直线 AB 为 x 轴, 直线 AD 为 y 轴建立平面直角坐标系, 设 $E(x, y)$, 根据 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$, 可求 $x + y = 1$, 而

$(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC})^2 = (x + 2)^2 + (y + 2)^2$, 化简求解.

【详解】

解 建立以 A 为原点, 以直线 AB 为 x 轴, 直线 AD 为 y 轴的平面直角坐标系. 设 $E(x, y)$, $x \in (0, 2)$, $y \in (0, 2)$, 则

$\overrightarrow{AE} = (x, y)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2)$, 由 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$, 即 $2x + 2y = 2$, 得 $x + y = 1$. 所以

$(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC})^2 = (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = x^2 + y^2 + 4(x + y) + 8$

$= 2x^2 - 2x + 13 = 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{2}$, 所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC})^2$ 的最小值为 $\frac{25}{2}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查向量的数量积的坐标表示, 属于基础题.

12、C

【解析】

模拟执行程序框图, 即可容易求得结果.

【详解】

运行该程序:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/018075105137006055>