

圆锥曲线轨迹全归纳 (13 题型提分练)



M 目录

题型一：定义法：圆型	1
题型二：椭圆定义型	3
题型三：双曲线定义型	6
题型四：抛物线定义型	10
题型五：直接设点型	13
题型六：相关点代入法	16
题型七：交轨法	18
题型八：参数消参法	22
题型九：空间型：坐标法	25
题型十：空间型：截面型曲线轨迹	29
题型十一：空间型：双球圆锥型	34
题型十二：立体几何定角型	38
题型十三：复数中的轨迹	42



题型一：定义法：圆型

指I点I迷I津

如果动点P的运动规律合乎我们已知的某种曲线（如圆、椭圆、双曲线、抛物线）的定义，可直接写出所求的动点的轨迹方程，这种方法叫做定义法.

平面内到一定点的距离等于定长的点的轨迹是圆，定点为圆心，定长为圆的半径.

- (1) 若直线含参，参数在 x 系数出，则不包含竖直，如 $y=k(x-1)+1$ ，不含想 $x=1$
- (2) 若直线含参，参数在 y 的系数出，则不含水平，如 $x+m(y-1)+2=0$ ，不含 $y=1$
- (3) 若直线参数在常数位置，则为一系列平行线，如 $x+y+c=0$ 与 $y=-x$ 平行

1. (22-23 高三·四川绵阳·阶段练习) 已知 $m \in \mathbf{R}$, 若过定点 A 的动直线 $l_1: x - my + m - 2 = 0$ 和过定点 B 的动直线 $l_2: y - 4 = -m(x + 2)$ 交于点 P (P 与 A, B 不重合), 则错误的是 ()

A. A 点的坐标为 $(2, 1)$

B. 点 P 的轨迹方程 $x^2 + y^2 - 5y = 0$

C. $PA^2 + PB^2 = 25$

D. $2PA + PB$ 的最大值为 $5\sqrt{5}$

【答案】B

【分析】求出直线恒过的定点可判断A, 由已知可得两条直线互相垂直, 由此可验证B、C, 由已知可得 $PA \perp PB$, 设 $\angle PAB = \theta$, 进而求出 $2PA + PB$ 的最大值, 即可判断D.

【详解】由动直线 $l_1: x - my + m - 2 = 0$, 得 $x - 2 + m(1 - y) = 0$, 所以定点 $A(2, 1)$, 故A正确;

由动直线 $l_2: y - 4 = -m(x + 2)$, 可得 $B(-2, 4)$,

由 $l_1: x - my + m - 2 = 0$ 和 $l_2: mx + y - 4 + 2m = 0$ 满足 $1 \times m + (-m) \times 1 = 0$

所以 $l_1 \perp l_2$, 可得 $PA \perp PB$,

所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = (2 + 2)^2 + (1 - 4)^2 = 25$, 故C正确;

设 $P(x, y)$, 则 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$,

即点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 - 5y = 0$, 而 P 与 A, B 不重合, 则 $x \neq \pm 2$, 故B错误;

因为 $PA \perp PB$, 设 $\angle PAB = \theta$, θ 为锐角, 则

所以 $2PA + PB = 5(2\cos\theta + \sin\theta) = 5\sqrt{5}\sin(\theta + \frac{\pi}{6})$, $|PA| = 5\cos\theta$, $|PB| = 5\sin\theta$,

所以当 $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 1$ 时, $2|PA| + |PB|$ 取最大值 $5\sqrt{5}$, 故D正确.

故选: B.

2. (2022 高三·全国·专题练习) 设 $m \in \mathbf{R}$, 过定点A 的动直线 $x + my + m = 0$ 和过定点B 的动直线 $mx - y - m + 2 = 0$ 交于点 $P(x, y)$, 则 $|PA| + |PB|$ 的取值范围是 ()

A. $[\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$

B. $[\sqrt{10}, 2\sqrt{5}]$

C. $[\sqrt{10}, 4\sqrt{5}]$

D. $[2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}]$

【答案】B

【分析】先由两直线方程求出 A, B 的坐标, 由于两直线垂直, 所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = 10$, 若设

$\angle ABP = \theta$, 则 $|PA| = 10\sin\theta$, $|PB| = 10\cos\theta$, 然后表示出 $|PA| + |PB|$ 变形后, 利用三角函数的性质可求得其范围.

【详解】解: 由题意可知, 动直线 $x + my + m = 0$ 经过定点 $A(0, -1)$,

动直线 $mx - y - m + 2 = 0$, 即 $m(x - 1) - y + 2 = 0$, 经过点 $B(1, 2)$,

Q 动直线 $x + my + m = 0$ 和动直线 $mx - y - m + 2 = 0$ 的斜率之积为 -1 , 始终垂直,

P 又是两条直线的交点, $\therefore PA \perp PB$, $\therefore |PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = 10$. 设 $\angle ABP = \theta$, 则 $|PA| = \sqrt{10} \sin \theta$,
 $|PB| = \sqrt{10} \cos \theta$,

由 $|PA| \geq 0$ 且 $|PB| \geq 0$ ，可得 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ： $|PA| + |PB| = \sqrt{10}(\sin\theta + \cos\theta) = 2\sqrt{5}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ ， $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，

$\theta + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ， $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ ， $2\sqrt{5}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \in [\sqrt{10}, 2\sqrt{5}]$ ，故选：B.

【点睛】关键点点睛：此题考查直线过定点问题，考查两直线的位置关系，考查三角函数的应用，解题的关键是由已知得到 $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = 10$ ，通过三角换元转化为利用三角函数的性质求 $|PA| + |PB|$ 的取值范围，考查数学转化思想，属于较难题.

3. (24-25 高三·福建厦门·阶段练习) 已知 $O(0,0), Q(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，直线 $l_1: kx - y + 2k + 3 = 0$ ，直线

$l_2: x + ky + 3k + 2 = 0$ ，若 P 为 l_1, l_2 的交点，则 $3|PO| + 2|PQ|$ 的最小值为()

- A. $3\sqrt{3}$ B. $6 - 3\sqrt{2}$ C. $9 - 3\sqrt{2}$ D. $3 + \sqrt{6}$

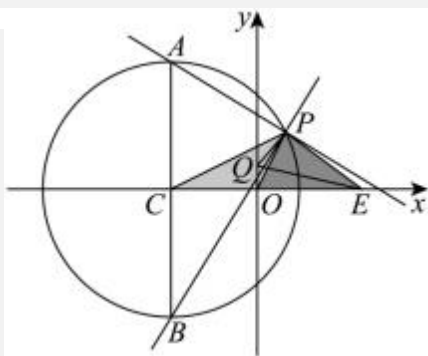
【答案】A

【分析】利用直线过定点及两直线位置关系先确定 P 的轨迹，取点构造相似结合三角形三边关系计算即可.

【详解】因为直线 $l_1: kx - y + 2k + 3 = 0$ ，直线 $l_2: x + ky + 3k + 2 = 0$ ，易知 $l_1 \perp l_2$ ，

且 l_1, l_2 分别过定点 $A(-2, 3), B(-2, -3)$ ，取其中点 $C(-2, 0)$ ，易知 $AP \perp BP$ ，

则 P 点在以 C 为圆心，3 为半径的圆上，取点 $E(\frac{5}{2}, 0)$ ，连接 PE, QE, QP ，



不难发现 $\frac{PC}{CE} = \frac{CO}{PC} = \frac{2}{3}$ ，则 $\triangle PCO \sim \triangle ECP$ ，所以 $\frac{PO}{PE} = \frac{2}{3}$ ，

则 $3|PO| + 2|PQ| = 2(|PE| + |PQ|) \geq 2|QE| = 2\sqrt{QO^2 + OE^2} = 3\sqrt{3}$ ，

当且仅当 P, Q, E 三点共线，且 P 与线段 QE 和圆 C 的交点重合时取得等号.

故选：A.

4. (22-23 高三·福建莆田·阶段练习) 已知 $m \in \mathbb{R}$ ，若过定点 A 的动直线 $l_1: x - my + m - 2 = 0$ 和过定点 B 的动直线 $l_2: y - 4 = -m(x + 2)$ 交于点 P (P 与 A, B 不重合)，则下列结论中正确的是()

- A. A 点的坐标为 $(2, 1)$ B. 点 P 的轨迹方程 $x^2 + y^2 - 5y = 0$

- C. $PA^2 + PB^2 = 25$

- D. $2PA + PB$ 的最大值为 $5\sqrt{5}$

【答案】ACD

【分析】根据定点判断方法、直线垂直关系、勾股定理、三角函数辅助角求最值即可得解.

【详解】对于选项 A:

$l_1: x - my + m - 2 = 0$ 可以转化为 $m(1-y) + x - 2 = 0$,

故直线恒过定点 $A(2,1)$, 故该选项正确;

对于选项 C: $l_2: y - 4 = -m(x + 2)$ 恒过定点 $B(-2,4)$, 由 $l_1: x - my + m - 2 = 0$ 和 $l_2: mx + y - 4 + 2m = 0$, 满足 $1 \times m + (-m) \times 1 = 0$, 所以 $l_1 \perp l_2$, 可得 $PA \perp PB$, 所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = (2+2)^2 + (1-4)^2 = 25$, 故 C 正确;

对于选项 B: 设 $P(x,y)$, 则 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$,

即点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 - 5y = 0$, 而 P 与 A, B 不重合, 则挖去 A, B 两点 故 B 错误;

对于选项 D:

因为 $PA \perp PB$, 设 $\angle PAB = \theta, \theta$ 为锐角, 则 $|PA| = 5 \cos \theta, |PB| = 5 \sin \theta$,

$$|PA| = 5 \cos \theta, |PB| = 5 \sin \theta$$

所以 $2|PA| + |PB| = 5(2 \cos \theta + \sin \theta) = 5\sqrt{5} \sin(\theta + \varphi)$, 所以当 $\sin(\theta + \varphi) = 1$ 时, $2|PA| + |PB|$ 取最大值 $5\sqrt{5}$, 故 D 正确.

故选: ACD.

5. (22-23 高三·新疆乌鲁木齐·阶段练习) 设 $m \in \mathbf{R}$, 过定点 A 的动直线 $x + my + 1 = 0$ 和过定点 B 的动直线 $mx - y - 2m + 3 = 0$ 交于点 $P(x,y)$, 则 P 点的轨迹方程是

【答案】 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$

【分析】根据两直线的方程可求得定点 A, B 的坐标, 以及两直线垂直, 进而可得 P 点的轨迹是以 AB 为直径的圆, 即得.

【详解】由 $x + my + 1 = 0$ 可知 $my = -x - 1$, 所以该直线过定点 $A(-1,0)$,

由 $mx - y - 2m + 3 = 0$ 可得 $m(x - 2) = y - 3$, 所以该直线过定点 $B(2,3)$, 因为 $1 \times m - m \times 1 = 0$,

所以直线 $x + my + 1 = 0$ 与 $mx - y - 2m + 3 = 0$ 垂直, 所以 $PA \perp PB$, 即 P 点的轨迹是以 AB 为直径的圆,

所以 P 点的轨迹方程是 $\left(x - \frac{-1+2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{(-1-2)^2 + 3^2}{4}$, 即 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

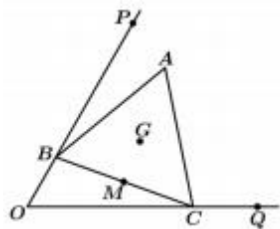
故答案为: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

指点迷津

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的点,两焦点间的距离叫做椭圆的焦距

1. (20-21 高三·浙江金华·模拟) 如图, $\angle POQ = 60^\circ$, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2, M 为 BC 中点, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, B, C 分别在射线 OP, OQ 上运动, 记 M 的轨迹为 C_1 , G 的轨迹为 C_2 , 则 ()

- A. C_1 为部分圆, C_2 为部分椭圆
B. C_1 为部分圆, C_2 为线段
C. C_1 为部分椭圆, C_2 为线段
D. C_1 为部分椭圆, C_2 也为部分椭圆



【答案】C

【分析】建系如图, 由两点间距离公式结合中点坐标公式可得点 M 的轨迹方程, 由此得 C_1 为部分椭圆; 过点 A 作与 y 轴垂直的直线分别交 OP 于点 E , 交 OQ 于点 F , 得等边 $\triangle OEF$, 由平面几何可得 G 是等边 $\triangle OEF$ 的外心, 由此可得点 G 的轨迹 C_2 为 y 轴在曲线 C_1 内的一段线段.

【详解】以 O 为原点, 以上 POQ 的角平分线为 y 轴建立平面直角坐标系如图所示.

依题意得直线 OQ 的方程为 $y = \sqrt{3}x$, 直线 OP 的方程为 $y = -\sqrt{3}x$.

设点 $B(b, -\sqrt{3}b)$, $C(c, \sqrt{3}c)$, 由 $BC = 2$ 得 $(b-c)^2 + 3(b+c)^2 = 4$ (*),

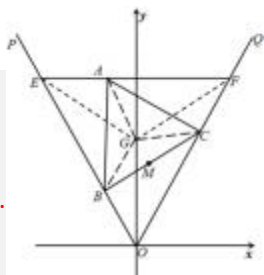
设点 $M(x, y)$, 因为 M 是 BC 的中点, 所以
$$\begin{cases} x = \frac{b+c}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{3}b + \sqrt{3}c}{2} \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} b+c = 2x \\ b-c = -\frac{2y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

将其代入 (*) 得 $\frac{4}{3}y^2 + 12x^2 = 4$, 即 $\frac{y^2}{3} + \frac{x^2}{1} = 1$, 故 M 的轨迹 C_1 为椭圆在上 POQ 内部的部分.

过点 A 作与 y 轴垂直的直线分别交 OP 于点 E , 交 OQ 于点 F , 则 $\triangle OEF$ 显然也是等边三角形.

下面证明等边 $\triangle ABC$ 的重心 G 即等边 $\triangle OEF$ 的外心.

设 $\angle OCB = \theta$, 则 $\angle OBC = 120^\circ - \theta = \angle ACF$, 又 $\angle BOC = \angle CFA = 60^\circ$, 且 $BC = AC$, 所以 $\triangle OBC \cong \triangle FCA$, 因此 $OC = AF$.



的一段线段.故选: C.

【点睛】关键点点睛: 建立适当的坐标系是解决本题的关键.

2. (2024·浙江绍兴·模拟预测) 单位向量 $\vec{a}$, 向量 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} + 2$, 若存在两个均满足此条件的向量

$\vec{b}_1, \vec{b}_2$, 使得 $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \lambda(\vec{b}_2 + \vec{a})$, 设 $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ 在起点为原点时, 终点分别为 A, B_1, B_2 . 则 $S_{\triangle AB_1B_2}$ 的最大值 ()

A. $2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. 4

D. 2

【答案】B

【分析】设 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (x, y)$, 整理得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可知点 B_1, B_2 在椭圆上, 设 B_2 关于点 O 的对称点为

B_3 , 分析可知 A, B_1, B_3 三点共线, 结合椭圆性质分析求解.

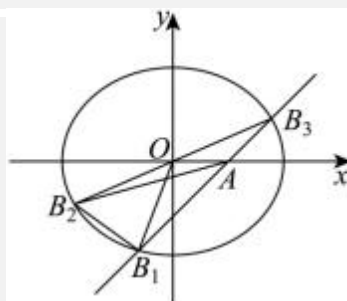
【详解】由题意不妨设 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (x, y)$, 则 $\vec{a} + \vec{b} = (x+1, y)$,

因为 $|\vec{a} + \vec{b}| = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} + 2$, 则 $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \frac{1}{2}x + 2$, 整理得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

可知向量 $\vec{b}$ 的终点 B 的轨迹为椭圆, 且 $A(1, 0)$ 为椭圆的右焦点,

可知点 B_1, B_2 在椭圆上, 设 B_2 关于点 O 的对称点为 B_3 , 因为 $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \lambda(\vec{b}_2 + \vec{a})$, 则 $\vec{b}_1 = (\lambda-1)\vec{b}_2 + \lambda\vec{a}$,

可得 $\vec{OB}_1 = (1-\lambda)\vec{OB}_2 + \lambda\vec{OA}$, 由 $(1-\lambda) + \lambda = 1$ 可知 A, B_1, B_3 三点共线,



设 $B_1(x_1, y_1)$, 因为 O 为线段 B_2B_3 的中点, 则 $S_{\triangle AB_1B_2} = 2S_{\triangle OAB_1} = 2 \times \frac{1}{2} |OA| \cdot |y_1| = |y_1| \leq \sqrt{3}$,

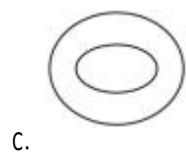
当且仅当 B_1 为短轴顶点时, 等号成立, 所以 $S_{\triangle AB_1B_2}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$. 故选: B.

【点睛】关键点点睛: 本题的关键点有两点:

1. 设 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (x, y)$, 求得向量 $\vec{b}$ 的终点 B 的轨迹为椭圆;

2. 设 B_2 关于点 O 的对称点为 B_3 ，可知 A, B_1, B_3 三点共线.

3. (23-24 高三上·上海·模拟) 设圆 O_1 和圆 O_2 是两个定圆，动圆 P 与这两个定圆都相切，则动圆 P 的圆心的轨迹不可能是 ()



【答案】A

【分析】按动圆 P 与圆 O_1 、圆 O_2 内切、外切情况分类，结合椭圆、双曲线定义确定轨迹的可能情况即得.

【详解】设动圆 P 的半径为 r ，圆 O_1 和圆 O_2 的半径分别是 r_1, r_2 ，

①当 $r_1 = r_2$ ，且两圆外离时， $|O_1O_2| > r_1 + r_2$ ，

若圆 P 与圆 O_1 、圆 O_2 都外切或都内切，则有 $\begin{cases} r + r_1 = |O_1P| \\ r + r_2 = |O_2P| \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r - r_1 = |O_1P| \\ r - r_2 = |O_2P| \end{cases}$ ，

于是 $|O_1P| = |O_2P|$ ，此时点 P 的轨迹是线段 O_1O_2 的中垂线.

若圆 P 与圆 O_1 、圆 O_2 一个外切一个内切，则有 $\begin{cases} r - r_1 = |O_1P| \\ r + r_2 = |O_2P| \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r + r_1 = |O_1P| \\ r - r_2 = |O_2P| \end{cases}$ ，

于是 $||O_1P| - |O_2P|| = r_1 + r_2$ ，此时点 P 的轨迹是双曲线，

因此此时点 P 的轨迹是一条直线和一个双曲线，B 可能；

②当 $r_1 \neq r_2$ ，且两圆内含时(不妨设 $r_1 > r_2$)， $|O_1O_2| < r_1 - r_2 < r_1 + r_2$ ，

若圆 P 与圆 O_1 、圆 O_2 都内切，则有 $\begin{cases} r_1 - r = |O_1P| \\ r - r_2 = |O_2P| \end{cases}$ ，即有 $|O_1P| + |O_2P| = r_1 - r_2$ ，此时 P 点轨迹为椭圆；

若圆 P 与圆 O_1 内切、与圆 O_2 外切时，则有 $\begin{cases} r_1 - r = |O_1P| \\ r + r_2 = |O_2P| \end{cases}$ ，即有 $|O_1P| + |O_2P| = r_1 + r_2$ ，此时 P 点轨迹为椭圆；

因此 P 点轨迹为两个椭圆，C 可能；

③当两圆 $r_1 \neq r_2$ 且两圆外离时(不妨设 $r_1 > r_2$)， $|O_1O_2| > r_1 + r_2 > r_1 - r_2$ ，

若圆 P 与圆 O_1 、圆 O_2 都外切或都内切，则有 $\begin{cases} r + r_1 = |O_1P| \\ r + r_2 = |O_2P| \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r - r_1 = |O_1P| \\ r - r_2 = |O_2P| \end{cases}$ ，

故选：A

【点睛】关键点睛：涉及轨迹形状的判断问题，利用基本轨迹定理、椭圆、双曲线及抛物线定义是求解问题的关键.

4. (23-24 高三·陕西榆林·模拟) 已知点 $N(2,0)$ ，动点 A 在圆 $M: (x+2)^2 + y^2 = 64$ 上运动，线段 AN 的垂直平分线交 AM 于 P 点，则 P 的轨迹方程为_____；若动点 Q 在圆 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 上运动，则 $|PQ|$ 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 6

【分析】由题意得出 $PA = PN$ ，得到点 P 满足 $|PM| + |PN| = 8 > 4$ ，根据椭圆的定义，求得点 P 表示 M, N 为焦点的椭圆，即可求解.

将求 PQ 最大值的问题，转化为求点 P 到圆心 $C(-1, 0)$ 距离最大值的问题，结合点 P 满足椭圆方程，转化为二次函数求给定区间的最大值即可.

【详解】由题意，圆 $(x+2)^2 + y^2 = 64$ 的圆心为 $M(-2,0)$ ，点 $N(2,0)$ ，线段 AN 的垂直平分线交 MA 于点 P ，所以 P 是 AN 的垂直平分线上的一点，所以 $|PA| = |PN|$ ，又由 $|AM| = 8$ ，所以点 P 满足 $|PM| + |PN| = 8 > 4$ ，根据椭圆的定义，可得点 P 表示 M, N 为焦点的椭圆，其中 $2a = 8, 2c = 4$ ，

可得 $a = 4, c = 2$ ，所以 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 12$ ，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Q 圆 C 的方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ ，∴ 圆心 $C(-1,0)$ ，半径 $r = 1$ ，设 $P(x,y)$ ，则 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ，∴ $y^2 = 12 - \frac{3}{4}x^2$ ，

∴ P 到圆心 C 的距离 $|PC| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + 12 - \frac{3}{4}x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(x+4)^2 + 9}$ ，

又 $x \in [-4, 4]$ ：当 $x = 4$ 时， $|PC|$ 取得最大值 5，∴ $|PQ|$ 的最大值为： $|PC|_{\max} + r = 5 + 1 = 6$ ，

故答案为： $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ，

题型三：双曲线定义型

指点迷津

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值等于常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线. 这两个定点做双曲线的焦点, 两焦点间的距离叫做双曲线的焦距.

1. (22-23 高三·江西·阶段练习) 已知点 $A(0, 2\sqrt{2})$ ， $B(2\sqrt{2}, 0)$ ，点 P 为圆 $x^2 + y^2 - 5\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 12 = 0$ 上一

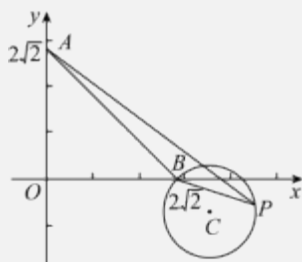
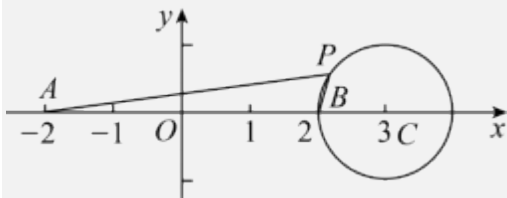
点，则 $|PA|-|PB|$ 的最小值为()

A. 2

B. 4

C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

【答案】D

【分析】 A, B 为两个定点，问题可转化为以 A, B 为焦点的双曲线与圆有交点，由此求 $|PA| - |PB|$ 的最小值.【详解】圆 $C: x^2 + y^2 - 5\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 12 = 0$ ，化成标准方程为 $\left(x - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$ ，圆心 $C\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，半径为 1. 点 $A(0, 2\sqrt{2})$, $B(2\sqrt{2}, 0)$ ，如图所示：由 $k_{AB} = k_{BC} = -1$ ，所以 A, B, C 三点共线，有 $|AB| = 4$ ， $|BC| = 1$.问题可以转化为：已知点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ ，点 P 为圆 $C: (x-3)^2 + y^2 = 1$ 上一点，求 $|PA| - |PB|$ 的最小值，如图所示：设 $|PA| - |PB| = 2a$ ($a > 0$)，则点 P 轨迹为以 A, B 为焦点的双曲线的右支，双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4-a^2} = 1$ ，由点 P 在圆 $C: (x-3)^2 + y^2 = 1$ 上，所以双曲线与圆有交点，由 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4-a^2} = 1 \\ (x-3)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ ，消去 y ，得 $4x^2 - 6a^2x + a^4 + 4a^2 = 0$ ，

$$(x-3)^2 + y^2 = 1$$

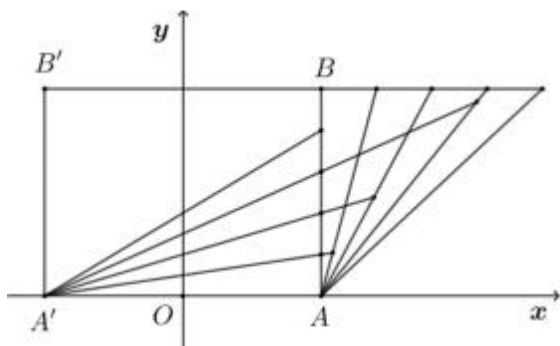
 $\Delta = (-6a^2)^2 - 16(a^4 + 4a^2) = 20a^4 - 64a^2 \geq 0$ ，解得 $a \geq \frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，则 $|PA| - |PB| = 2a \geq \frac{8\sqrt{5}}{5}$ ，所以 $|PA| - |PB|$ 的最小值 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

故选：D

【点睛】1. 求双曲线的标准方程的基本方法是待定系数法. 具体过程是先定形，再定量，即先确定双曲线标准方程的形式，然后再根据 a, b, c, e 及渐近线之间的关系，求出 a, b 的值.

2. 解答曲线与曲线相交的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去 x (或 y)建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系，要强化联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题.

2. (21-22 高三·江苏南通·阶段练习) 在矩形 $ABB'A'$ 中, $A'A = 8$, $AB = 6$, 把边 AB 分成 n 等份, 在 $B'B$ 的延长线上, 以 $B'B$ 的 n 分之一为单位长度连续取点. 过边 AB 上各分点和点 A' 作直线, 过 $B'B$ 延长线上的对应分点和点 A 作直线, 这两条直线的交点为 P , 如图建立平面直角坐标系, 则点 P 满足的方程可能是 ()



A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 (x \geq 4, y \geq 0)$

B. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 (x \geq 8, y \geq 0)$

C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 (x \geq 4, y \geq 0)$

D. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1 (x \geq 8, y \geq 0)$

【答案】C

【分析】设 $P(x_0, y_0)$, 结合题意找出 x_0 与 y_0 的关系式, 即可求解.

【详解】设 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0 \geq 4$, $y_0 \geq 0$, 根据题意, 易得直线 $l_{A'P}: y = \frac{y_0}{x_0 + 4}(x + 4)$, 直线

$$l_{AP}: y = \frac{y_0}{x_0 - 4}(x - 4).$$

由 $l_{A'P}: y = \frac{y_0}{x_0 + 4}(x + 4)$, 令 $x = 4$, 得 $y = \frac{8y_0}{x_0 + 4}$, 因此边 AB 上各分点坐标为 $\left(4, \frac{8y_0}{x_0 + 4}\right)$,

由 $l_{AP}: y = \frac{y_0}{x_0 - 4}(x - 4)$, 令 $y = 6$, 得 $x = \frac{6(x_0 - 4)}{y_0} + 4$, 因此 $B'B$ 延长线上的对应分点坐标为

$$\left(\frac{6(x_0 - 4)}{y_0} + 4, 6\right),$$

结合题意, 可知 $\frac{\frac{6(x_0 - 4)}{y_0}}{8} = \frac{\frac{8y_0}{x_0 + 4}}{6}$, 化简得 $\frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1$.

因此点 P 满足的方程为: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 (x \geq 4, y \geq 0)$.

故选: C.

3. (2018 高三上·全国·专题练习) 已知定点 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, N 是圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上任意一点, 点 F_1 关于点 N 的对称点为 M , 线段 F_1M 的中垂线与直线 F_2M 相交于点 P , 则点 P 的轨迹是

A. 直线

B. 圆

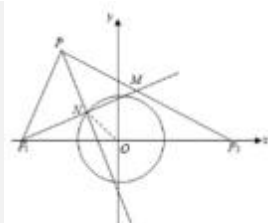
C. 椭圆

D. 双曲线

【答案】D

【分析】由 N 是圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上任意一点, 可得 $ON = 1$, 结合已知, 由垂直平分线的性质可得 $PM = PF_1$, 从而可得 $|PF_2 - PF_1| = |PF_2 - PM| = MF_2 = 2ON = 2$ 为定值, 由双曲线的定义可得点 P 的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的双曲线.

【详解】



因为 N 为 F_1M 中点, O 为 F_1F_2 中点, 所以 $|F_2M| = 2ON = 2$,

因为 P 在线段 F_1M 的中垂线上, 所以 $|PF_1| = |PM|$, 因此 $||PF_1| - |PF_2|| = |F_2M| = 2|ON| = 2$, 即点 P 的轨迹是双曲线, 故选 D.

【点睛】本题主要考查定义法求轨迹方程、双曲线定义的应用, 属于难题. 求轨迹方程的常见方法有: ①直接法, 设出动点的坐标 (x, y) , 根据题意列出关于 x, y 的等式即可; ②定义法, 根据题意动点符合已知曲线的定义, 直接求出方程; ③参数法, 把 x, y 分别用第三个变量表示, 消去参数即可; ④迭代法, 将 $\begin{cases} x_0 = g(x) \\ y_0 = h(x) \end{cases}$ 代入 $f(x_0, y_0) = 0$.

4. (20-21 高三·湖北武汉·模拟) 在平面直角坐标系 xOy 中, 动点 P 与两个定点 $F_1(\sqrt{3}, 0)$ 和 $F_2(\sqrt{3}, 0)$ 连线的斜率之积等于 $\frac{1}{3}$, 记点 P 的轨迹为曲线 E , 直线 $l: y = k(x - 2)$ 与 E 交于 A, B 两点, 则()

A. E 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

B. E 的离心率为 $\sqrt{3}$

C. E 的渐近线与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 相切

D. 满足 $|AB| = 2\sqrt{3}$ 的直线 l 有 2 条

【答案】CD

【解析】由已知结合斜率的两点式有 $\frac{y}{x + \sqrt{3}} \cdot \frac{y}{x - \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$, 即可得 E 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1, x \neq \pm\sqrt{3}$, 进而可求 E 的离心率, 利用圆心到 E 的渐近线距离判断圆与 E 的渐近线的位置关系, 联立直线 l 与曲线 E , 结合 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$ 求 k 值的个数, 由此即可判断各选项的正误.

【详解】令 $P(x, y)$, 由题意得: $\frac{y}{x + \sqrt{3}} \cdot \frac{y}{x - \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$, 即得 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1, x \neq \pm\sqrt{3}$,

$\therefore$ A 错误, 又 $a = \sqrt{3}, c = 2$, 即 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 B 错误,

由 E 的渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 而 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 圆心为 $(2, 0)$, 半径为 1,

$\therefore (2,0)$ 到 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 距离为 $d = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = 1$ ，故 E 的渐近线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 相切，故 **C** 正确，

联立曲线 E 与直线 l 的方程，整理得： $(1-3k^2)x^2 + 12k^2x - 3(4k^2+1) = 0$ ， $\Delta = 1+k^2 > 0$ ，

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{3k^2-1}$ ， $x_1x_2 = \frac{3(4k^2+1)}{3k^2-1}$ ，而 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = 2\sqrt{3}$ ，

代入整理： $|AB| = \frac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{|3k^2-1|} = 2\sqrt{3}$ ，即有 $k^2 = 1$ 或 $k^2 = 0$ (由 $y = 0$ 与 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, $x \neq \pm\sqrt{3}$ 无交点，舍去)，故

$k = \pm 1$ ，**:D** 正确.故选：**CD**

【点睛】易错点晴：

(1) 两点式表示斜率时要保证分母不为 0，从而确定曲线 E 的轨迹要去掉 $x \neq \pm\sqrt{3}$ 。

(2) 由 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = 2\sqrt{3}$ 求得 k 值要考虑曲线 E 的轨迹不包含 $x \neq \pm\sqrt{3}$ 的情况舍掉增根。

5. (24-25 高三·全国·模拟) 过曲线 C 上一点 P 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线，切点分别为 A, B ，若 $k_{PA} \cdot k_{PB} = 2$ ，则曲线 C 的方程为_____。

【答案】 $2x^2 - y^2 = 1$ ($x^2 > \frac{2}{3}$ 且 $x^2 \neq 1$)

【分析】设 P 及切线方程，由直线与圆相切得出关于斜率 k 的方程，由判别式得出 $x_0^2 + y_0^2 > 1$ ，再由斜率关系计算即可。

【详解】设 $p(x_0, y_0)$ ，则过点 P 的切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$ ，即 $kx - y + y_0 - kx_0 = 0$ ，

所以 $\frac{|y_0 - kx_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$ ，得 $(x_0^2 - 1)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0$ ，

则 k_{PA}, k_{PB} 是此方程的两根， $x_0^2 - 1 \neq 0$ ， $\Delta = 4x_0^2y_0^2 - 4(x_0^2 - 1)(y_0^2 - 1) > 0$ ，即 $x_0^2 + y_0^2 > 1$ ，

故 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 1} = 2$ ，得 $2x_0^2 - y_0^2 = 1$ ，而满足题意需 P 在圆外，则 $x_0^2 > \frac{2}{3}$ ，

即曲线 C 的方程为 $2x^2 - y^2 = 1$ ($x^2 > \frac{2}{3}$ 且 $x^2 \neq 1$)。

故答案为： $2x^2 - y^2 = 1$ ($x^2 > \frac{2}{3}$ 且 $x^2 \neq 1$)

题型四：抛物线定义型

指点迷津

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l (l 不经过点 F) 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线. 点 F 叫做抛物线的焦点, 直线 l 叫做抛物线的准线.

1. (21-22 高三下·浙江·阶段练习) 已知点 $F(0, 1)$, 直线 $l: y = -1$, P 为平面上的动点, 过点 P 作直线 l 的垂线, 垂足为 Q , 且 $|PF| = |PQ|$, 动点 P 的轨迹为 C , 已知圆 M 过定点 $D(0, 2)$, 圆心 M 在轨迹 C 上运动, 且圆 M 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 设 $|DA| = l_1$, $|DB| = l_2$, 则 $\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1}$ 的最大值为 ()
- A. 2 B. 3 C. $2\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2}$

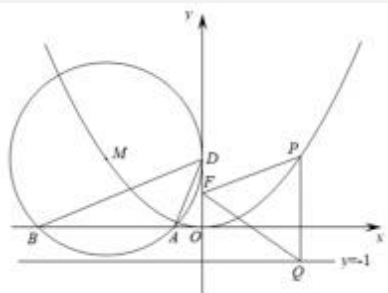
【答案】C

【分析】利用数量积运算可得动点 P 的轨迹 C 方程, 设 $M\left(a, \frac{a^2}{4}\right)$ 进而得到 $\odot M$ 的方程为:

$$(x-a)^2 + \left(y - \frac{a^2}{4}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 2\right)^2, \text{ 可得 } A(a+2, 0), B(a-2, 0), \text{ 利用两点之间的距离公式可得,}$$

$$\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1 l_2} = \frac{2a^2 + 16}{\sqrt{a^4 + 64}}, \text{ 再利用基本不等式即可得出.}$$

【详解】设 $P(x, y)$, 则 $Q(x, -1)$,



$\therefore$ 动点 P 的轨迹 C 为: $x^2 = 4y$. 设 $M\left(a, \frac{a^2}{4}\right)$. ($a \in \mathbb{R}$). 则 $\odot M$ 的方程为: $(x-a)^2 + \left(y - \frac{a^2}{4}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 2\right)^2$.

化为 $x^2 - 2ax + y^2 - \frac{a^2}{2}y = 4 - a^2$. 令 $y = 0$, 则 $x^2 - 2ax + a^2 = 4$, 解得 $x = a+2$, 或 $a-2$.

取 $A(a+2, 0)$, $B(a-2, 0)$. $\therefore |DA| = l_1 = \sqrt{(a+2)^2 + 4}$, $|DB| = l_2 = \sqrt{(a-2)^2 + 4}$. 当 $a \neq 0$ 时,

$$\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1 l_2} = \frac{2a^2 + 16}{\sqrt{a^4 + 64}} = 2\sqrt{\frac{(a^2 + 8)^2}{a^4 + 64}} = 2\sqrt{1 + \frac{16a^2}{a^4 + 64}} = 2\sqrt{1 + \frac{16}{a^2 + \frac{64}{a^2}}} \leq 2\sqrt{1 + \frac{16}{2\sqrt{a^2 \cdot \frac{64}{a^2}}}} = 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当}$$

$a = \pm 2$ 时取等号. 当 $a = 0$ 时, $\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1} = 2$. 综上所述可得: $\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$. 故选: C.