保密★启用前

试卷类型：A

2021年深圳市高三年级第二次调研考试

数学

2021.4

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1.答卷前，考生务必用黑色字迹的签字笔在答题卡指定位置填写自己的学校、姓名和考生号，并将条形码正向准确粘贴在答题卡的贴条形码区，请保持条形码整洁、不污损。

2.选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上.

3.非选择题必须用0.5毫米黑色字迹的签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内；
如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要
求作答的答案无效。

4.考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卡交回.

一、单项选择题：本题共8道小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知 $A=\{x\in N|x<7\}$,$B=\{5,6,7,8\}$,则集合 $A\cup B$ 中的元素个数为

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

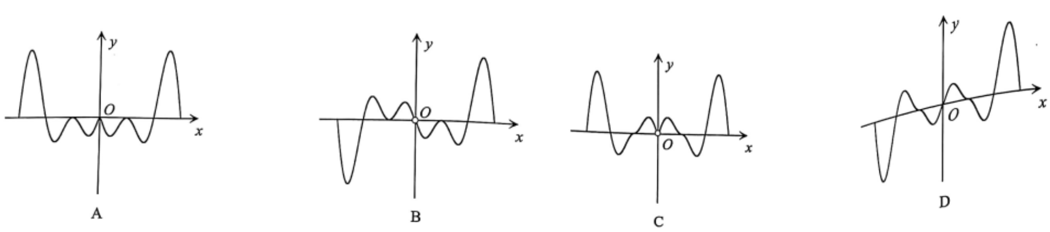
2.已知复数 $z=1+\sqrt{2}i$(i为虚数单位），设 z 是 z 的共轭复数，则 $z\cdot z=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C.2　　D.3

3.五一国际劳动节放假三天，甲、乙两名同学计划去敬老院做志愿者，若甲同学在三天中随机选一天，乙同学在前两天中随机选一天，且两名同学的选择互不影响，则他们在同一天去的概率为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

4.函数 $y=x^{\frac{2}{3}}\cdot\sin(\pi x)\cdot\log_2|x|$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

5.已知 $\cos x=\frac{1}{3}$,则 $\sin(2x-\frac{\pi}{2})=$

A. $\frac{7}{9}$　　B.-$\frac{7}{9}$　　C. $\frac{8}{9}$　　D.-$\frac{8}{9}$

6.设 α,β 为两个不同的平面，直线 $l\subset\alpha$,则“l//β”是“α//β”的

A. 充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

7.F_1、F_2 分别为双曲线 C:$x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与 C 的左、右两支曲线分别交于 A、B 两点，若 $l\perp F_2B$,则 $\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=$

A. 4-2$\sqrt{3}$　　B. 4+$\sqrt{3}$　　C.6-2$\sqrt{5}$　　D. 6+2$\sqrt{5}$

8.在一个正三角形的三边上，分别取一个距顶点最近的十等分点，连接形成的三角形也为正三角形（如图 1 所示，图中共有 2 个正三角形）．然后在较小的正三角形中，以同样的方式形成一个更小的正三角形，如此重复多次，可得到如图 2 所示的优美图形（图中共有 11 个正三角形），这个过程称之为迭代．在边长为 243 的正三角形三边上，分别取一个三等分点，连接成一个较小的正三角形，然后迭代得到如图 3 所示的图形（图中共有 10 个正三角形），其中最小的正三角形面积为

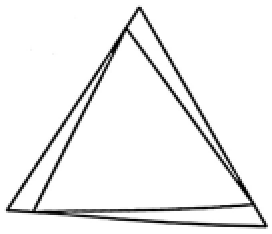


图1

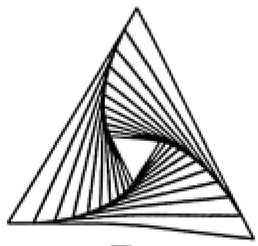


图2

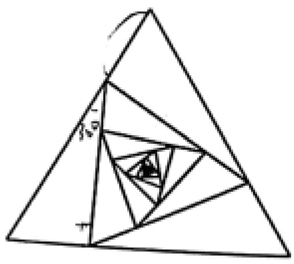


图3

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B.1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.设直线 l:y=kx+1(k∈R)与圆 C:$x^2+y^2=5$,则下列结论正确的为

A.l 与 C 可能相离　　B.l 不可能将 C 的周长平分

C.当 k=1 时，l 被 C 截得的弦长为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D.l 被 C 截得的最短弦长为 4

10.为方便顾客购物，某网上购鞋平台统计了鞋号 y(单位：码）与脚长 x(单位：毫米）的样本数据（x_i,y_i),发现 y 与 x 具有线性相关关系，用最小二乘法求得回归方程为 y=0.2x-10,则下列结论中正确的为

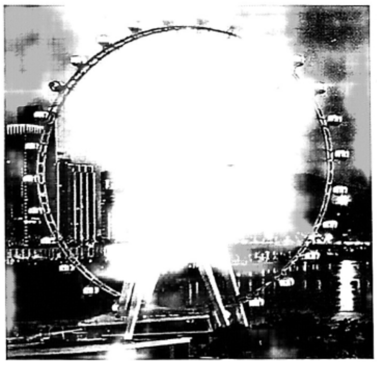
A.回归直线过样本点的中心（$\overline{x}$,$\overline{y}$)

B. y 与 x 可能具有负的线性相关关系

C.若某顾客的鞋号是 40 码，则该顾客的脚长约为 250 毫米

D.若某顾客的脚长为262毫米，在“不挤脚”的前提下，应选择42码的鞋

11.摩天轮常被当作一个城市的地标性建筑，如深圳前海的“湾区之光”摩天轮，如图所示，某摩天轮最高点离地面高度128米，转盘直径为120米，设置若干个座舱，游客从离地面最近的位置进舱，开启后按逆时针匀速旋转t分钟，当t=15时，游客随舱旋转至距离地面最远处．以下关于摩天轮的说法中，正确的为



（第11题图）

A.摩天轮离地面最近的距离为4米

B.若旋转t分钟后，游客距离地面的高度为h米，则$h=-60\cos(\frac{\pi}{15}t)+68$

C.若在t_1,t_2时刻，游客距离地面的高度相等，则t_1+t_2的最小值为30

D.$\exists\ t_1,t_2\in[0,20]$,使得游客在该时刻距离地面的高度均为90米

12.设函数$f(x)=e^x-ex$和$g(x)=\ln x-ka^2+(1-2k)x+\frac{1}{2}$（$k\in R$),其中e是自然对数的底数（e=2.71828...),则下列结论正确的为

A. f(x)的图象与x轴相切

B.存在实数k<0,使得g(x)的图象与x轴相切

C.若$k=\frac{1}{2}$则方程f(x)=g(x)有唯一实数解

D.若g(x)有两个零点，则k的取值范围为（0, $\frac{1}{2}$)

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.已知椭圆C的焦点在x轴上，且离心率为$\frac{1}{2}$,则C的方程可以为_____________.

14.设恒等式（$(1-2x)^5=a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$,则$a_o+a_3$=_____________ .

15.若在母线长为5,高为4的圆锥中挖去一个小球，则剩余部分体积的最小值为_____________.

16.著名的费马问题是法国数学家皮埃尔·德费马（1601-1665)于1643年提出的平面几何极值问

题："已知一个三角形，求作一点，使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小。"费马问题中的所求点称为费马点，已知对于每个给定的三角形，都存在唯一的费马点，当 ΔABC 的三个内角均小于 120°时，则使得∠APB=∠BPC=∠CPA=120°的点 P 即为费马点．已知点 P 为 ΔABC 的费马点，且 AC⊥BC,若丨PA|+|PB|=λ|PC|,则实数入的最小值为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分）

在①$2b_2=a_1+a_2$,②$b_2=a_8$,③$T_3=a_5$ 这三个条件中选择一个，补充在下面问题中，并作出解答。

问题：已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2ln-n^2$,等比数列 $\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,$b_1=a_3$,且__________，判断是否存在唯一的 k(k∈N*),使得 $b_k>1$,且 $b_{k+1}<1$.若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18.(12 分）

ΔABC 的内作 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 设 $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=\sqrt{2}\sinA\cdot\sinB$.

(1)求 C;

(2)若 $\cos B=\frac{3}{5}$, D 是边 BC 上一点，且 CD=4BD,ΔACD 的面积为 $\frac{7}{5}$,求 AC.

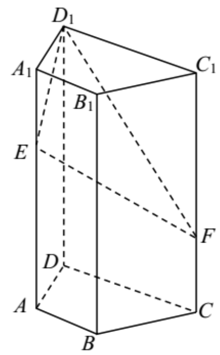
19.(12 分）

如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB//CD,DC=2,$AA_1=3$,AB=BC=DA=1,

点 E 和 F 分别在侧棱 AA_1、CC_1 上，且 $A_1E=CF=1$.

(1)求证：BC//平面 D_1EF;

(2)求直线 AD 与平面 D_1EF 所成角的正弦值.



（第 19 题图）

20.(12 分）

已知某高校共有 10000 名学生，其图书馆阅览室共有 994 个座位，假设学生是否去自习是相互独立的，且每个学生在每天的晚自习时间去阅览室自习的概率均为 0.1.

（1)将每天的晚自习时间去阅览室自习的学生人数记为 X,求 X 的期望和方差；

（2)18 世纪 30 年代，数学家棣莫弗发现，如果随机变量 X 服从二项分布 B(n,p),那么当 n 比较大时，可视为 X 服从正态分布 N(μ,o²).任意正态分布都可变换为标准正态分布（μ=0 且 σ=1 的正态分布），如果随机变量 Y~N(μ,o²),那么令 Z= $\dfrac{Y-\mu}{\sigma}$,则可以证明 Z~N(0,1).当 Z~N(0,1)时，对于任意实数 a,记 Φ(a)=P(Z<a).

已知下表为标准正态分布表（节选），该表用于查询标准正态分布对应的概率值．例如当 a=0.16 时，由于 0.16=0.1+0.06,则先在表的最左列找到数字 0.1(位于第三行），然后在表的最上行找到数字 0.06(位于第八列），则表中位于第三行第八列的数字 0.5636 便是 Φ(0.16)的值．

（i)求在晚自习时间阅览室座位不够用的概率；

（ii)若要使在晚自习时间阅览室座位够用的概率高于 0.7,则至少需要添加多少个座位？

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6404	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224

21.(12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，O 是坐标原点，P 是直线 x= -2 上的动点，过 P 作两条相异直线 l_1 和 l_2,其中 l_1 与抛物线 C:y²=4x 交于 A、B 两点，l_2 与 C 交于 M、N 两点，记 l_1、l_2 和直线 OP 的斜率分别为 k_1、k_2 和 k_3.

（1)当 P 在 x 轴上，且 A 为 PB 中点时，求$|k_1|$;

（2)当 AM 为 ΔPBN 的中位线时，请问是否存在常数 μ,使得 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\mu k_3$?若存在，求出 μ

的值；若不存在，请说明理由。

22.(12 分）

已知定义在 R 上的函数 $f(x)=x^2+a\cos x+(a-2)e^{-x}$,a∈R.(其中常数 e 是自然对数的底数，e=2.718 28....)

（1)当 a=2 时，求 $f(x)$的极值；

（2)(i)若 $f(x)$在［0,π]上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（ii)当 n∈N*时，证明：$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)\tan\frac{1}{n+k}}>n-\frac{1}{4n+2}.$$

绝密★启封并使用完毕前 **试题类型：A**

2021 年深圳市高三第二次调研考试

数学试题答案及评分参考

一、单项选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	B	A	B	C	A

二、多项选择题：

题号	9	10	11	12
答案	BD	AC	BC	ACD

12. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x$ 和 $g(x)=\ln x-kx^2+(1-2k)x+\frac{1}{2}$ $(k\in\mathbf{R})$，其中 e 是自然对数的底数（e=2.718 28…，则下列结论正确的为

A. $f(x)$ 的图象与 x 轴相切

B. 存在实数 $k<0$，使得 $g(x)$ 的图象与 x 轴相切

C. 若$k=\frac{1}{2}$，则方程 $f(x)=g(x)$ 有唯一实数解

D. 若$g(x)$ 有两个零点，则 k 的取值范围为$(0,\frac{1}{2})$

解析：$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$；$g(x)=\ln x-kx^2+(1-2k)x+\frac{1}{2}$，

则$g'(x)=-\dfrac{2kx^2+(2k-1)x-1}{x}=-\dfrac{(2kx-1)(x+1)}{x}\ (x>0)$.

（选项A）易知$x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，且 $f(1)=0$，所以 $f(x)$ 的图象与 x 轴相切，故选项 A 正确.

（选项 B）显然当 $k<0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 无极值点，则 $g(x)$ 的图象与 x 轴不可能相切，故选项 B 错误.

（选项 C）易知函数 $f(x)$ 的最小值 $f(1)=e^1-e\times 1=0$；当 $k=\frac{1}{2}$，

则函数 $g(x)$ 的最大值 $g(\frac{1}{2k})=g(1)=\ln 1-\frac{1}{2}+(1-2\times\frac{1}{2})\times 1+\frac{1}{2}=0$，

因此方程 $f(x)=g(x)$ 有唯一解 $x=1$.

（选项D（解法一）易知当 $k>0$ 时，$x=\frac{1}{2k}$ 是 $g(x)$ 的极大值点，

若函数 $g(x)$ 有两个零点，则须有 $g(\frac{1}{2k})>0$，即 $\ln\frac{1}{2k}-k(\frac{1}{2k})^2+(1-2k)\times\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}>0$，

化简得 $\frac{1}{4k}-\frac{1}{2}>\ln(2k)$，不难解得 $0<k<\frac{1}{2}$，

当 $x\to 0^{+}$ 时，$g(x)\to-\infty$，

显然当 $0<k<\frac{1}{2}$ 时，有 $\frac{1}{k^2}>\frac{1}{2k}$，

又 $g(\frac{1}{k^2})=\ln\frac{1}{k^2}-k(\frac{1}{k^2})^2+(1-2k)\times\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2}\le\frac{1}{k^2}-1-\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^2}-\frac{2}{k}+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{k^3}+\frac{2}{k^2}-\frac{2}{k}-\frac{1}{2}=\frac{1}{k^2}(2-\frac{1}{k})-(\frac{2}{k}+\frac{1}{2})$，当 $0<k<\frac{1}{2}$ 时，$g(\frac{1}{k^2})<0$，故选项 D 正确.

（解法二）$g(x)$ 有两个零点 $\Leftrightarrow \ln x-kx^2+(1-2k)x+\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x+\frac{1}{2}}{x}=kx+2k-1\Leftrightarrow \ln$

$1 = kx + 2k - 1$

$, 2x$

构造函数 $u(x) = \frac{\ln x}{} \; 1$ 和 $v(x) = kx + 2k - 1$，

$+ \qquad \frac{}{2x}$

$x \qquad \sqrt{\;} \qquad \sqrt{\;} \quad \frac{1}{\sqrt{\;}}$

则 $u'(x) = \frac{1-2\ln x}{}$，易知 e 是 $u(x)$ 的极大值点，极大值 $u(\quad \mathrm{e}) =$，

$x =$

$2x$

2

函数 $v(x) = kx + 2k - 1$ 的图象是过定点 $(-2, -1)$ 的直线，

直线 $y+1 = k(x+2)$ 与函数 $u(x)$ 的图象相切于点 $(x_0, u(x_0))$，则 $u'(x_0) = \frac{u(x_0)+1}{x_0+2}$，

$\ln x_0 + 1$

$+1$

则 $1 - 2\ln x_0 = \frac{2x_0}{} \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = (4+4x)\ln x \Leftrightarrow 1 - x = 2\ln x \Leftrightarrow x = 1$，

x_0

$\frac{}{2x^2} \qquad x + 2$

0 0 0 0 0 0

0 0

则$k = u'(1) = \frac{1-2\ln 1}{2} = \frac{1}{2}$，

则k 的取值范围为$(0,\frac{1}{2})$，故选项 D 正确.

综上所述，选项 ACD 正确.

三、填空题：

13. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$（答案不唯一； 14. -79； 15. $\frac{15\pi}{2}$； 16. $\frac{\sqrt{3}}{2}+2$.

13. 解析：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，形如$\frac{x^2}{4m}+\frac{y^2}{3m}=1(m>0)$ 这样的方程均可.

16．著名的费马问题是法国数学家皮埃尔·德·费马（1601–1665）于 1643 年提出的平面几何极值问题："已知一个三角形，求作一点，使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小."费马问题中的所求点称为费马点，已知对于每个给定的三角形，都存在唯一的费马点，当△ABC 的三个内角均小于 120° 时，则使得 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$ 的点P 即为费马点. 已知点 P 为△ABC 的费马点，且$AC\perp BC$，若

$|PA|+|PB|=\lambda|PC|$，则实数 λ 的最小值为________.

解析：（解法一）不妨设 $|PA|=m|PC|$，$|PB|=n|PC|$，且 $|PC|=x$，

∴由余弦定理得 $|CA|^2=x^2+m^2x^2-2mx^2\cos120^\circ=(m^2+m+1)x^2$，

$|CB|^2=x^2+n^2x^2-2nx^2\cos120^\circ=(n^2+n+1)x^2$，

$|AB|^2=m^2x^2+n^2x^2-2mnx^2\cos120^\circ=(m^2+n^2+mn)x^2$，

∵ $|AB|^2=|CA|^2+|CB|^2$，

∴ $(m^2+n^2+mn)x^2=(m^2+m+1)x^2+(n^2+n+1)x^2$，即 $m+n+2=mn$，

又 $mn\le\dfrac{(m+n)^2}{4}$，

∴ $m+n+2\le\dfrac{(m+n)^2}{4}$，

显然 $m+n=\lambda$，

∴ $\lambda^2-4\lambda-8\ge0$，解得 $\lambda\ge2\sqrt{3}+2$，或 $\lambda\le2-2\sqrt{3}$（舍去）

易知当 $m=n=\sqrt{3}+1$ 时，等号成立，

∴实数 λ 的最小值为 $2\sqrt{3}+2$

+2，故应填 2 +2.

（解法二）不妨设 $\angle PCA=\theta$，则 $\angle PCB=\frac{\pi}{2}-\theta$，$\angle PAC=\frac{\pi}{3}-\theta$，$\angle PBC=\theta-\frac{\pi}{6}$，

∴由正弦定理得 $\frac{|PA|}{|PC|}=\frac{\sin\theta}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{\sin\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta}$，

及 $\frac{|PB|}{|PC|}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}=\frac{\cos\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta}$，

∴ $\lambda=\frac{\sin\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}-\sin 2\theta}{\sin 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 2\theta-\sqrt{3}}-1$，

易知 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{3}$，

∴ $2\sin 2\theta-\sqrt{3}\le 2-\sqrt{3}$，

$\sqrt{3}$

$\therefore \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\ }} - 1 \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\ }} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$，即 $\lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$，

易知当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，等号成立，

∴实数 λ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2$，故应填 $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2$.

四、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

在①$2b_2 = a_1 + a_2$，②$b_2 = a_8$，③$T_3 = a_5$ 这三个条件中选择一个，补充在下面问题中，并作出解答.

问题：已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 21n - n^2$，等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$b_1 = a_3$，且 ____，

判断是否存在唯一的 k ($k \in \mathbf{N}^*$)，使得 $b_k > 1$，且 $b_{k+1} < 1$．若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

解：由 $S_n = n(21 - n)$，得 $a_1 = S_1 = 20$，……1分

当 $n > 1$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = (21n - n^2) - \lfloor 21(n-1) - (n-1)^2 \rfloor = 22 - 2n$，

经检验，当 $n = 1$ 时，上式也成立，

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 22 - 2n$，……3分

则 $b_1 = a_3 = 16$ ……4分

选择条件①的解答：

由 $a_n = 22 - 2n$，得 $a_1 = 20$，$a_2 = 18$，……5分

$b = a_1 + a_2$

$=\frac{20+18}{2}=19$， ……………………………………………………………………………………6 分

则等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{19}{16}>1$， ……………………………………………………………………7分

则 $\{b_n\}$ 是递增的等比数列，且 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=16\cdot\left(\frac{19}{16}\right)^{n-1}>1$， ……………………………………9分

故不存在 k（$k\in\mathbf{N}^*$），使得 $b_k>1$，且 $b_{k+1}<1$ ……………………………………………………10分

选择条件②的解答：

由 $a_n=22-2n$， 得 $a_8=6$，即 $b_2=a_8=6$， ……………………………………………………………5分

则等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$， ……………………………………………………6分

则 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=16\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$， ……………………………………………8分

则 $\{b_n\}$ 是递减的等比数列，

当 $k=3$ 时，使得 $b_3=\frac{9}{4}>1$，且 $b_4=\frac{27}{32}>1$，

易知存在唯一的 $k=3$，使得 $b_k>1$，且 $b_{k+1}<1$ ……………………………………………………10分

选择条件③的解答：

由 $a_n = 22 - 2n$，得 $a_5 = 12$， 5分

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

$T_3 = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = b_1(1+q+q^2) = 16(1+q+q^2) = 12$，即 $1+4q+4q^2=0$，

解得 $q=-\frac{1}{2}$ ，……7分

则 $\{b_n\}$ 是摆动的等比数列，且 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=16\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$ ，……8分

当 $k=1$ 时，使得 $b_1=16>1>-8=b_2$ ，当 $k=3$ 时，使得 $b_3=4>1>-2=b_4$ ，

故不存在唯一的 k （$k\in\mathbf{N}^*$），使得 $b_k>1$ ，且 $b_{k+1}<1$……10分

【命题意图】本题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式等，考察了学生的数学运算、逻辑推理等核心素养.

18.(12 分)

设△ ABC 的内角 A 、B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，且 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sqrt{2}\sin A\cdot\sin B=\sin^2 C$.

(1) 求 C ；

(2) 若 $\cos B=\frac{3}{5}$ ，D 是边 BC 上一点，且 $CD=4BD$ ，△ ACD 的面积为 $\frac{7}{5}$ ，求 b .

解: (1)由正弦定理，及 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sqrt{2}\sin A\cdot\sin B$ ，可得 $a^2+b^2-c^2=$

$\frac{a^2+b^2-c^2}{\ldots}$ $\sqrt{2}$

$2ab$，…3 分 $\sqrt{\ }$

由余弦定理，得 $\cos C =$ ———— $=$ ， 4分

$2ab$ 2

$\because C \in (0, \pi)$

，

$\therefore C = \frac{\pi}{4}$ ； ....5 分

（解法一）$\because \triangle ACD$ 的面积为 $\frac{7}{5}$，且 $CD = 4BD$，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{7}{4}$， ....6 分

$\because \cos B = \frac{3}{5}$，且 $B \in (0, \pi)$，

4

$\therefore \sin B =$

又$\because C = \frac{\pi}{4}$，

$\sqrt{1-\cos^2}$ $=\frac{4}{5}$，……………………………………………………………7 分

$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin(B+\frac{\pi}{4})=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，……………………………………………………8 分

在△ABC 中，由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，

$\therefore b=\frac{\sin B}{\sin A}\cdot a=\frac{4\sqrt{2}}{7}a$，

$\therefore a=\dfrac{7\sqrt{2}}{8}b$，……………………………………………………………10 分

$\because\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{7}{4}$，

$\therefore \dfrac{7}{4}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{7}{16}b^2$，

$\therefore b=2$，

即 $AC=2$． ……………………………………………………12 分

（解法二）设 $BD=x$，$CD=4x$，过 A 作 $AE\perp BC$ 于 E，……………………………………………………6分

$\because \cos B=\dfrac{3}{5}$，且 $B\in(0,\pi)$，

$\therefore \tan B=\dfrac{4}{3}$，

则由（1）易知 $AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$，$BE=5x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$，……………………7 分

在直角△ ABE 中，有 $\tan B=\dfrac{4}{3}=\dfrac{AE}{}=$

2 $\frac{2}{\sqrt{}}$, ……………………8 分

2 b $\sqrt{}$

3 BE $5x-$ 2 b

2

$\therefore x=\frac{7\sqrt{2}}{40}b$, ………………………………10 分

$\because S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD\cdot AC\cdot\sin C=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{10}\cdot\frac{2}{}b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7}{20}b^2=\frac{7}{5}$,

$\therefore b=2$

,

即 $AC=2$. ………………………………………………12 分

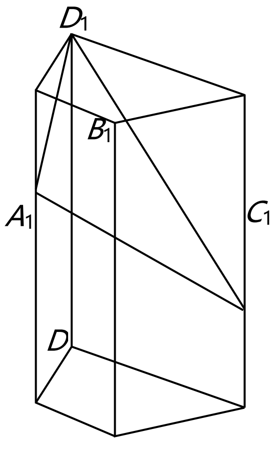
【命题意图】本题主要考察正弦定理、余弦定理、三角恒等变换等知识，渗透数形结合、转化与化归、方程等思想，意在考察学生的逻辑推理，数学运算等核心素养.

19.(12 分)

如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//CD$，$DC=2$，$AA_1=3$，$AB=BC=DA=1$，点 E 和 F 分别在侧棱 AA_1、CC_1 上，且 $A_1E=CF=1$.

(1) 求证：$BC//$ 平面 D_1EF；

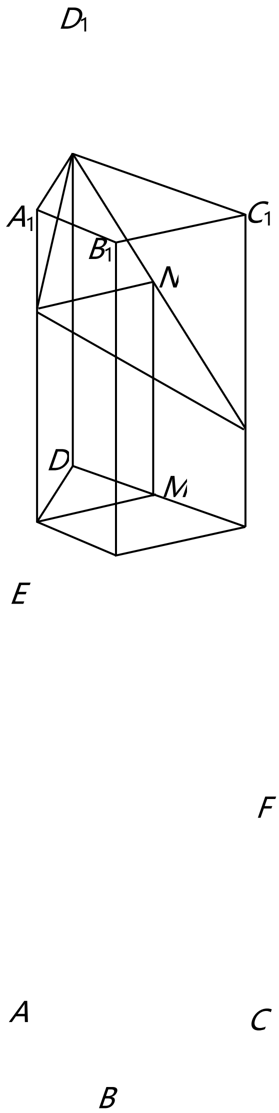
(2) 求直线 AD 与平面 D_1EF 所成角的正弦值.



(第19 题图)

解：(1) 证明：如图所示，分别取 CD，FD_1 的中点 M，N，连接 MN，AM，EN.…1 分

$\because M$，N 分别是 CD，FD_1 的中点，



$\therefore MN$ 是梯形 CFD_1D 的中位线，

$\therefore MN // CF // D_1D$，且 $MN=\frac{1}{2}(CF+D_1D)=2$．

$\because A_1E=1$，$A_1A // D_1D$，

$\therefore EA=2=MN$，且 $EA // MN$，

$\therefore$四边形$AENM$ 是平行四边形，

$\therefore EN // AM$……………………………………………………3 分

易证四边形 $AMCB$ 是平行四边形，

$\therefore BC // AM // EN$，

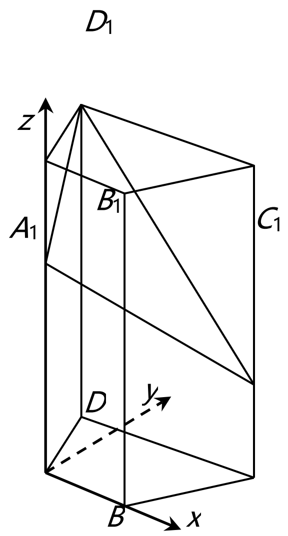
又$\because EN\subset$ 平面 D_1EF，$BC\not\subset$ 平面 D_1EF，

$\therefore BC //$ 平面D_1EF……5 分

(2)（**解法一**）以A为坐标原点，AB为x轴，过点A并垂直于AB的直线为z 轴，AA_1为y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，…………………………6 分

易得$A(0,0,0)$，$E(0,0,2)$，$D(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$D_1(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},3)$，$F(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},1)$，………………7 分

则有 $\overrightarrow{AD}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{D_1E}=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-1)$，$\overrightarrow{D_1F}=(2,0,-2)$， ……………8 分



设平面 ABS 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{D_1E}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{D_1F}\cdot\vec{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{2}x_1-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1-z_1=0,\\ 2x_1+0y_1-2z_1=0,\end{cases}$ ……………9 分

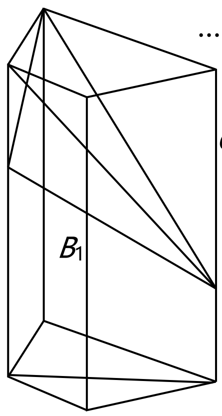
则平面 ABS 的一个法向量为 $\vec{m}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$， ……10分

$\cos<\overrightarrow{AD},\vec{m}>=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\vec{m}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{-\sqrt{3}}{1\times\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$， …………11分

设直线 AD 与平面 D_1EF 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AD},\vec{m}>|=\frac{\sqrt{21}}{7}$

（解法二）连接 A_1F，得到三棱锥 $F-A_1DE$，连接 AC， . ………12 分

………………………6 分



易知 $AC\perp AD$，且 $AC=\sqrt{3}$，$EF=2$，$DE=\sqrt{2}$，$D_1F=2\sqrt{2}$，……………7分

又 $A_1A\perp AC$，则 $AC\perp$平面A_1DE，………………………8分

那么三棱锥$F-A_1DE$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

$\cos\angle DEF=\frac{(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}{[illegible]}=\frac{3}{4}$，……………10分

F

D

A C

B

则 $\sin\angle DEF=\frac{\sqrt{7}}{4}$，设$A$ 到平面DEF 的距离为h，

由 $V_{A_1-D_1EF}=V_{F-A_1D_1E}$ 可得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times h=\frac{\sqrt{3}}{6}$，