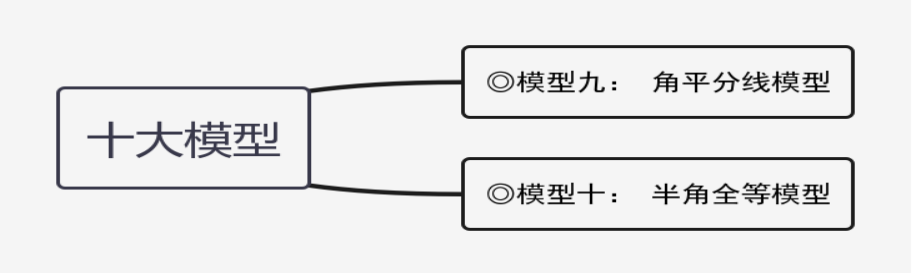
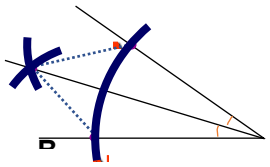
培优专题 09 全等三角形的十大模型之
角平分线和半角模型



◎模型九： 角平分线模型

【模型 1】：如图一，角平分线+对称型



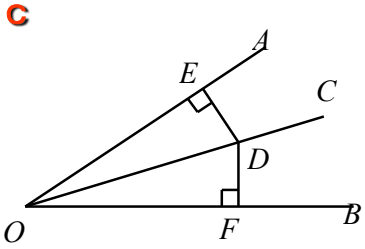
图一

利用角平分线图形的对称性，在角的两边构造对称全等三角形，可以得到对应边、对应角相等。利用对称性把一些线段或角进行转移，这是经常使用的一种解题技巧。

【理论依据】：三边对应相等的三角戏是全等三角形（SSS）、全等三角形对应角相等

【模型 2】：如图二，角平分线+垂直两边型

角平分线性质定理：角的平分线上的点作角两边垂直段构成的两个 RT 三角形全等.

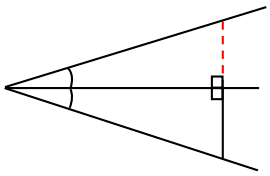


如图二

【几何语言】：∵ OC 为∠AOB 的角平分线，D 为 OC 上一点 DE⊥OA，DF⊥OB

∴△*OED*≌△*OFD*(AAS)，∴DE=DF

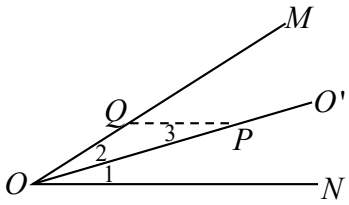
【模型 3】如图三，角平分线+垂直角平分线型



如图三

【说明】：构造此模型可以利用等腰三角形的“三线合一”，也可以得到两个全等的直角三角形，进而得到对应边、对应角相等。这个模型巧妙地把角平分线和三线合一联系了起来。

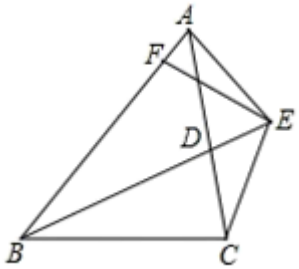
【模型四】角平分线+平行线型



如图四

【说明】: 有角平分线时，常过角平分线上一点作角的一边的平行线，构造等腰三角形，为证明结论提供更多的条件，体现了角平分线与等腰三角形之间的密切关系。

1.（2022·全国·八年级）已知：如图，BD 为△ABC 的角平分线，且 BD=BC，E 为 BD 延长线上的一点，BE=BA，过 E 作 EF⊥AB，F 为垂足，下列结论：①△ABD≌△EBC②∠BCE+∠BCD=180°③AD=AE=EC ④ BA+BC=2BF 其中正确的是（　　）



A．①②③　　B．①③④　　C．①②④　　D．①②③④

【答案】D

【分析】易证 $\Delta ABD \cong \Delta EBC$，可得 $\angle BCE = \angle BDA$，AD=EC 可得①②正确；再根据角平分线的性质可求

得 $\angle DAE=\angle DCE$ ，即③正确，根据③可判断④正确；

【详解】∵ BD 为∠ABC 的角平分线，

∴ ∠ABD=∠CBD，

∴在△ABD 和△EBD 中，BD=BC，∠ABD=∠CDB，BE=BA，

∴△ $\Delta ABD\cong\Delta EBC$ (SAS)，故①正确；

∵ BD 平分∠ABC，BD=BC，BE=BA，

∴ ∠BCD=∠BDC=∠BAE=∠BEA，

∵△ABD≌△EBC，

∴∠BCE=∠BDA，

∴∠BCE+∠BCD=∠BDA+∠BDC=180°，

故②正确；

∵∠BCE=∠BDA，∠BCE=∠BCD+∠DCE，

∠BDA=∠DAE+∠BEA，∠BCD=∠BEA，

∴∠DCE=∠DAE，

∴△ACE 是等腰三角形，

∴AE=EC，

∵△ABD≌△EBC，

∴AD=EC，

∴AD=AE=EC，

故③正确；

作 EG⊥BC，垂足为 G，如图所示：

∵ E 是 BD 上的点，∴EF=EG，

在△BEG 和△BEF 中 $\begin{cases}BE=BE\\EF=EG\end{cases}$

∴ △BEG≌△BEF，

∴BG=BF，

在△CEG 和△AFE 中 $\begin{cases}EF=EG\\AE=CE\end{cases}$

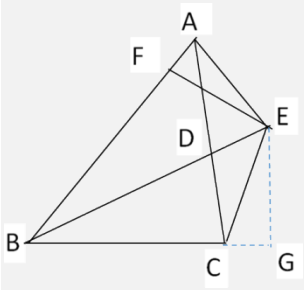
∴△CEG≌△AFE，

∴ AF=CG，

∴BA+BC=BF+FA+BG-CG=BF+BG=2BF，

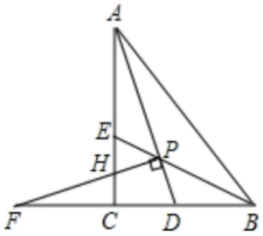
故④正确；

故选：D.



【点睛】本题考查了全等三角形的判定，全等三角形对应边、对应角相等的性质，本题中熟练求证三角形全等和熟练运用全等三角形对应边、对应角相等的性质是解题的关键；

2.（2019·浙江杭州·八年级期末）如图，$Rt\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$\triangle ABC$ 的角平分线 AD、BE 相交于点 P，过 P 作 $PF\perp AD$ 交 BC 的延长线于点 F，交 AC 于点 H，则下列结论：①$\angle APB=135^{\circ}$；②$PF=PA$；③$AH+BD=AB$；④S四边形 $ABDE=\frac{3}{2}S_{\triangle ABP}$，其中正确的个数是（　　）



A．4　　B．3　　C．2　　D．1

【答案】B

【分析】根据三角形全等的判定和性质以及三角形内角和定理逐一分析判断即可.

【详解】解：∵在△ABC 中，∠ACB=90°，

∴∠CAB+∠ABC=90°

∵AD、BE 分别平分∠BAC、∠ABC，

∴∠BAD=$\frac{1}{2}\angle CAB$，∠ABE=$\frac{1}{2}\angle ABC$

∴∠BAD+∠ABE=$\frac{1}{2}\angle CAB+\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle ABC)=45°$

∴∠APB=180°-（∠BAD+∠ABE）=135°，故①正确；

∴∠BPD=45°，

又∵PF⊥AD，

∴∠FPB=90°+45°=135°

∴∠APB=∠FPB

又∵∠ABP=∠FBP

BP=BP

∴△ABP≌△FBP（ASA）

∴∠BAP=∠BFP，AB=AB，PA=PF，故②正确；

在△APH 与△FPD 中

∵∠APH=∠FPD=90°

∠PAH=∠BAP=∠BFP

PA=PF

∴△APH≌△FPD（ASA），

∴AH=FD，

又∵AB=FB

∴AB=FD+BD=AH+BD，故③正确；

连接 HD，ED，

∵△APH≌△FPD，△ABP≌△FBP

∴$S_{\triangle APH}=S_{\triangle FPD}$，$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle FBP}$，PH=PD，

∵∠HPD=90°，

∴∠HDP=∠DHP=45°=∠BPD

∴HD∥EP，

∴$S_{\triangle EPH}=S_{\triangle EPD}$

∵$S_{四边形ABDE}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BDP}+S_{\triangle AEP}+S_{\triangle EPD}$

$=S_{\triangle ABP}+(S_{\triangle AEP}+S_{\triangle EPH})+S_{\triangle PBD}$

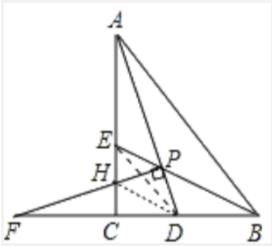
$=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APH}+S_{\triangle PBD}$

$=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle FPD}+S_{\triangle PBD}$

$=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle FBP}$

$=2S_{\triangle ABP}$

故④错误，

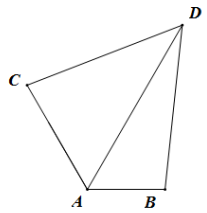


∴正确的有①②③，

故答案为：B.

【点睛】本题考查了三角形全等的判定方法，判定两个三角形全等的方法有：SSS、SAS、AAS、ASA、HL，注意 AAA 和 SAS 不能判定两个三角形全等.

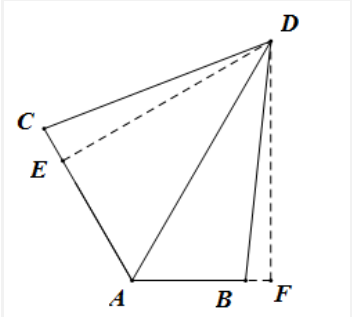
3.（2022·全国·八年级课时练习）已知，△*ABC* 中，∠*BAC*＝120°，*AD* 平分∠*BAC*，∠*BDC*＝60°，*AB*＝2，*AC*＝3，则 *AD* 的长是_____.



【答案】5

【分析】过 *D* 作，$DE \perp AC$，$DF \perp AB$ 交 *AB* 延长线于 *F*，然后根据全等三角形的性质和 30° 角直角三角形的性质即可求解.

【详解】过 *D* 作，$DE \perp AC$，$DF \perp AB$ 交 *AB* 延长线于 *F*，



∵*AD* 平分 $\angle BAC$，$DE \perp AC$，$DF \perp AB$，

∴ $DE = DF$，$\angle DEC = \angle DFB = 90° = \angle DEA$，

∵ $\angle BAC + \angle BDC + \angle DCE + \angle DBA = 360°$，

$\angle BAC = 120°$，$\angle BDC = 60°$，

∴ $\angle DCE + \angle DBA = 180°$，

∵ $\angle DBF + \angle DBA = 180°$，

$\therefore \angle DCE = \angle DBF$，

在$\triangle DEC$和$\triangle DFB$中，

$$\begin{cases} \angle DCE = \angle DBF \\ \angle DEC = \angle DFB \\ DE = DB \end{cases}$$

$\therefore \triangle DEC \cong \triangle DFB(AAS)$，

$\therefore CE = BF$，

在$Rt\triangle DEA$和$Rt\triangle DFA$中，

$$\begin{cases} DE = DF \\ DA = DA \end{cases}$$，

$\therefore Rt\triangle DEA \cong \triangle DFA(HL)$，

$\therefore AE = AF$，

$\because AE = AC - CE, AF = AB + BF$，

$\therefore AC - CE = AB + BF$，

$\therefore CE + BF = AC - AB = 1$，

$\therefore CE = BF = \frac{1}{2}$，

$\therefore AF = AB + BF = \frac{5}{2}$，

$\because AD$平分$\angle BAC$，

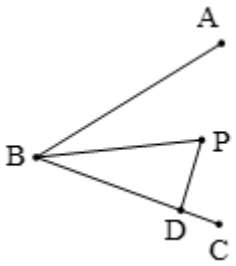
$\therefore \angle DAB = \frac{1}{2}\angle BAC = 60°$，

$\therefore \angle ADF = 180° - \angle DAB - \angle DFB = 30°$，

$\therefore AD = 2AF = 5$.

【点睛】此题考查了全等三角形和角平分线的性质，解题的关键是作出辅助线构造全等三角形.

4.（2022·全国·八年级课时练习）如图，BP 平分∠ABC，PD⊥BC，E、F 分别是角两边上点，现有四个结论知其一定能得其余结论的有①$\angle ABC + \angle EPF = 180°$；②$\angle BEP = \angle PFC$；③PE = PF；④$2BD = BF + BE$，_____.

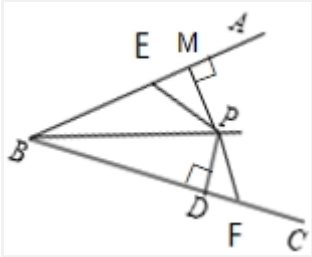


【答案】由(1)、(2)、(4）可以推出其它三个.

【分析】根据角平分线的性质定理、HL 证明直角三角形全等、AAS 证明三角形全等、同角的补角相等即可解答.

【详解】解：由(1)可以推出其它三个；由(4)可以推出其它三个；由(2)可以推出其它三个.

如图：过点 P 作 PM⊥AB 于点 M.



（一）增加条件①$\angle ABC+\angle EPF=180^{\circ}$时：

∵$\angle ABC+\angle EPF=180^{\circ}$，∠PFC+∠BFP=180°，

∴∠BEP+∠BFP=180°，∠BEP=∠PFC，即②成立，

∵∠BEP+∠PEM=180°，

∴∠DFP=∠MEP，

∵BP 平分∠ABC，$PD\perp BC$，PM⊥AB

∴PD=PM，

又∵∠PME=∠PDF=90°，

∴Rt△PME≌Rt△PDF，

∴ME=DF，$PE=PF$，即③成立，

∵BP=BP，

∴Rt△PMB≌Rt△PDB(HL)，

∴BM=BD，

∵BD=BF-DF，BM=BE+EM，ME=DF，

∴2BD=BD+BM=(BF-DF)+(BE+EM)= BF-DF+ BE+EM= BF+ BE，即$2BD=BF+BE$，故④正确.

（二）增加条件④$2BD=BF+BE$时，

∵BP 平分∠ABC，PD⊥BC，PM⊥AB

∴PD=PM，

又∵∠PMB=∠PDB=90°，BP=BP

∴Rt△PMB≌Rt△PDB，

∴BM=BD，

∵BD=BF-DF，BM=BE+EM，2BD= BF+BE，

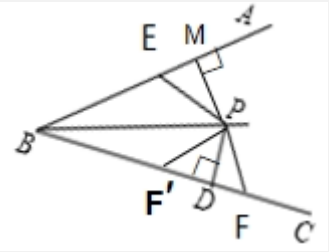
∴BD+ BM=2BD，即 BF-DF+ BE+EM= BF+BE

∴ME=DF，

同（一）方法即可证明 Rt△PME≌Rt△PDF，从而证得①、②、③正确；

(三)添加条件 ②$\angle BEP=\angle PFC$时，方法同（一）中即可证明 Rt△PME≌Rt△PDF，从而证得其它结论正确；

（四）如果添加③PE＝PF，当点 F 在下图 F′的位置时，其它三项不正确.



【点睛】本题重点考查角平分线的性质和三角形全等的证明，解题关键是熟练掌握三角形全等的证明方法.

5.（2022·江苏·八年级课时练习）在△*ABC* 中，*AD* 为△*ABC* 的角平分线，点 *E* 是直线 *BC* 上的动点.

（1）如图 1，当点 *E* 在 *CB* 的延长线上时，连接 *AE*，若∠*E*＝48°，*AE*＝*AD*＝*DC*，则∠*ABC* 的度数为 _____.

（2）如图 2，*AC*＞*AB*，点 *P* 在线段 *AD* 延长线上，比较 *AC*+*BP* 与 *AB*+*CP* 之间的大小关系，并证明.

（3）连接 *AE*，若∠*DAE*＝90°，∠*BAC*＝24°，且满足 *AB*+*AC*＝*EC*，请求出∠*ACB* 的度数（要求：画图，写思路，求出度数）.

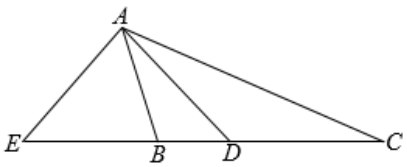


图1

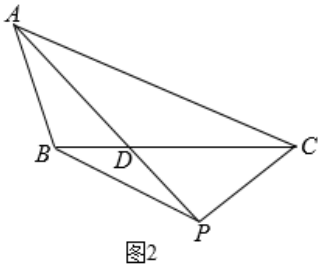


图2

【答案】（1）108°；（2）$AC+BP>AB+PC$，见解析；（3）44°或 104°；详见解析.

【分析】（1）根据等边对等角，可得$\angle E=\angle ADE$，$\angle DAC=\angle C$，再根据三角形外角的性质求出$\angle ADE=2\angle DAC=48°$，由此即可解题；

（2）在AC边上取一点M使$AM=AB$，构造$\triangle ABP\cong\triangle AMP$，根据$MP+MC>PC$即可得出答案；

（3）画出图形，根据点E的位置分四种情况，当点E在射线CB延长线上，延长CA到G，使$AG=AB$，可得$GC=EC$，可得$\angle G=\angle GEC$，设$\angle ACB=2x$，则$\angle G=\angle GEC=90°-x$；根据$\angle BAC=24°$，$AD$为$\triangle ABC$的角平分线，可得$\angle BAD=\angle DAC=12°$，可证$\triangle AGE\cong\triangle ABE$（$SAS$），得出$\angle ABE=\angle G=90°-x$，利用还有$\angle ABE=24°+2x$，列方程$90°-x=24°+2x$；当点$E$在$BD$上时，$\angle EAD<90°$，不成立；当点$E$在$CD$上时，$\angle EAD<90°$，不成立；当点$E$在$BC$延长线上，延长$CA$到$G$，使$AG=AB$，可得$GC=EC$，得出$\angle G=\angle GEC$，设$\angle ACB=2x$，则$\angle G=\angle GEC=x$；$\angle BAC=24°$，根据$AD$为$\triangle ABC$的角平分线，得出$\angle BAD=\angle DAC=12°$，证明$\triangle AGE\cong\triangle ABE$（$SAS$），得出$\angle ABE=\angle G=x$，利用三角形内角和列方程$x+24°+2x=180°$，解方程即可.

【详解】解：（1）∵$AE=AD=DC$，

∴$\angle E=\angle ADE$，$\angle DAC=\angle C$，

∵$\angle E=48°$，$\angle ADE=\angle DAC+\angle C$，

∴$\angle ADE=2\angle DAC=48°$，

∵AD为$\triangle ABC$的角平分线，即$\angle BAC=2\angle DAC$，

∴$\angle BAC=48°$；

∴$\angle ABC=180°-48°-24°=108°$

（2）如图2，

在AC边上取一点M使$AM=AB$，连接MP，

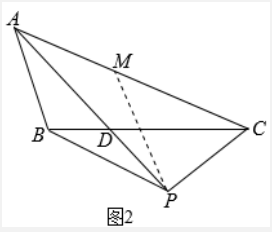


图2

在$\triangle ABP$和$\triangle AMP$中，

$$\begin{cases}AB=AM\\\angle BAP=\angle MAP\\AP=AP\end{cases}$$

∴$\triangle ABP\cong\triangle AMP$（$SAS$），

∴$BP=MP$，

$\because MP+MC>PC$，$MC=AC-AM$，

$\therefore AC-AB+BP>PC$，

$\therefore AC+BP>AB+PC$；

（3）如图，点 E 在射线 CB 延长线上，延长 CA 到 G，使 $AG=AB$，

$\because AB+AC=EC$，

$\therefore AG+AC=EC$，即 $GC=EC$，

$\therefore \angle G=\angle GEC$，

设 $\angle ACB=2x$，则 $\angle G=\angle GEC=90°-x$；

又 $\angle BAC=24°$，AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle BAD=\angle DAC=12°$，

又 $\because \angle DAE=90°$，

$\therefore \angle BAE=90°-\angle BAD=78°$，$\angle GAE=90°-\angle DAC=78°$，

$\therefore \angle BAE=\angle GAE$，

在 $\triangle AGE$ 和 $\triangle ABE$ 中，

$$\begin{cases} AE=AE \\ \angle GAE=\angle BAE \\ AG=AB \end{cases}$$，

$\therefore \triangle AGE\cong\triangle ABE$（$SAS$），

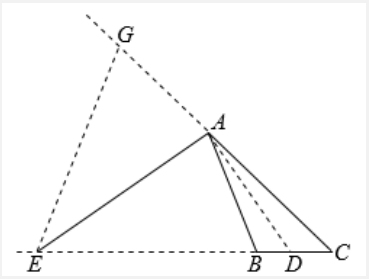
$\therefore \angle ABE=\angle G=90°-x$，

又 $\because \angle ABE=\angle BAC+\angle ACB=24°+2x$，

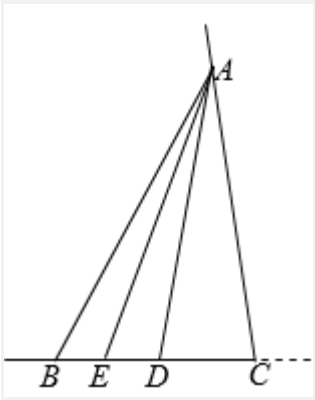
$\therefore 90°-x=24°+2x$，

解得：$x=22°$，

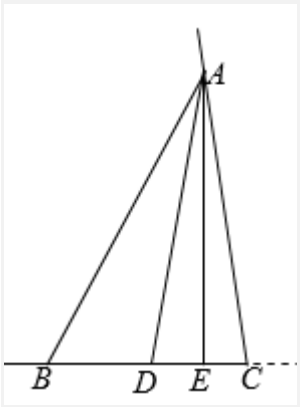
$\therefore \angle ACB=2x=44°$；



当点 E 在 BD 上时，$\angle EAD<90°$，不成立；



当点 E 在 CD 上时，$\angle EAD<90°$，不成立；



如图，点 E 在 BC 延长线上，延长 CA 到 G，使 $AG=AB$，

$\because AB+AC=EC$，

$\therefore AG+AC=EC$，即 $GC=EC$，

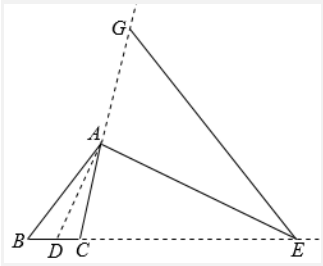
$\therefore \angle G=\angle GEC$，

设 $\angle ACB=2x$，则 $\angle G=\angle GEC=x$；

又$\because \angle BAC=24°$，AD 为$\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle BAD=\angle DAC=12°$，

又$\because \angle DAE=90°$，



$\therefore \angle BAE=90°+\angle BAD=102°$，$\angle GAE=90°+\angle DAC=102°$，

$\therefore \angle BAE=\angle GAE$，

在$\triangle AGE$ 和$\triangle ABE$ 中，

$$\begin{cases} AE = AE \\ \angle GAE = \angle BAE \\ AG = AB \end{cases},$$

$\therefore \triangle AGE \cong \triangle ABE$（$SAS$），

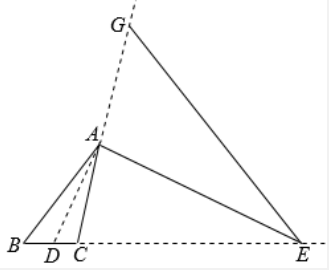
$\therefore \angle ABE = \angle G = x$，

$\therefore x + 24° + 2x = 180°$，

解得：$x = 52°$，

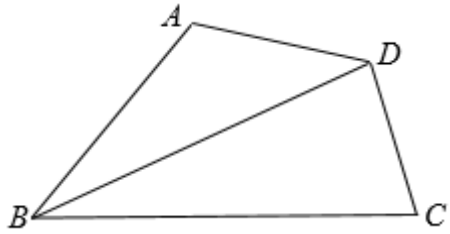
$\therefore \angle ACB = 2x = 104°$.

$\therefore \angle ACB$ 的度数为 44°或 104°.



【点睛】本题主要考查了等腰三角形性质、全等三角形判定和性质，角平分线，三角形外角性质，三角形内角和，解一元一次方程，根据角平分线模型构造全等三角形转换线段和角的关系是解题关键.

6.（2022·全国·八年级课时练习）如图，已知在四边形 $ABCD$ 中，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$AD = CD$．2 求证：$\angle A + \angle C = 180°$.



【答案】见解析

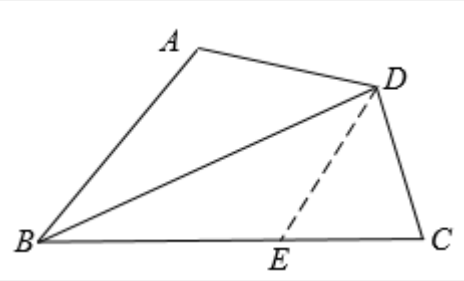
【分析】方法一，在 BC 上截取 BE，使 $BE = AB$，连接 DE，由角平分线的定义可得 $\angle ABC = \angle DBC$，根据全等三角形的判定可证 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBD$ 全等，再根据全等三角形的性质可得 $\angle A = \angle BED$，$AD = DE$，由 $AD=CD$ 等量代换可得 $DE = DC$，继而可得 $\angle C = \angle DEC$，由于 $\angle BED + \angle DEC = 180°$，可证 $\angle A + \angle C = 180°$；

方法 2，延长 BA 到点 E，使 $BE = BC$，由角平分线的定义可得 $\angle ABD = \angle DBC$，根据全等三角形的判定可证 $\triangle EBD$ 和 $\triangle CBD$ 全等，继而可得 $\angle E = \angle C$，$DC = DE$．由 $AD = CD$，可得 $DE = AD$，继而求得 $\angle E = \angle EAD$，由 $\angle EAD + \angle BAD = 180°$，继而可得 $\angle BAD + \angle C = 180°$；

方法 3， 作 $DE \perp BC$ 于点 E， $DE \perp BA$ 交 BA 的延长线于点 F，由角平分线的定义可得，由 $DE \perp BC$，$DE \perp BA$，可得 $\angle F = \angle DEB = 90°$，根据全等三角形的判定可证 $\triangle FBD$ 和 $\triangle EBD$ 全等，继而可得 $DF = DE$，再根据 HL 定理可得可证 $\angle BAD + \angle C = 180°$.

【详解】解：方法 1 截长如图，在 BC 上截取 BE，使 $BE = AB$，

连接 DE，



因为 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，

所以 $\angle ABC = \angle DBC$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBD$ 中，

因为 $\begin{cases} AB = EB \\ \angle ABD = \angle DBC \\ BD = BD \end{cases}$

所以 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$，

所以 $\angle A = \angle BED$， $AD = DE$.

因为 $AD = CD$，

所以 $DE = DC$，

所以 $\angle C = \angle DEC$.

因为 $\angle BED + \angle DEC = 180°$，

所以 $\angle A + \angle C = 180°$.

方法 2　补短

如图，延长 BA 到点 E，使 $BE = BC$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/025001124244011244