

新疆维吾尔自治区生产建设兵团第七师高级中学 2024 年数学高三上期末综合测试模拟  
试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z$  满足  $\frac{1}{z} = 1 + i$ ，则  $|z|$  的值为（ ）

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D. 2

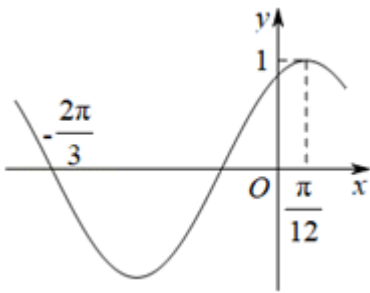
2. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $a_2 = -2$ ， $a_8 = 10$ ，则  $S_9 =$ （ ）

- A. 45                      B. 42                      C. 25                      D. 36

3. 已知椭圆  $C$  的中心为原点  $O$ ， $F(-2\sqrt{5}, 0)$  为  $C$  的左焦点， $P$  为  $C$  上一点，满足  $|OP| = |OF|$  且  $|PF| = 4$ ，则椭圆  $C$  的方程为（ ）

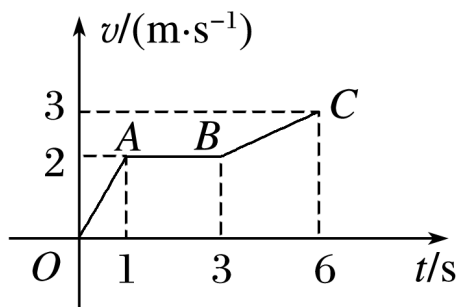
- A.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$       B.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$       C.  $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{10} = 1$       D.  $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{25} = 1$

4. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示，则  $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$ （ ）



- A.  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$                       B.  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$                       C.  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$                       D.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

5. 一物体作变速直线运动，其  $v-t$  曲线如图所示，则该物体在  $\frac{1}{2}\text{s} \sim 6\text{s}$  间的运动路程为（ ） $m$ 。



- A. 1                      B.  $\frac{4}{3}$                       C.  $\frac{49}{4}$                       D. 2

6. 设集合  $A = \{x | x > 0\}$ ,  $B = \{x | \log_2(3x-1) < 2\}$ , 则 ( ).

A.  $A \cap B = \left(0, \frac{5}{3}\right)$                       B.  $A \cap B = \left(0, \frac{1}{3}\right]$

C.  $A \cup B = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$                       D.  $A \cup B = (0, +\infty)$

7. 已知  $f(x+2)$  是偶函数,  $f(x)$  在  $(-\infty, 2]$  上单调递减,  $f(0) = 0$ , 则  $f(2-3x) > 0$  的解集是

- A.  $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$                       B.  $(\frac{2}{3}, 2)$   
C.  $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$                       D.  $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$

8. 设抛物线  $y^2 = 4x$  上一点  $P$  到  $y$  轴的距离为  $d_1$ , 到直线  $l: 3x + 4y + 12 = 0$  的距离为  $d_2$ , 则  $d_1 + d_2$  的最小值为 ( )

- A. 2                      B.  $\frac{15}{3}$                       C.  $\frac{16}{3}$                       D. 3

9. 已知抛物线  $C: x^2 = 8y$ , 点  $P$  为  $C$  上一点, 过点  $P$  作  $PQ \perp x$  轴于点  $Q$ , 又知点  $A(5, 2)$ , 则  $|PQ| + |PA|$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{13}{2}$                       B.  $4\sqrt{10} - 2$                       C. 3                      D. 5

10. 已知  $i$  为虚数单位, 实数  $x, y$  满足  $(x+2i)i = y-i$ , 则  $|x-yi| =$  ( )

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D.  $\sqrt{5}$

11. 已知  $x=0$  是函数  $f(x) = x(ax - \tan x)$  的极大值点, 则  $a$  的取值范围是

- A.  $(-\infty, -1)$                       B.  $(-\infty, 1]$   
C.  $[0, +\infty)$                       D.  $[1, +\infty)$

12. 抛物线  $x^2 = 3ay$  的准线方程是  $y = 1$ , 则实数  $a =$  ( )

- A.  $-\frac{3}{4}$       B.  $\frac{3}{4}$       C.  $-\frac{4}{3}$       D.  $\frac{4}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} 1 \leq x+y \leq 3 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases}$ ，则  $2x+y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

14. 甲、乙两队参加关于“一带一路”知识竞赛，甲队有编号为 1, 2, 3 的三名运动员，乙队有编号为 1, 2, 3, 4 的四名运动员，若两队各出一名队员进行比赛，则出场的两名运动员编号相同的概率为\_\_\_\_\_.

15. 某部队在训练之余，由同一场地训练的甲、乙、丙三队各出三人，组成  $3 \times 3$  小方阵开展游戏，则来自同一队的战士既不在同一行，也不在同一列的概率为\_\_\_\_\_.

16. 设随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(2, 9)$ ，若  $P(\xi > c) = P(\xi < c+2)$ ，则  $c$  的值是\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数  $f(x) = x^2 - a \ln x, a \in \mathbb{R}$ .

(1) 若  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极值，求  $a$  的值；

(2) 求  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上的最小值；

(3) 在 (1) 的条件下，若  $h(x) = x^2 - f(x)$ ，求证：当  $1 < x < e^2$  时，恒有  $x < \frac{4+h(x)}{4-h(x)}$  成立.

18. (12 分) 在平面直角坐标系中，以原点为极点， $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系，并在两坐标系中取相同的长度单位. 已知曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 2\cos \theta$ ，直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = -1 + t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数， $\alpha$  为直线的倾斜角).

(1) 写出直线  $l$  的普通方程和曲线  $C$  的直角坐标方程；

(2) 若直线  $l$  与曲线  $C$  有唯一的公共点，求角  $\alpha$  的大小.

19. (12 分) 已知  $O$  为坐标原点，点  $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ ， $F_2(\sqrt{2}, 0)$ ， $S(3\sqrt{2}, 0)$ ，动点  $N$  满足  $|NF_1| + |NS| = 4\sqrt{3}$ ，点  $P$  为线段  $NF_1$  的中点，抛物线  $C: x^2 = 2my (m > 0)$  上点  $A$  的纵坐标为  $\sqrt{6}$ ， $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OS} = 6\sqrt{6}$ .

(1) 求动点  $P$  的轨迹曲线  $W$  的标准方程及抛物线  $C$  的标准方程；

(2) 若抛物线  $C$  的准线上一点  $Q$  满足  $OP \perp OQ$ ，试判断  $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}$  是否为定值，若是，求这个定值；若不是，

请说明理由.

20. (12 分) 对于很多人来说，提前消费的认识首先是源于信用卡，在那个工资不高的年代，信用卡绝对是神器，稍微大件的东西都是可以选择用信用卡来买，甚至于分期买，然后慢慢还！现在银行贷款也是很风靡的，从房贷到车贷到一般的现金贷。信用卡“忽如一夜春风来”，遍布了各大小城市的大街小巷。为了解信用卡在  $A$

市的使用情况，某调查机构借助网络进行了问卷调查，并从参与调查的网友中随机抽取了 100 人进行抽样分析，得到如下  $2 \times 2$  列联表（单位：人）

|         | 经常使用信用卡 | 偶尔或不用信用卡 | 合计  |
|---------|---------|----------|-----|
| 40 岁及以下 | 15      | 35       | 50  |
| 40 岁以上  | 20      | 30       | 50  |
| 合计      | 35      | 65       | 100 |

- （1）根据以上数据，能否在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为 A 市使用信用卡情况与年龄有关？
- （2）①现从所抽取的 40 岁及以下的网民中，按“经常使用”与“偶尔或不用”这两种类型进行分层抽样抽取 10 人，然后，再从这 10 人中随机选出 4 人赠送积分，求选出的 4 人中至少有 3 人偶尔或不用信用卡的概率；
- ②将频率视为概率，从 A 市所有参与调查的 40 岁以上的网民中随机抽取 3 人赠送礼品，记其中经常使用信用卡的人数为  $X$ ，求随机变量  $X$  的分布列、数学期望和方差.

参考公式：  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中  $n = a + b + c + d$ .

参考数据：

| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.15  | 0.10  | 0.05  | 0.025 | 0.010 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $k_0$             | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 |

21.（12 分）已知  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  所对边分别是  $a, b, c$ , 其中  $a = 2, c = \sqrt{3}$ .

- （1）若角  $A$  为锐角，且  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，求  $\sin B$  的值；
- （2）设  $f(C) = \sqrt{3} \sin C \cos C + 3 \cos^2 C$ ，求  $f(C)$  的取值范围.

22.（10 分）已知函数  $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + bx$ ，函数  $f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线斜率为 0.

- （1）试用含有  $a$  的式子表示  $b$ ，并讨论  $f(x)$  的单调性；
- （2）对于函数  $f(x)$  图象上的不同两点  $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，如果在函数  $f(x)$  图象上存在点  $M(x_0, y_0) (x_0 \in (x_1, x_2))$ ，使得在点  $M$  处的切线  $l \parallel AB$ ，则称  $AB$  存在“跟随切线”.特别地，当  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  时，又称  $AB$  存在“中值跟随切线”.试问：函数  $f(x)$  上是否存在两点  $A, B$  使得它存在“中值跟随切线”，若存在，求出  $A, B$

的坐标，若不存在，说明理由.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由复数的除法运算整理已知求得复数  $z$ ，进而求得其模.

【详解】

$$\text{因为 } \frac{1}{z} = 1+i \Rightarrow z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \text{ 所以 } |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

故选：C

【点睛】

本题考查复数的除法运算与求复数的模，属于基础题.

2、D

【解析】

由等差数列的性质可知  $a_1 + a_9 = a_2 + a_8$ ，进而代入等差数列的前  $n$  项和的公式即可.

【详解】

$$\text{由题, } S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(a_2 + a_8)}{2} = \frac{9 \times (-2 + 10)}{2} = 36.$$

故选:D

【点睛】

本题考查等差数列的性质,考查等差数列的前  $n$  项和.

3、B

【解析】

由题意可得  $c = 2\sqrt{5}$ ，设右焦点为  $F'$ ，由  $|OP| = |OF| = |OF'|$  知，

$$\angle PFF' = \angle FPO, \angle OF'P = \angle OPF',$$

$$\text{所以 } \angle PFF' + \angle OF'P = \angle FPO + \angle OPF',$$

由 $\angle PFF' + \angle OF'P + \angle FPO + \angle OPF' = 180^\circ$ 知,

$\angle FPO + \angle OPF' = 90^\circ$ , 即  $PF \perp PF'$ .

在  $Rt\triangle PFF'$  中, 由勾股定理, 得  $|PF'| = \sqrt{FF'^2 - PF^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = 8$ ,

由椭圆定义, 得  $|PF| + |PF'| = 2a = 4 + 8 = 12$ , 从而  $a = 6$ , 得  $a^2 = 36$ ,

于是  $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - (2\sqrt{5})^2 = 16$ ,

所以椭圆的方程为  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

故选 B.

点睛: 椭圆的定义: 到两定点距离之和为常数的点的轨迹, 当和大于两定点间的距离时, 轨迹是椭圆, 当和等于两定点间的距离时, 轨迹是线段 (两定点间的连线段), 当和小于两定点间的距离时, 轨迹不存在.

4、A

【解析】

先利用最高点纵坐标求出  $A$ , 再根据  $\frac{3T}{4} = \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$  求出周期, 再将  $\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$  代入求出  $\varphi$  的值. 最后将  $\frac{3\pi}{8}$  代入解析

式即可.

【详解】

由图象可知  $A = 1$ ,

$\therefore \frac{3T}{4} = \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ , 所以  $T = \pi$ ,  $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ .

$\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi)$ , 将  $\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$  代入得  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1$ ,

$\therefore \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 结合  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ,  $\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$ .

$\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

$\therefore f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12} = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= -\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ .

故选: A.

【点睛】

本题考查三角函数的据图求式问题以及三角函数的公式变换.据图求式问题要注意结合五点法作图求解.属于中档题.

5、C

【解析】

由图像用分段函数表示  $v(t)$ ，该物体在  $\frac{1}{2}$ s~6s 间的运动路程可用定积分  $s = \int_{\frac{1}{2}}^6 v(t)dt$  表示，计算即得解

【详解】

由题中图像可得，

$$v(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3}t + 1, & 3 < t \leq 6 \end{cases}$$

由变速直线运动的路程公式，可得

$$\begin{aligned} s &= \int_{\frac{1}{2}}^6 v(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 2t dt + \int_1^3 2 dt + \int_3^6 \left(\frac{1}{3}t + 1\right) dt \\ &= t^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + 2t \Big|_1^3 + \left(\frac{1}{6}t^2 + t\right) \Big|_3^6 = \frac{49}{4} \text{ (m)}. \end{aligned}$$

所以物体在  $\frac{1}{2}$ s~6s 间的运动路程是  $\frac{49}{4}$  m .

故选：C

【点睛】

本题考查了定积分的实际应用，考查了学生转化划归，数形结合，数学运算的能力，属于中档题.

6、D

【解析】

根据题意，求出集合 A，进而求出集合  $A \cup B$  和  $A \cap B$ ，分析选项即可得到答案.

【详解】

根据题意， $B = \{x \mid \log_2(3x-1) < 2\} = \left\{x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\right\}$

则  $A \cup B = (0, +\infty)$ ,  $A \cap B = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

故选：D

【点睛】

此题考查集合的交并集运算，属于简单题目，

7、D

【解析】

先由  $f(x+2)$  是偶函数，得到  $f(x)$  关于直线  $x=2$  对称；进而得出  $f(x)$  单调性，再分别讨论  $2-3x \geq 2$  和  $2-3x < 2$ ，即可求出结果.

【详解】

因为  $f(x+2)$  是偶函数，所以  $f(x)$  关于直线  $x=2$  对称；

因此，由  $f(0)=0$  得  $f(4)=0$ ；

又  $f(x)$  在  $(-\infty, 2]$  上单调递减，则  $f(x)$  在  $[2, +\infty)$  上单调递增；

所以，当  $2-3x \geq 2$  即  $x \leq 0$  时，由  $f(2-3x) > 0$  得  $f(2-3x) > f(4)$ ，所以  $2-3x > 4$ ，

解得  $x < -\frac{2}{3}$ ；

当  $2-3x < 2$  即  $x > 0$  时，由  $f(2-3x) > 0$  得  $f(2-3x) > f(0)$ ，所以  $2-3x < 0$ ，

解得  $x > \frac{2}{3}$ ；

因此， $f(2-3x) > 0$  的解集是  $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$ .

【点睛】

本题主要考查由函数的性质解对应不等式，熟记函数的奇偶性、对称性、单调性等性质即可，属于常考题型.

8、A

【解析】

分析：题设的直线与抛物线是相离的， $d_1 + d_2$  可以化成  $d_1 + 1 + d_2 - 1$ ，其中  $d_1 + 1$  是点  $P$  到准线的距离，也就是  $P$  到焦点的距离，这样我们从几何意义得到  $d_1 + 1 + d_2$  的最小值，从而得到  $d_1 + d_2$  的最小值.

详解：由  $\begin{cases} y^2 = 4x \\ 3x + 4y + 12 = 0 \end{cases}$  ①得到  $3y^2 + 16y + 48 = 0$ ， $\Delta = 256 - 12 \times 48 < 0$ ，故①无解，

所以直线  $3x + 4y + 12 = 0$  与抛物线是相离的.

由  $d_1 + d_2 = d_1 + 1 + d_2 - 1$ ，

而  $d_1 + 1$  为  $P$  到准线  $x = -1$  的距离，故  $d_1 + 1$  为  $P$  到焦点  $F(1, 0)$  的距离，

从而  $d_1 + 1 + d_2$  的最小值为  $F$  到直线  $3x + 4y + 12 = 0$  的距离  $\frac{|1 \times 3 + 0 \times 4 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$ ,

故  $d_1 + d_2$  的最小值为 2, 故选 A.

点睛: 抛物线中与线段的长度相关的最值问题, 可利用抛物线的几何性质把动线段的长度转化为到准线或焦点的距离来求解.

9、C

【解析】

由  $|PQ| = |PF| - 2$ , 再运用  $P, F, A$  三点共线时和最小, 即可求解.

【详解】

$$|PQ| + |PA| = |PF| - 2 + |PA| \geq |FA| - 2 = 5 - 2 = 3.$$

故选: C

【点睛】

本题考查抛物线的定义, 合理转化是本题的关键, 注意抛物线的性质的灵活运用, 属于中档题.

10、D

【解析】

$$\mathbf{Q}(x + 2i)i = y - i, \therefore -2 + xi = y - i, \therefore \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases},$$

$$\text{则 } |x - yi| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}.$$

故选 D.

11、B

【解析】

方法一: 令  $g(x) = ax - \tan x$ , 则  $f(x) = x \cdot g(x)$ ,  $g'(x) = a - \frac{1}{\cos^2 x}$ ,

当  $a \leq 1$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  时,  $g'(x) \leq 0$ ,  $g(x)$  单调递减,

$\therefore x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  时,  $g(x) > g(0) = 0$ ,  $f(x) = x \cdot g(x) < 0$ , 且  $f'(x) = xg'(x) + g(x) > 0$ ,

$\therefore f'(x) > 0$ , 即  $f(x)$  在  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  上单调递增,

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $g(x) < g(0) = 0$ ,  $f(x) = x \cdot g(x) < 0$ , 且  $f'(x) = xg'(x) + g(x) < 0$ ,

$\therefore f'(x) < 0$ , 即  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递减,  $\therefore x = 0$  是函数  $f(x)$  的极大值点,  $\therefore a \leq 1$  满足题意;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/025213321012011131>