

2022-2023 学年第一学期期末质量检测试题

高三数学 2023.1

注意事项:

1. 本试卷共 4 页, 共 22 题, 满分 150 分, 考试用时 120 分钟.
2. 答卷前, 考生务必将自己的学校, 班级和姓名填在答题卡上, 正确粘贴条形码.
3. 作答选择题时, 用 2B 铅笔在答题卡上将对应答案的选项涂黑.
4. 非选择题的答案写在答题卡各题目指定区域内相应位置上, 不准使用铅笔和涂改液.
5. 考试结束后, 考生上交答题卡.

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x - y = 0\}$, $B = \{(x, y) | x + y + 1 = 0\}$, 则 $A \cap B$ 的子集个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 无穷多个

【答案】C

【解析】

【分析】由题知 $A \cap B = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$, 再求子集个数即可.

【详解】解: 因为集合 $A = \{(x, y) | x - y = 0\}$, $B = \{(x, y) | x + y + 1 = 0\}$,

$$\text{由 } \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

所以 $A \cap B = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$, 只有一个元素,

所以, $A \cap B$ 的子集个数为 2.

故选: C

2. 已知复数 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $\omega^2 =$ ()

- A. $\bar{\omega}$ B. $-\omega$
C. $\omega - 1$ D. $\omega + 1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的运算可得答案.

【详解】因为 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 所以 $\omega^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{\omega}$,

故选: A

3. 已知向量 $\vec{a} = (2, k)$, $\vec{b} = (2, 4)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = (\quad)$

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】先根据条件求出 k , 再用坐标公式法计算模.

【详解】 $\because \vec{a} \perp \vec{b}, \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, 4 + 4k = 0, k = -1$, $\vec{a} + \vec{b} = (4, 3), |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$;

故选: B

4. 某科技企业为抓住“一带一路”带来的发展机遇, 开发生产一智能产品, 该产品每年的固定成本是 25 万元,

每生产 x 万件该产品, 需另投入成本 $\omega(x)$ 万元. 其中 $\omega(x) = \begin{cases} x^2 + 10x, & 0 < x \leq 40 \\ 71x + \frac{10000}{x} - 945, & x > 40 \end{cases}$, 若该公司一年内

生产该产品全部售完, 每件的售价为 70 元, 则该企业每年利润的最大值为 ()

A. 720 万元

B. 800 万元

C. 875 万元

D. 900 万元

【答案】C

【解析】

【分析】先求得该企业每年利润的解析式, 再利用分段函数求最值的方法即可求得该企业每年利润的最大值.

【详解】该企业每年利润为 $f(x) = \begin{cases} 70x - (x^2 + 10x + 25), & 0 < x \leq 40 \\ 70x - \left(71x + \frac{10000}{x} - 945 + 25\right), & x > 40 \end{cases}$

当 $0 < x \leq 40$ 时, $f(x) = -x^2 + 60x - 25 = -(x - 30)^2 + 875$

在 $x = 30$ 时, $f(x)$ 取得最大值 875;

当 $x > 40$ 时, $f(x) = 920 - \left(x + \frac{10000}{x}\right) \leq 920 - 2\sqrt{x \cdot \frac{10000}{x}} = 720$

(当且仅当 $x=100$ 时等号成立), 即在 $x=100$ 时, $f(x)$ 取得最大值 720;

由 $875 > 720$, 可得该企业每年利润的最大值为 875.

故选: C

5. 圆 $O_1: x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$ 与圆 $O_2: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ 公共弦长为 ()

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{5}$

D. $3\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】两圆的一般方程相减得到公共弦所在直线的方程, 求出圆 O_1 的圆心到公共弦的距离, 再由公共弦长公式 $d = 2\sqrt{r^2 - d_1^2}$ 求出答案即可.

【详解】联立两个圆的方程
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \end{cases},$$

两式相减可得公共弦方程 $x - 2y - 1 = 0$,

圆 $O_1: x^2 + (y - 2)^2 = 10$ 的圆心坐标为 $O_1(0, 2)$, 半径为 $r = \sqrt{10}$,

圆心 $O_1(0, 2)$ 到公共弦的距离为 $d_1 = \frac{|0 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5}$,

公共弦长为 $d = 2\sqrt{r^2 - d_1^2} = 2\sqrt{10 - 5} = 2\sqrt{5}$.

故选: C.

6. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程是 ()

A. $2x - y - 2 = 0$

B. $4x - y - 4 = 0$

C. $2x + y - 2 = 0$

D. $4x + y - 4 = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】先求得曲线 $y = f(x)$ 在 $x > 0$ 时的解析式, 再利用导数几何意义即可求得曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程.

【详解】设 $x > 0$, 则 $-x < 0$, 由 $f(x)$ 为偶函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - x$,

可得 $f(x) = f(-x) = (-x)^3 - (-x) = x - x^3$, 则 $f'(x) = 1 - 3x^2$,

则 $f'(1) = 1 - 3 = -2$,

则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程是 $y = -2(x - 1)$, 即 $2x + y - 2 = 0$

故选: C

7. 某批产品来自 A, B 两条生产线, A 生产线占 60%, 次品率为 4%; B 生产线占 40%, 次品率为 5%, 现随机抽取一件进行检测, 若抽到的是次品, 则它来自 A 生产线的概率是 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{6}{11}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{9}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件, 利用全概率公式及贝叶斯公式求解作答.

【详解】因为抽到的次品可能来自于 A, B 两条生产线, 设 $A =$ “抽到的产品来自 A 生产线”,

$B =$ “抽到的产品来自 B 生产线”, $C =$ “抽到的一件产品是次品”,

则 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.4, P(C|A) = 0.04, P(C|B) = 0.05$,

由全概率公式得 $P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) = 0.6 \times 0.04 + 0.4 \times 0.05 = 0.044$,

所以它来自 A 生产线的概率是 $P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C|A)}{P(C)} = \frac{0.6 \times 0.04}{0.044} = \frac{6}{11}$.

故选: B

8. 正四面体 $S-ABC$ 中, M 是侧棱 SA 上 (端点除外) 的一点, 若异面直线 MB 与直线 AC 所成的角为 α , 直线 MB 与平面 ABC 所成的角为 β , 二面角 $M-BC-A$ 的平面角为 γ , 则 ()

A. $\alpha < \beta < \gamma$

B. $\beta < \alpha < \gamma$

C. $\beta < \gamma < \alpha$

D. $\gamma < \alpha < \beta$

【答案】C

【解析】

【分析】先在正四面体 $S-ABC$ 中, 作出 α 、 β 、 γ 对应的角, 再比较三者间的大小关系即可解决.

【详解】正四面体 $S-ABC$ 中, 取 BC 中点 D , 连接 AD , MD , SD

过 M 作 $MH \perp AD$ 于 H , 连接 HB , MB ,

过 M 作 AC 的平行线交 SC 于 N , 则 $\angle BMN = \alpha$,

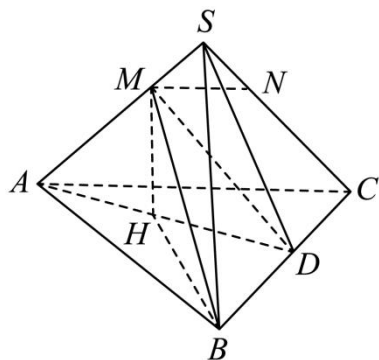
由 $SD \perp BC$ ， $AD \perp BC$ ， $SD \cap AD = D$ ， $SD \subset$ 平面 SAD ， $AD \subset$ 平面 SAD

可得 $BC \perp$ 平面 SAD ，则 $MD \perp BC$ ，则 $\angle MDH = \gamma$

由 $BC \perp$ 平面 SAD ，可得平面 $ABC \perp$ 平面 SAD ，

又平面 $ABC \cap$ 平面 $SAD = AD$ ， $MH \subset$ 平面 SAD ， $MH \perp AD$ ，

则 $MH \perp$ 平面 ABC ，则 $\angle MBH = \beta$ ，



因为 $\sin \beta = \frac{MH}{MB} < \frac{MH}{MD} = \sin \gamma$ ，且 $\beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，所以 $\beta < \gamma$ 。

设正四面体边长为 1， $AM = \lambda (0 < \lambda < 1)$ ，有 $SM = MN = 1 - \lambda$ 。

$$\cos \alpha = \frac{MN}{BM} = \frac{1 - \lambda}{BM}, \quad \cos \gamma = \frac{HD}{MD} > \frac{HD}{BM}$$

$$\text{因为 } HD = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda > \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \lambda) > \frac{1 - \lambda}{2} = \frac{MN}{2}$$

所以 $\cos \gamma > \cos \alpha$ ，又 $\alpha, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，则 $\gamma < \alpha$

综上： $\beta < \gamma < \alpha$

故选：C

【点睛】(1)求直线与平面所成的角的一般步骤：

①找直线与平面所成的角，即通过找直线在平面上的射影来完成；

②计算，要把直线与平面所成的角转化到一个三角形中求解。

(2)作二面角的平面角可以通过垂线法进行，在一个半平面内找一点作另一个半平面的垂线，再过垂足作二面角的棱的垂线，两条垂线确定的平面和二面角的棱垂直，由此可得二面角的平面角。

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，前 n 项和为 S_n ，且 $q \neq -1$ ，以下结论正确的是（ ）

A. $\{a_n^2\}$ 是等比数列

B. 数列 $a_{11} + a_{12}$ ， $a_{12} + a_{13}$ ， $a_{13} + a_{14}$ 成等比数列

C. 若 $q > 1$ ，则 $\{a_n\}$ 是递增数列

D. 若 $q > 0$ ，则 $\{S_n\}$ 是递增数列

【答案】AB

【解析】

【分析】先将 $\{a_n\}$ 的通项公式写出，再按照有关定义逐项分析.

【详解】由题意， $a_n = a_1 q^{n-1}$ ， $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ ；

对于 A， $a_n^2 = a_1^2 (q^2)^{n-1}$ ，所以 $\{a_n^2\}$ 是首项为 a_1^2 ，公比为 q^2 的等比数列，正确；

对于 B，因为 $q \neq -1$ ，

$$a_{11} + a_{12} = a_1 q^{10} + a_1 q^{11} = a_1 q^{10} (1+q), a_{12} + a_{13} = a_1 q^{11} (1+q), a_{13} + a_{14} = a_1 q^{12} (1+q),$$

$$(a_{12} + a_{13})^2 = a_1^2 q^{22} (1+q)^2, (a_{11} + a_{12})(a_{13} + a_{14}) = a_1^2 q^{22} (1+q)^2,$$

$$\therefore (a_{12} + a_{13})^2 = (a_{11} + a_{12})(a_{13} + a_{14}) \neq 0, \frac{a_{12} + a_{13}}{a_{11} + a_{12}} = \frac{a_{13} + a_{14}}{a_{12} + a_{13}}, \text{它们成等比数列, 正确;}$$

对于 C，若 $a_1 < 0$ ， $q > 1$ ，则 $a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1} (q-1) < 0$ ， $\{a_n\}$ 为递减数列，错误；

对于 D， $S_{n+1} - S_n = \frac{a_1}{1-q} (1 - q^{n+1} - 1 + q^n) = a_1 q^n$ ，若 $a_1 < 0$ ， $q > 0$ ，则 $S_{n+1} - S_n < 0$ ， $S_{n+1} < S_n$ ，

$\{S_n\}$ 是递减数列，错误.

故选：AB.

10. 已知随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，函数 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($x \in \mathbf{R}$)，则

A. 当 $x = \mu$ 时， $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

B. 曲线 $y = f(x)$ 关于直线 $x = \mu$ 对称

C. x 轴是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线

D. 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴之间的面积小于 1

【答案】ABC

【解析】

【分析】由正态分布曲线的性质逐一判断即可.

【详解】解：因为随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，函数 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (x \in \mathbf{R})$ ，

所以 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \mu$ ，且当 $x = \mu$ 时， $f(x)$ 取最大值为 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ，

故 A, B 正确；

根据正态分布的曲线可得， x 轴是渐近线，且曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴之间的面积等于 1，

故 C 正确，D 错误.

故选：ABC.

11. 已知 A, B 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 左、右顶点， $F(c, 0)$ 为 C 右焦点，M 是 C 的上顶点，

$N\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$ ，MN 的垂直平分线交 C 于 D, E，若 D, E, F 三点共线，则 ()

A. $|FN| = a$

B. C 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. 点 N 到直线 MF 的距离为 $\frac{b^2}{c}$

D. 直线 DA, DB 的斜率之积为 $-\frac{b^2}{a^2}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题意得 DE 的方程为 $y - \frac{b}{2} = \frac{a^2}{bc} \left(x - \frac{a^2}{2c} \right)$ ，进而得 $c^4 - 3a^2c^2 + a^4 = 0$ ，再整理得 $ac = b^2$ ，

进而求 $|FN|$ ，离心率判断 AB；求出直线 MF 的方程并结合点线距公式求解判断 C；设 $D(x_0, y_0)$ ，则

$y_0^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_0^2)$, 进而求解 $k_{AD} \cdot k_{BD}$ 即可判断 D.

【详解】解：由题知 $A(-a, 0), B(a, 0), M(0, b), N\left(\frac{a^2}{c}, 0\right), F(c, 0)$,

所以, $k_{MN} = \frac{b}{-\frac{a^2}{c}} = -\frac{bc}{a^2}$, MN 的中点为 $\left(\frac{a^2}{2c}, \frac{b}{2}\right)$,

所以, MN 的垂直平分线 DE 的方程为 $y - \frac{b}{2} = \frac{a^2}{bc} \left(x - \frac{a^2}{2c} \right)$,

因为 D, E, F 三点共线,

所以 $-\frac{b}{2} = \frac{a^2}{bc} \left(c - \frac{a^2}{2c} \right)$, 整理得 $c^4 - 3a^2c^2 + a^4 = 0$,

所以 $(a^2 - c^2)^2 - a^2c^2 = 0$, 即 $a^2 - c^2 = ac = b^2$

所以, $|FN| = \left| \frac{a^2}{c} - c \right| = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c} = a$, 故 A 选项正确;

所以 $c^2 - ac - a^2 = 0$, 即 $e^2 - e - 1 = 0$, 解得 $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $e = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (舍)

所以, 椭圆的离心率为 $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 故 B 选项正确;

因为直线 MF 的方程为 $y = -\frac{b}{c}x + b$, 即 $bx + cy - bc = 0$,

所以, 点 $N\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$ 到直线 MF 的距离为 $d = \frac{\frac{a^2b}{c} - bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{b^3}{ac}$, 故 C 选项错误;

设 $D(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 故 $y_0^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_0^2)$,

由于 $A(-a, 0), B(a, 0)$,

所以 $k_{AD} \cdot k_{BD} = \frac{y_0}{x_0 + a} \cdot \frac{y_0}{x_0 - a} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_0^2)}{x_0^2 - a^2} = -\frac{b^2}{a^2}$, 故 D 选项正确;

故选: ABD

12. 已知 $x \in [-\pi, \pi]$ ，函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ ，则 ()

A. $f(x)$ 的图像关于原点对称

B. $f(x)$ 有四个极值点

C. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增

D. $f(x)$ 的最大值不大于 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【答案】AC

【解析】

【分析】根据 $f(x)$ 的函数性质逐项分析求解.

【详解】对于 A, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{\sin x}{x^2 + 1} = -f(x)$ ，是奇函数，正确；

对于 B, $f'(x) = \frac{(x^2 + 1)\cos x - 2x\sin x}{(x^2 + 1)^2}$ ，令 $g(x) = (x^2 + 1)\cos x - 2x\sin x$ ，

则 $g'(x) = 2x\cos x - (x^2 + 1)\sin x - (2\sin x + 2x\cos x) = -(x^2 + 3)\sin x$ ，

当 $x \in (0, \pi]$ 时， $g'(x) \leq 0$ ， $g(x)$ 单调递减，当 $x \in [-\pi, 0)$ 时， $g'(x) \geq 0$ ，

$g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)$ 最多只有 2 个零点，即 $f'(x)$ 最多只有 2 个零点，错误；

对于 C, $g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi^2}{16} + 1\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi^2}{16} + 1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{32} (\pi - 4)^2 > 0$ ，

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{32} (\pi - 4)^2 > 0$, $g(0) = 1$ ，由 B 的分析知：当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时， $g(x) > 0$ ，即 $f'(x) > 0$ ，

$f(x)$ 是单调递增的，正确；

对于 D, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi^2}{16} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\pi^2}{8} + 2} > \frac{\sqrt{2}}{\frac{4^2}{8} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，错误；

故选：AC.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 α 是第三象限角，且 $\tan \alpha = 3$ ，则 $\sin \alpha - \cos \alpha =$ _____.

【答案】 $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】

【分析】 根据同角三角函数关系求解即可.

【详解】 解: 因为 α 是第三象限角, 且 $\tan \alpha = 3$,

所以 $\sin \alpha = 3 \cos \alpha, \sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$,

因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\text{所以 } \sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以 } \sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10} - \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = -\frac{2\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{故答案为: } -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

14. 已知 $0 < x < 1$, 则函数 $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x}$ 的最小值为_____.

【答案】 9

【解析】

【详解】 试题分析: 由 $0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$, 而

$$y = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{4}{x} - 4 + \frac{1}{1-x} - 1 + 5 = \frac{4(1-x)}{x} + \frac{x}{1-x} + 5 \geq 2\sqrt{4} + 5 = 9, \text{ 当且仅当 } x = \frac{2}{3} \text{ 时, 上式取“=”, 所}$$

以 $y_{\min} = 9$.

考点: 基本不等式; 构造意识和发散性思维.

15. 若正方形 $ABCD$ 的顶点均在半径为 1 的球 O 上, 则四棱锥 $O-ABCD$ 体积的最大值为_____.

【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{27} \text{ ## } \frac{4}{27}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 设正方形 $ABCD$ 的边长为 x , 可得到四棱锥 $O-ABCD$ 体积为 $V = \frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2}$, 令

$x^2 = t \in (0, 2)$, 则 $V = \frac{1}{3} \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t^3}$, 利用导数的知识求得最大值即可求解

【详解】设正方形 $ABCD$ 的中心为 E , 连接 OE , 由球的性质可知 $OE \perp$ 平面 $ABCD$,

设正方形 $ABCD$ 的边长为 x , 因为正方形 $ABCD$ 的顶点均在半径为 1 的球 O 上, 且不在大圆上, 所以

$$x \in (0, \sqrt{2}),$$

$$\text{所以, } OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2},$$

$$\text{所以, 四棱锥 } O-ABCD \text{ 体积为 } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot OE = \frac{1}{3} x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{令 } x^2 = t \in (0, 2), \text{ 则 } V = \frac{1}{3} t \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}t} = \frac{1}{3} \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t^3},$$

$$\text{令 } y = t^2 - \frac{1}{2}t^3, \text{ 则 } y' = 2t - \frac{3}{2}t^2, \text{ 故 } y' = 2t - \frac{3}{2}t^2 = t \left(2 - \frac{3}{2}t\right) = 0 \text{ 得 } t = 0, \quad t = \frac{4}{3}$$

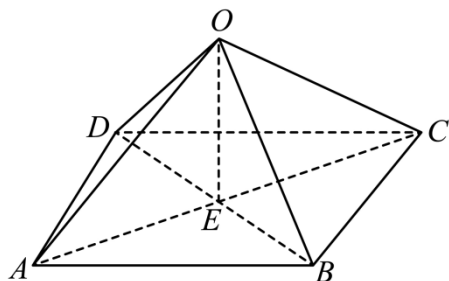
$$\text{所以, 当 } t \in \left(0, \frac{4}{3}\right) \text{ 时, } y' = 2t - \frac{3}{2}t^2 > 0, \quad y = t^2 - \frac{1}{2}t^3 \text{ 单调递增,}$$

$$\text{当 } t \in \left(\frac{4}{3}, 2\right) \text{ 时, } y' = 2t - \frac{3}{2}t^2 < 0, \quad y = t^2 - \frac{1}{2}t^3 \text{ 单调递减,}$$

$$\text{所以, 当 } t = \frac{4}{3} \text{ 时 } y = t^2 - \frac{1}{2}t^3 \text{ 有最大值 } y_{\max} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{16}{27},$$

$$\text{所以, } V = \frac{1}{3} \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t^3} \leq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{16}{27}} = \frac{4\sqrt{3}}{27}, \text{ 当且仅当 } x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 时四棱锥 } O-ABCD \text{ 体积的最大值.}$$

$$\text{故答案为: } \frac{4\sqrt{3}}{27}$$



16. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(-2, 1)$, 点 B, C 均在抛物线 $H: y^2 = 4x$ 上. 若 AB, AC 的中点也在 H 上, BC 的中点为 D , 则 $AD = \underline{\hspace{2cm}}$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/025301312011011034>