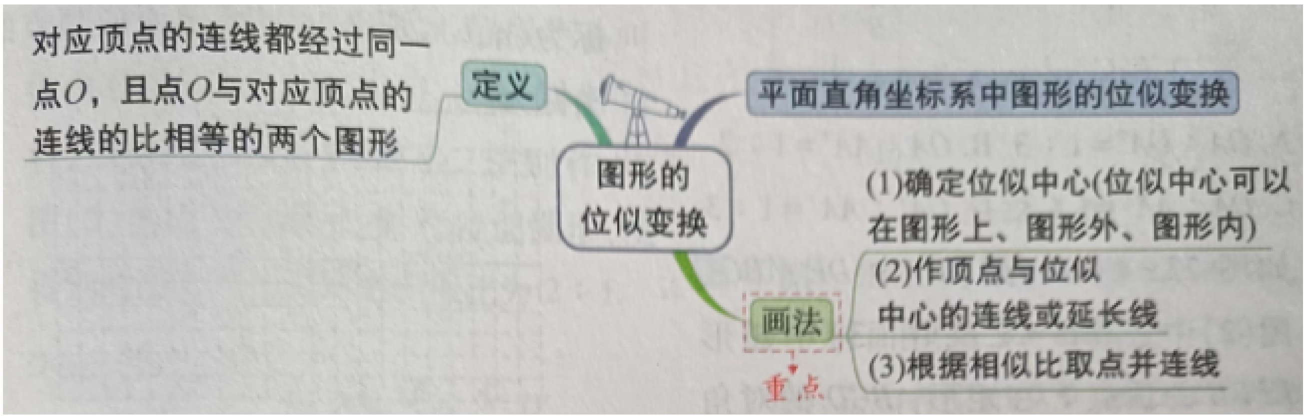
专题 11 图形的位似变换与综合与实践 测量与误差（4 个知识点 8 种题型 2 种中考考法）

【目录】

【学习目标】

1. 学会用位似变换把一个图形放大或缩小，了解平面直角坐标系下位似变换图形坐标的特点。
2. 了解相似变换、位似变换，位似图形及其有关概念。
3. 掌握常用的测量物体高度的方法，并会用这些方法测量物体的高度。

【知识导图】



【倍速学习五种方法】

【方法一】脉络梳理法

知识点 1.位似图形的概念（重点）

1）两个多边形不仅相似，而且对应顶点的连线相交于一点，对应边互相平行，象这样的两个图形叫做**位似图形**，这个点叫做**位似中心**。这时的相似比又称为**位似比**。

相似图形与位似图形的区别与联系：1、区别：①**位似图形对应点的连线交于一点**，相似图形没有；②**位似图形的对应边互相平行**，相似图形没有。2、联系：**位似图形是特殊的相似图形。**

2）相似图形与位似图形的区别与联系：

区别：①**位似图形对应点的连线交于一点**，相似图形没有；

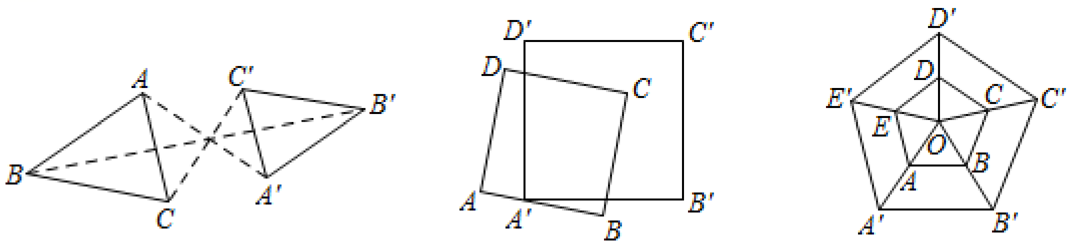
②**位似图形的对应边互相平行**，相似图形没有。

联系：**位似图形是特殊的相似图形。**

3）、位似图形是特殊的相似图形，故具有相似图形的一切性质。

4）、位似图形上任意一对对应点到位似中心的距离比等于相似比。

【例 1】（2022 秋·九年级单元测试）如图，下面三组图形中，位似图形有（　　）



A．0 组　　B．1 组　　C．2 组　　D．3 组

【答案】C

【分析】根据位似图形的性质逐一进行判断即可得到答案.

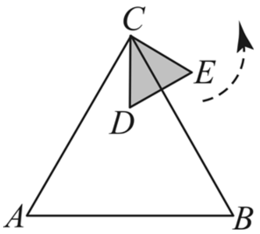
【详解】解：∵三组图形都是相似图形，第一组和第三组图形的对应点连线所在的直线经过同一点，第二组图形的对应点连线所在的直线不经过同一点，

∴第一组和第三组图形是位似图形，第二组不是位似图形，

故选：C.

【点睛】本题考查了位似图形，熟练掌握位似图形必须同时满足两个条件：①两个图形是相似图形；②两个相似图形每组对应点连线所在的直线都经过同一个点，二者缺一不可.

【变式】（2023·河北保定·校考一模）如图，$\triangle ABC$与$\triangle DEC$都是等边三角形，固定$\triangle ABC$，将$\triangle DEC$从图示位置绕点C逆时针旋转一周，在$\triangle DEC$旋转的过程中，下列说法正确的是（　　）



A．$\triangle DEC$总与$\triangle ABC$位似

B．$\triangle DEC$与$\triangle ABC$不会位似

C．当点D落在CB上时，$\triangle DEC$与$\triangle ABC$位似

D．存在$\triangle DEC$的两个位置使得$\triangle DEC$与$\triangle ABC$位似

【答案】D

【分析】根据位似图形的定义判断即可.

【详解】∵$\triangle ABC$与$\triangle DEC$都是等边三角形，

∴$\triangle ABC$总与$\triangle DEC$相似.

∵在$\triangle DEC$旋转的过程中，只有当点D落在线段AC和线段AC的延长线上，AD和BE相交于点C，

∴在$\triangle DEC$旋转的过程中，只有当点D落在线段AC和线段AC的延长线上，$\triangle DEC$与$\triangle ABC$位似.

故选：D.

【点睛】本题主要考查了位似图形的定义，熟练掌握位似图形的定义是解本题的关键.

知识点 2.图形的放大与缩小（重点）

利用位似变换可以把一个图形放大或缩小，**若位似比大于 1，则通过位似变换把原图形放大；若位似比小于 1，则通过位似变换把原图形缩小**。

画位似图形的一般步骤：①确定位似中心；②连线并延长（分别连接位似中心和能代表原图的关键点并延长）；**③根据相似比确定各线段的长度；④顺次连接上述个点，得到图形。**

【例 2】（2021 春·河北邯郸·八年级统考期末）如果一个图形上各点的横坐标保持不变，而纵坐标分别都变化为原来的$\frac{1}{2}$，那么所得的图形与原图形相比(　　)

A．形状不变，图形缩小为原来的一半

B．形状不变，图形放大为原来的 2 倍

C．整个图形被横向压缩为原来的一半

D．整个图形被纵向压缩为原来的一半

【答案】D

【详解】试题解析：∵一个图形上各点的横坐标保持不变，而纵坐标分别都变化为原来的$\frac{1}{2}$，

∴整个图形被纵向压缩为原来的一半

故选 D.

考点：位似变换.

知识点 3.平面直角坐标系中图形的位似变换

在平面直角坐标系中，如果以原点为位似中心，画一个与原图形的位似图形，使它与原图形的相似比为 k，若原图形上点的坐标为(x，y)，则位似图形上与它对应的点的坐标为(kx，ky)或(-kx，-ky).

【例 3】（2022 秋·湖南衡阳·九年级校考阶段练习）在平面直角坐标系中，已知点$A\left(-6,9\right)$、$B\left(-9,-3\right)$，以原点O为位似中心，相似比为$\frac{1}{3}$，把$\triangle ABO$缩小，则点A的对应点A'的坐标是（　　）

A．$\left(-2,3\right)$　　　　B．$\left(-18,27\right)$

C．$\left(-18,27\right)$或$\left(18,-27\right)$　　　　D．$\left(-2,3\right)$或$\left(2,-3\right)$

【答案】D

【分析】根据在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为k，那么位似图形对应点的坐标的比等于k或$-k$解答.

【详解】解：∵点A的坐标为$\left(-6,9\right)$，以原点为位似中心将$\triangle ABO$缩小，位似比为$\frac{1}{3}$，

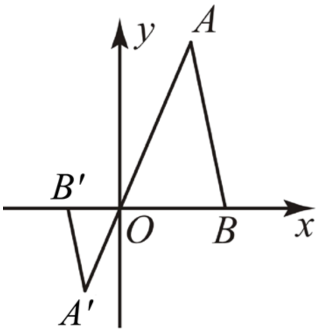
∴点A'的对应点的坐标为：$\left(-6\times\frac{1}{3},9\times\frac{1}{3}\right)$或$\left(-6\times\left(-\frac{1}{3}\right),9\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$，即$\left(-2,3\right)$或$\left(2,-3\right)$，

故选：D.

【点睛】本题考查坐标与图形变换-位似变换，熟知位似变换规则是解答的关键.

【变式】（2022秋·河南南阳·九年级统考期中）如图，$\triangle OA'B'$是$\triangle OAB$的位似图形，已知$A(1,2)$，

$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OA'B'}=4:1$，则点$A'$的坐标是（　　）



A. $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},1\right)$　　C. $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$

【答案】A

【分析】根据面积比可得相似比为$2:1$，然后可得答案.

【详解】解：$\because S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OA'B'}=4:1$，

$\therefore \triangle OAB$和$\triangle OA'B'$的相似比为$2:1$，

$\because A(1,2)$，

$\therefore A'\left(-\frac{1}{2},-1\right)$，

故选：A.

【点睛】此题考查了位似图形的性质，此题比较简单，注意在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为k，那么位似图形对应点的坐标的比等于k或$-k$.

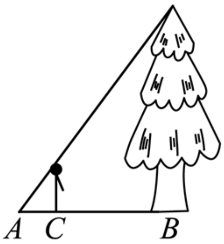
知识点4.利用相似三角形解决测量问题（重点）

（1）利用影长测量物体的高度．①测量原理:测量不能到达顶部的物体的高度，通常利用相似三角形的性质即相似三角形的对应边的比相等和“在同一时刻物高与影长的比相等”的原理解决．②测量方法：在同一时刻测量出参照物和被测量物体的影长来，再计算出被测量物的长度．

（2）利用相似测量河的宽度（测量距离）．①测量原理：测量不能直接到达的两点间的距离，常常构造“A”型或“X”型相似图，三点应在一条直线上．必须保证在一条直线上，为了使问题简便，尽量构造直角三角形．②测量方法：通过测量便于测量的线段，利用三角形相似，对应边成比例可求出河的宽度．

（3）借助标杆或直尺测量物体的高度．利用杆或直尺测量物体的高度就是利用杆或直尺的高（长）作为三角形的边，利用视点和盲区的知识构建相似三角形，用相似三角形对应边的比相等的性质求物体的高度．

【例 4】（2022 秋·安徽合肥·九年级合肥寿春中学校考期中）如图，身高为1.6m的小明想测量一下操场边大树的高度，他沿着树影BA由B到A走去，当走到C点时，他的影子顶端正好与树的影子顶端重合，测得$BC=1.4\text{m}$，$CA=0.7\text{m}$，于是得出树的高度为（　　）

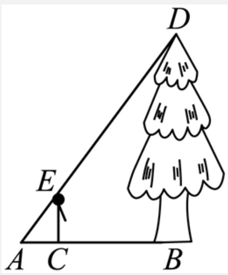


A．3.2m　　　　B．4.8m　　　　C．6.4m　　　　D．8m

【答案】B

【分析】求出AB的长度，然后根据相似三角形对应边成比例列出比例式求解即可．

【详解】解：如图，



$\because BC=1.4\text{m}$，$CA=0.7\text{m}$，

$\therefore AB=AC+BC=0.7+1.4=2.1\text{m}$，

$\because$小明与大树都与地面垂直，

$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle ABD$，

$\therefore \frac{CE}{BD}=\frac{AC}{AB}$，

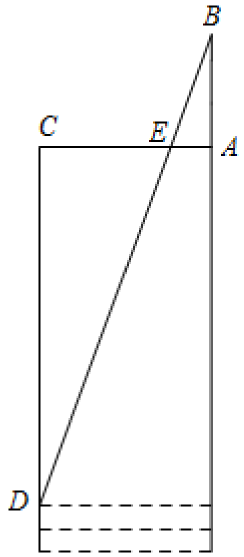
即$\frac{1.6}{BD}=\frac{0.7}{2.1}$，

解得$BD=4.8$，

故选：B．

【点睛】本题考查了相似三角形的应用，判断出相似三角形，利用相似三角形对应边成比例列出比例式是解题的关键．

【变式】（2022 秋·安徽蚌埠·九年级校考期中）如图所示，在井口A处立一垂直于井口的木杆AB，从木杆的顶端B观测井水水岸D，视线BD与井口的直径CA交于点E，若测得$AB=1$米，$AC=1.6$米，$AE=0.4$米，则水面以上深度CD为（　　）



A．4 米　　B．3 米　　C．3.2 米　　D．3.4 米

【答案】B

【分析】由题意可得$\triangle ABE \backsim \triangle CDE$，然后根据相似三角形对应边成比例列式即可求得$CD$．

【详解】解：由题意可知：$AB \parallel CD$，

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle CDE$，

$\therefore \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{AE}{CE}$，

$\because AB=1$米，$AC=1.6$米，$AE=0.4$米，

$\therefore \dfrac{1}{CD}=\dfrac{0.4}{1.6-0.4}$，解得$CD=3$，

∴水面以上深度 CD 为 3 米．

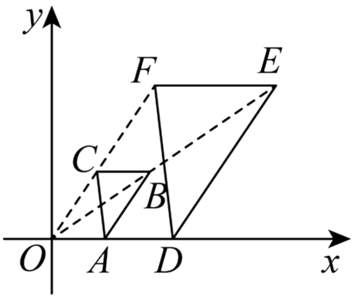
故选：B．

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定与性质，根据题意得出$\triangle ABE \backsim \triangle CDE$是解决问题的关键．

【方法二】实例探索法

题型 1.利用位似图形求图形的面积、周长等。

1.（2023·重庆渝中·重庆巴蜀中学校考一模）如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$与$\triangle DEF$是以点O为位似中心的位似图形，若$OC:CF=2:3$，$\triangle DEF$的周长为 15，则$\triangle ABC$的周长为（　）



A．10　　B．6　　C．5　　D．4

【答案】B

【分析】根据位似图形的性质，得到$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，根据$OC:CF=2:3$得到相似比为：$\frac{OC}{OF}=\frac{OC}{OC+CF}=\frac{2}{5}$，再结合三角形的周长比等于相似比即可得到答案．

【详解】解：$\because \triangle ABC$与$\triangle DEF$是以原点O为位似中心的位似图形

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEF$

$\therefore \frac{AC}{DF}=\frac{OC}{OF}=\frac{OC}{OC+CF}$

$OC:CF=2:3$

$\therefore \frac{AC}{DF}=\frac{OC}{OC+CF}=\frac{2}{5}$

$\therefore \frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle DEF}}=\frac{AC}{DF}=\frac{2}{5}$

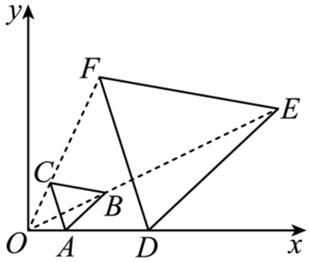
$\triangle DEF$的周长为15，

$\therefore C_{\triangle ABC}=\frac{2}{5}\times 15=6$

故选B．

【点睛】本题考查了相似图形的性质，掌握位似图形与相似图形的关系，熟记相似图形的性质是解决问题的关键．

2.（2023·重庆·九年级专题练习）如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$与$\triangle DEF$是以原点O为位似中心的位似图形，若$OB:BE=1:2$，$\triangle ABC$的面积为2，则$\triangle DEF$的面积为（　　）



A．4　　　　B．6　　　　C．8　　　　D．18

【答案】D

【分析】根据位似图形的性质，得到$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，根据$OB:BE=1:2$得到相似比，再结合相似三角形的面积比等于相似比的平方即可得到答案．

【详解】解：∵ $\triangle ABC$与$\triangle DEF$是以原点O为位似中心的位似图形，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$，

$\therefore \frac{AC}{DF}=\frac{OB}{OE}=\frac{OB}{OB+BE}$，

$\because OB:BE=1:2$，

$\therefore BE=2OB$，

$\therefore \frac{AC}{DF}=\frac{OB}{3OB}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}}=\frac{1}{9}$，

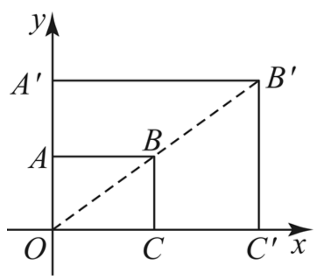
∵ $\triangle ABC$的面积为2，

∴ $\triangle DEF$的面积为18，

故选：D．

【点睛】本题考查了相似图形的性质，掌握位似图形与相似图形的关系，熟记相似图形的性质是解题的关键．

3．（2023秋·九年级单元测试）如图，在平面直角坐标系xOy中，矩形$OABC$与矩形$OA'B'C'$位似，位似中心是原点O，若点$B(2,1)$，$B'(4,2)$，则矩形$OABC$与矩形$OA'B'C'$的面积比为（　　）



A．$1:4$　　　　B．$1:2$　　　　C．$1:9$　　　　D．$1:3$

【答案】A

【分析】根据位似比等于相似比，相似多边形的面积比等于相似比的平方，进行求解即可．

【详解】解：∵矩形$OABC$与矩形$OA'B'C'$位似，位似中心是原点O，而点$B(2,1)$，$B'(4,2)$，

$\therefore OB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}, OB'=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

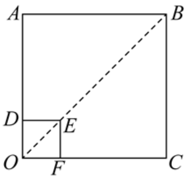
∴它们的相似比为$OB:OB'=1:2$，

∴矩形$OABC$与矩形$OA'B'C'$的面积比为$1:4$.

故选：A.

【点睛】本题考查位似图形，相似多边形的性质．熟练掌握位似比等于相似比，是解题的关键．

4．（2023·重庆南岸·统考一模）正方形$ODEF$与正方形$OABC$位似，点O为位似中心，$OE:OB=1:4$，则正方形$ODEF$与正方形$OABC$的周长比为（　）



A．$1:3$　　B．$1:4$　　C．$1:9$　　D．$1:16$

【答案】B

【分析】先根据位似变换是以原点为位似中心，相似比为k，那么位似图形对应点的坐标的比等于k或$-k$，得$OF:OC=1:4$，再求正方形$ODEF$与正方形$OABC$的周长比．

【详解】解：∵正方形$ODEF$与正方形$OABC$位似，$OE:OB=1:4$，

$\therefore OF:OC=1:4$，

正方形$ODEF$与正方形$OABC$的周长为$1:4$，

故选：B.

【点睛】本题考查了位似变换：在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为k，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或$-k$.

题型 2.画位似图形

5．（2023·广东佛山·校联考二模）如图所示，在学习《图形的位似》时，小华利用几何画板软件，在平面直角坐标系中画出了$\triangle ABC$的位似图形$\triangle A_1B_1C_1$.

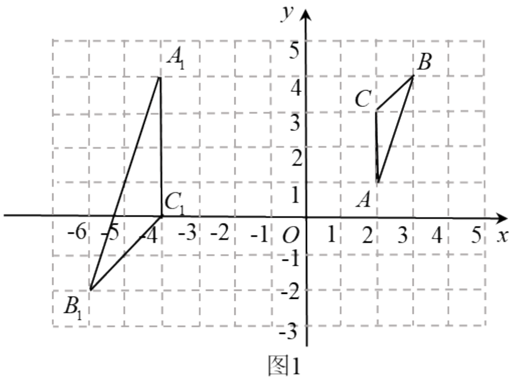


图1

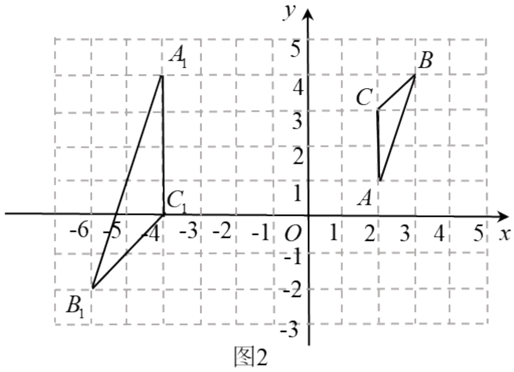


图2

(1)仅借助不带刻度的直尺，在图 1 中标出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的位似中心 M 点的位置（保留作图痕迹），并写出点 M 的坐标________；

(2)若以点 O 为位似中心，仅借助不带刻度的直尺，在图 2 中画出 $\triangle A_1B_1C_1$ 在 y 轴左侧的位似图形 $\triangle A_2B_2C_2$，且 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的相似比为 2:1；

(3)在（2）中，若 $\triangle A_2B_2C_2$ 边上的一点 P_2 的坐标为 $(a，b)$，则点 P_1 在 $\triangle A_1B_1C_1$ 在上的对应点 P_1 的坐标为________.

【答案】(1)图见解析，$(0,2)$

(2)见解析

(3)$(2a,2b)$

【分析】（1）连接 A_1A、C_1C、B_1B，它们的交点为 M 点，然后写出 M 点的坐标；

（2）利用位似图形的性质得出对应点位置进而得出答案；

（3）利用位似图形的性质即可求解.

【详解】（1）解：如图，点 M 为所作，M 点的坐标为 $(0,2)$；

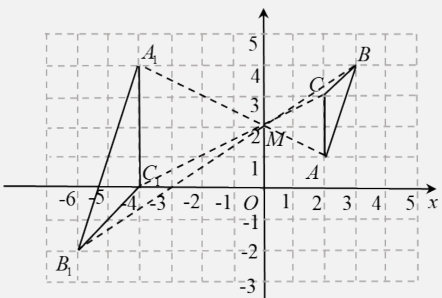


图1

故答案为：$(0,2)$；

（2）解：如图，$\triangle A_2B_2C_2$ 为所作.

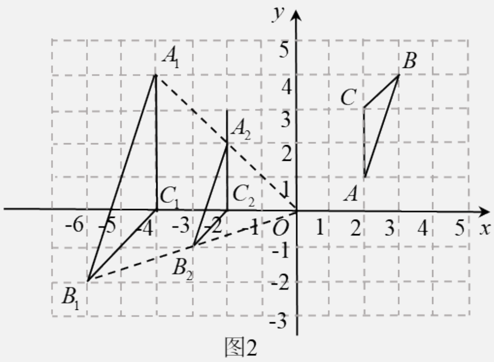


图2

（3）解：∵若$\triangle A_2B_2C_2$边上的一点P_2的坐标为$\left(a,\ b\right)$，

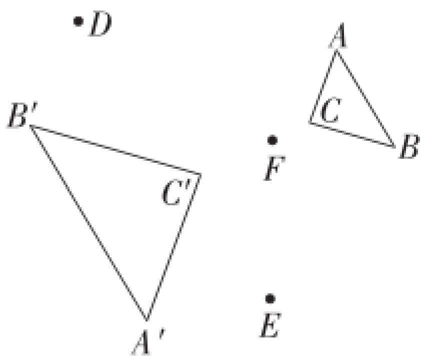
∴点P_1在$\triangle A_1B_1C_1$在上的对应点P_1的坐标为$\left(2a,2b\right)$，

故答案为：$\left(2a,2b\right)$.

【点睛】本题考查了作图-位似变换：在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为k，那么位似图形对应点的坐标的比等于k或$-k$．也考查了位似的性质．

题型 3.确定位似中心

6.（2023秋·河北邯郸·九年级统考期末）把$\triangle ABC$放大为原图形的2倍得到$\triangle A'B'C'$，则位似中心可以是（　）



A．G点　　B．F点　　C．E点　　D．D点

【答案】B

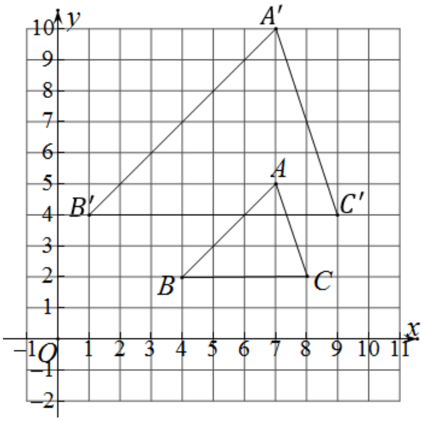
【分析】如果两个图形不仅是相似图形，而且每组对应点的连线交于一点，对应边互相平行，这个点叫做位似中心，据此解答即可．

【详解】由位似中心的定义可知，此位似中心可以是点F，

故选：B

【点睛】本题考查了位似中心，解决本题的关键是熟练掌握位似中心的定义．

7.（2022 秋·山东济南·九年级校考阶段练习）如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是位似图形，则位似中心是（　）.

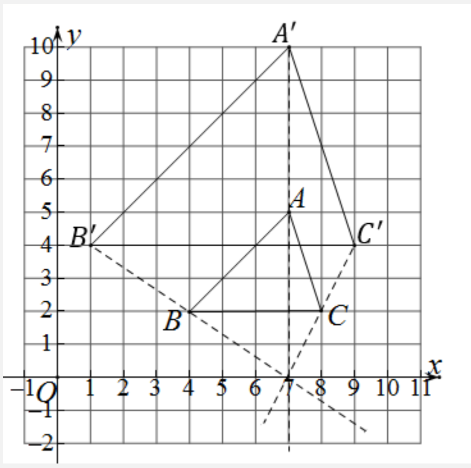


A．$(6,0)$　　B．$(7,0)$　　C．$(6,1)$　　D．$(7,1)$

【答案】B

【分析】找位似图形的位似中心直接连接位似图形的对应点并延长，延长线的交点即所找位似中心，写出坐标即可.

【详解】作图如下：

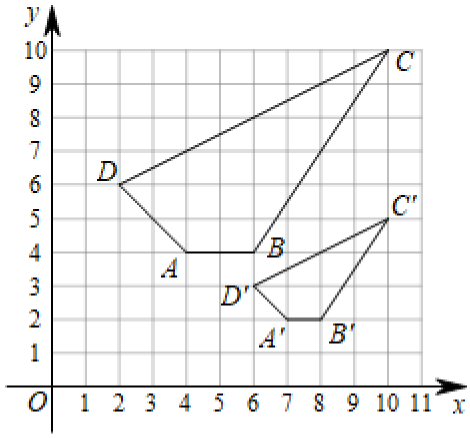


延长线的交点为(7,0)，位似中心即为(7,0).

故选：B.

【点睛】本题考查了找位似图形的位似中心，理解位似中心的定义做出图像是做出本题的关键.

8.（2022 秋·山西太原·九年级统考期末）如图，在平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$是位似图形．位似中心是（　　）



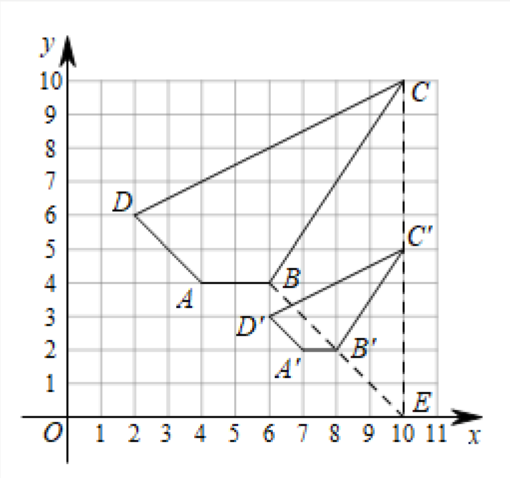
A.（8，0）　　B.（8，1）　　C.（10，0）　　D.（10，1）

【答案】C

【分析】连接两组对应点，对应点的连线的交点即为位似中心.

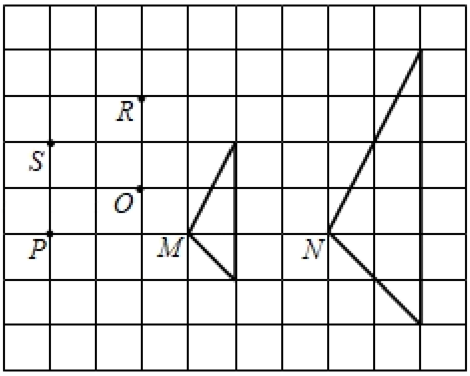
【详解】解：如图，点 E 即为位似中心，E（10，0），

故选：C.



【点睛】此题考查了位似中心的定义：位似图形的对应点的连线的交点即为位似中心，熟记定义是解题的关键.

9．（2021 春·湖北武汉·九年级华中科技大学附属中学校考阶段练习）图中的两个三角形是位似图形，则它们的位似中心是（　　）



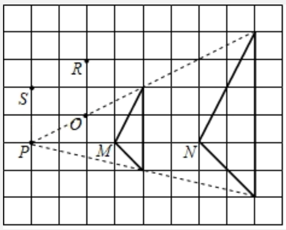
A．点 P　　B．点 Q　　C．点 R　　D．点 S

【答案】A

【分析】直接利用位似图形的性质得出对应点连线的交点，进而得出答案．

【详解】解：如图所示：图中的两个三角形的位似中心是点 P．

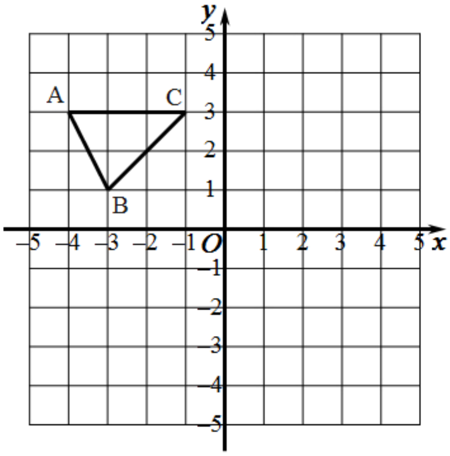
故选：A．



【点睛】此题主要考查了位似变换，正确掌握位似图形的性质是解题关键．

题型 4.平面直角坐标系中的位似图形

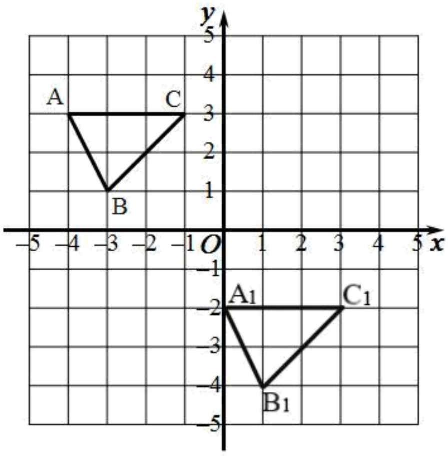
10. 如图，在平面直角坐标系中，已知 ΔABC 的三个顶点的坐标分别为 $A(-4,3),B(-3,1),C(-1,3)$，请按下列要求画图：（1）将 ΔABC 先向右平移 4 个单位长度、再向下平移 5 个单位长度，得到 $\Delta A_1B_1C_1$，画出 $\Delta A_1B_1C_1$，并写出点 B 的坐标;（2）以点 A 为位似中心将 ΔABC 放大 2 倍，得到 $\Delta A_2B_2C_2$，画出 $\Delta A_2B_2C_2$ 并写出点 B 的坐标．

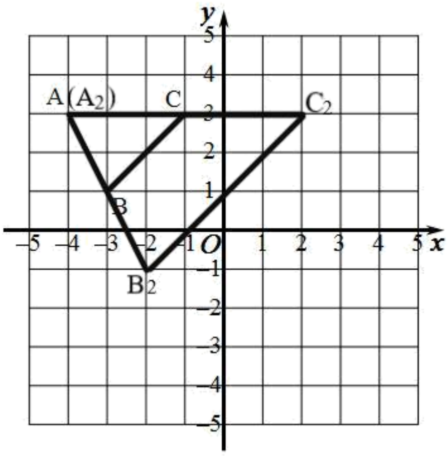


【答案】(1)详见解析 $B_1(1,-4)$;(2)详见解析 $B_2(-2,-1)$

【分析】(1)根据题目中给出的平移方式,描点画图即可;(2)根据相似比找到对应点 B_2 和 C_2 即可.

【解析】(1)根据题意可得:$\therefore B_1(1,-4)$

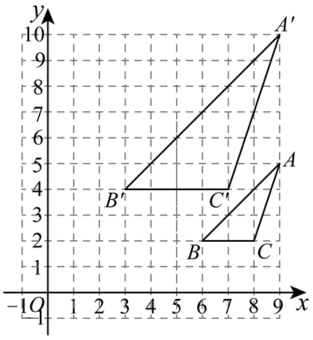




(2)根据题意可得:$\therefore B_2(-2,-1)$

【点睛】本题主要考查了图形的平移变换,位似图形的性质,熟练掌握位似图形的性质是解题的关键.

11.(2023·河南周口·统考一模)如图,已知图中的每个小方格都是边长为 1 的小正方形,每个小正方形的顶点称为格点,若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是位似图形且顶点均在格点上.



(1)在图中画出位似中心的位置，并写出位似中心的坐标；

(2) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的位似比为__________，面积比为__________.

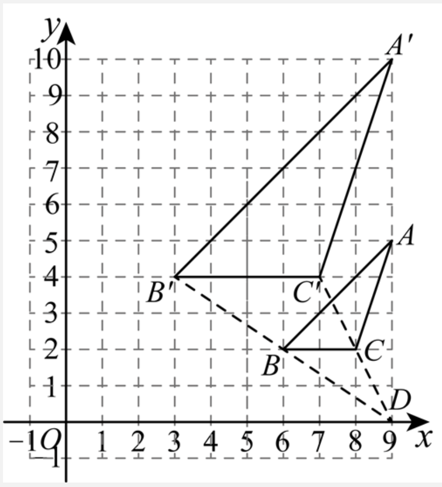
【答案】(1)见解析

(2)$1:2$，$1:4$

【分析】（1）连接 CC'、BB'，两线相交于点 D，根据位似中心的概念、结合图形解答即可；

（2）根据 $BC=2$，$B'C'=4$，即可得出相似比和面积比.

【详解】（1）解：如图，位似中心的坐标为：$(9,0)$.



（2）解：$\because BC=2$，$B'C'=4$，

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的位似比为：$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}=1:2$，

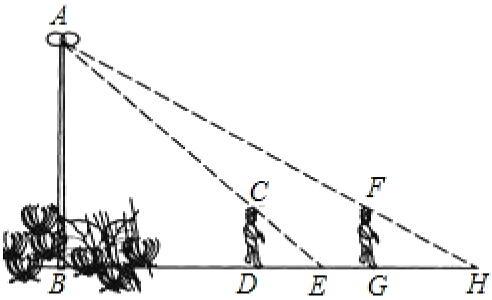
$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的面积比为：$\dfrac{1}{4}=1:4$.

故答案为：$1:2$，$1:4$.

【点睛】本题考查的是位似变换的概念和性质，如果两个图形不仅是相似图形，而且对应顶点的连线所在直线相交于一点，对应边互相平行，那么这样的两个图形叫做位似图形，这个点叫做位似中心.

题型 5.利用相似三角形解决测量问题

12．如图，花丛中有一路灯 AB．在灯光下，小明在点 D 处的影长 $DE=3\text{m}$，沿 BD 方向行走到达点 G，$DG=5\text{m}$，这时小明的影长 $GH=5\text{m}$．如果小明的身高为 1.7m，求路灯 AB 的高度.（精确到 0.1m）



【答案】路灯 AB 的高度约为 6.0m

【分析】根据 AB⊥BH，CD⊥BH，FG⊥BH，可得：△ABE∽△CDE，则有 $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{DE}{BD+DE}$ 和 $\dfrac{FG}{AB}=\dfrac{HG}{HG+GD+DB}$，而 CD=FG，即可得 $\dfrac{DE}{BD+DE}=\dfrac{HG}{HG+GD+DB}$，从而求出 BD 的长，再代入前面任意一个等式中，即可求出 AB.

【解析】由题意，得 $AB\perp BH$，$CD\perp BH$，$FG\perp BH$，

$\therefore CD//AB$．$\therefore \Delta CDE\backsim\Delta ABE$．$\therefore \dfrac{CD}{AB}=\dfrac{DE}{BD+DE}$．①

同理，$\Delta FGH\backsim\Delta ABH$，$\therefore \dfrac{FG}{AB}=\dfrac{HG}{HG+GD+DB}$．②

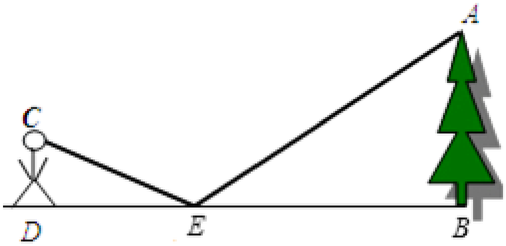
又$\because CD=FG=1.7$，∴由①，②可得 $\dfrac{DE}{BD+DE}=\dfrac{HG}{HG+GD+BD}$，

即 $\dfrac{3}{BD+3}=\dfrac{5}{5+5+BD}$，解得 $BD=7.5$.

将 $BD=7.5$ 代入①，得 $AB=5.95\approx 6.0$．故路灯 AB 的高度约为 6.0m.

【点睛】本题考查了相似三角形的应用，解这道题的关键是将实际问题转化为数学问题，本题只要把实际问题抽象到相似三角形中，利用相似比列出方程即可求出.

13. 为了测量校园水平地面上一棵不可攀的树的高度，学校数学兴趣小组做了如下探索：根据光的反射定律，利用一面镜子和一根皮尺，设计如下图所示的测量方案：把一面很小的镜子水平放置在离 B（树底）8.4 米的点 E 处，然后沿着直线 BE 后退到点 D，这时恰好在镜子里看到树梢顶点 A，再用皮尺量得 DE=3.2 米，观察者目高 CD=1.6 米，求树 AB 的高度.



【答案】树 AB 的高度为 4.2 米

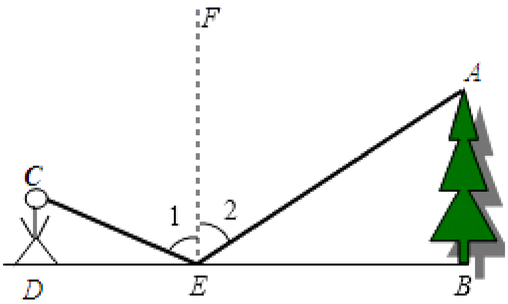
分析：先过 E 作 EF⊥BD 于点 E，再根据入射角等于反射角可知，∠1=∠2，故可得出∠DEC=∠AEB，由 CD⊥BD，AB⊥BD 可知∠CDE=∠ABE，进而可得出△CDE∽△ABE，再由相似三角形的对应边成比例即可求出大树 AB 的高度.

【解析】过点 E 作 EF⊥BD 于点 E，则∠1=∠2， ∵∠DEF=∠BEF=90°，∴∠DEC=∠AEB，

∵CD⊥BD，AB⊥BD，∴∠CDE=∠ABE=90°，∴△CDE∽△ABE，∴ $\frac{DE}{BE}=\frac{CD}{AB}$，

∵DE=3.2 米，CD=1.6 米，EB=8.4 米，∴ $\frac{3.2}{8.4}=\frac{1.6}{AB}$，解得 AB=4.2（米）.

答：树 AB 的高度为 4.2 米.



点睛：此题主要考查了相似三角形的应用，解题关键是根据题意得出△CED∽△AEB，再根据相似三角形的对应边成比例得出结论.

题型 6.利用位似图形解决实际问题

14.（2023 秋·山西忻州·九年级校考期末）阅读与思考

下面是某兴趣小组的一次实践活动记录：

兴趣小组札记

2022 年×月×日，在数学兴趣小组开展的活动中，小华给每位同学发了一张扇形纸片 OAB，并要求大家按照下面的做法画出一个正方形，使得正方形的四个顶点分别落在扇形半径 OA，OB 和 $\overset{\frown}{AB}$ 上.

小李的做法如下：如图 1，先在扇形 OAB 内画出正方形 $CDEF$，使得 C，D 两点在 OA 上，点 F 在 OB 上，连接 OE 并延长交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 G，过点 G 分别作 $GJ\perp OA$ 于点 J，$GH\perp GJ$ 交 OB 于点 H，再作 $HI\perp OA$ 于点 I.

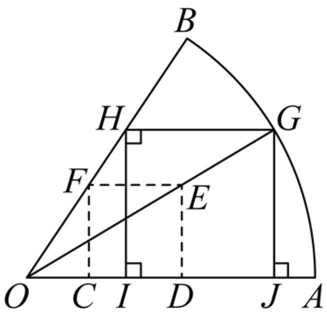


图1

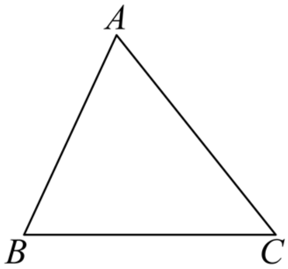


图2

(1)猜想证明：请问小李画出的四边形$GHIJ$是正方形吗？如果是，请给出你的证明；如果不是，请说明理由.

(2)实践操作：如图2，给定锐角三角形ABC，画出一个长宽比为$2:1$的矩形$DEFG$，使得点D，E位于边BC上，点F，G分别位于边AC，AB上.

【分析】（1）由作法可得四边形$CDEF$与四边形$IJGH$是位似图形，位似中心为点O，由于四边形$CDEF$为正方形，所以四边形$GHIJ$是正方形；

（2）先在$\triangle ABC$内画出矩形$HIJK$，使得H，I两点在BC上，点K在AB上，连接BJ并延长交AC于点F，过点F分别作$FE\perp BC$于点E，$FG\perp FE$交AB于点G，再作$DG\perp BC$于点D.

【详解】（1）解：四边形$GHIJ$是正方形，理由是：

$\because GJ\perp OA$，$GH\perp GJ$，$HI\perp OA$，

$\therefore \angle GJO=\angle JIH=\angle JGH=90^\circ$，

$\therefore$四边形$GHIJ$是矩形，

$\because$四边形$CDEF$是正方形，CD边与矩形$GHIJ$的IJ边在同一条直线上，

$\therefore FC\perp OA$，$HI\perp OA$，$EF\perp OA$，$HG//OA$，

$\therefore FC//HI$，$EF//GH$，

$\therefore \triangle FOC\backsim\triangle HOI$，$\triangle EFO\backsim\triangle GHO$.

$\therefore \dfrac{OF}{OH}=\dfrac{FC}{HI}$，$\dfrac{OF}{OH}=\dfrac{EF}{GH}$.

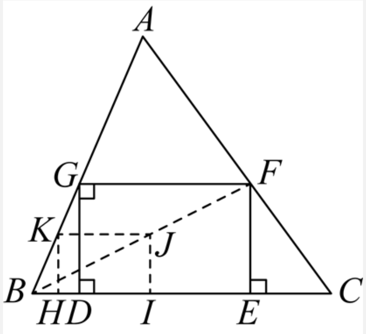
$\therefore \dfrac{FC}{HI}=\dfrac{EF}{GH}$.

又$\because FC=EF$，

$\therefore HI=GH$.

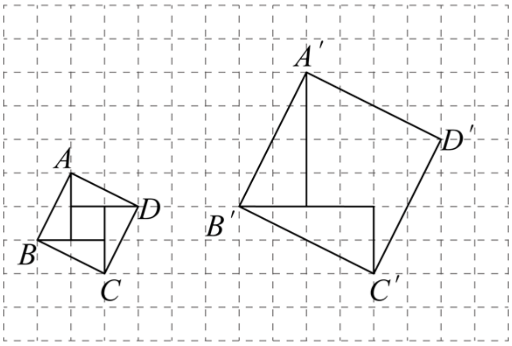
$\therefore$四边形$GHIJ$是正方形；

（2）如图，矩形$DEFG$即为所求.



【点睛】本题考查了位似变换：如果两个图形不仅是相似图形，而且对应顶点的连线相交于一点，对应边互相平行，那么这样的两个图形叫做位似图形，这个点叫做位似中心．

15．（2023·全国·九年级专题练习）我国三国时期的杰出数学家赵爽在注解《周髀算经》时，巧妙地运用弦图证明了勾股定理．如图，在10×15的正方形网格中，将弦图$ABCD$放大，使点A，B，C，D的对应点分别为A'，B'，C'，$D¢$.



(1) $A'C'$与AC的比值为 _____；

(2)补全弦图$A'B'C'D'$.

【分析】（1）观察正方形$ABCD$和正方形$A'B'C'D'$的关系得到答案.

（2）按要求补全图形即可.

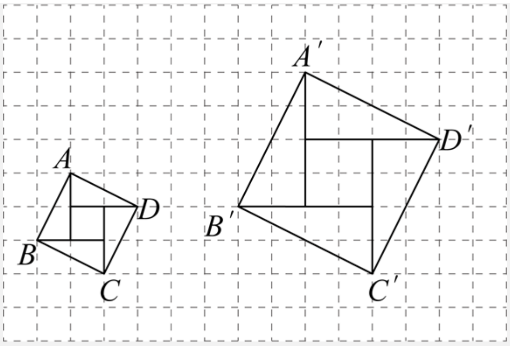
【详解】（1）解：观察正方形$ABCD$和正方形$A'B'C'D'$可知，$A'B'=2AB$，$B'C'=2BC$，$C'D=2CD$，$A'D'=2AD$，

$\therefore$正方形$ABCD$放大为原来的2倍即得正方形$A'B'C'D'$，

$\therefore$ $A'C'$与AC的比值为2；

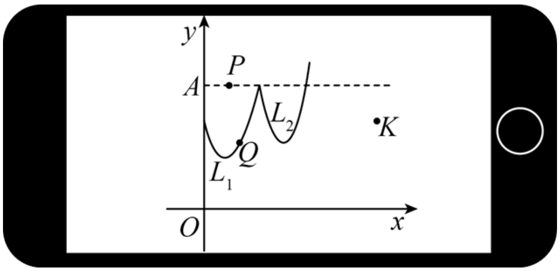
故答案为：2；

（2）补全弦图$A'B'C'D'$如下：



【点睛】本题考查勾股定理的证明，解题的关键是读懂题意，理解弦图证明勾股定理．

16．（2023·河北石家庄·校联考二模）如图，在平面直角坐标系中，$A(0,7)$，$B(0,4)$，嘉琪用手机设计了动画，光点P从点A出发，以每秒2个单位的速度向右匀速运动；光点Q同时从点B出发，在点P的正下方沿抛物线$L_1: y=x^2+bx+c$运动，设运动时间为t，当$t=\frac{3}{2}$时，P、Q第一次相遇．



(1)①P、Q第一次相遇时，点P的坐标为________；

②求抛物线L_1的解析式，并写出顶点坐标；

(2)当P、Q相遇后，点P的运动保持不变，点Q沿与L_1形状相同的抛物线（如图）运动，点Q仍在点P的正下方，再次相遇时同时停止运动．当$t=3$时，光点Q运动到抛物线L_2的最低点，求点P、Q在运动的整个过程中，距离不超过2的时间；

(3)在（2）的条件下，P、Q运动结束后，嘉琪用手机截图L_1、L_2后，发现屏幕上有一个黑点K（位置固定），刚好落在平面直角坐标系$(10,5)$的位置，嘉琪通过手机触屏功能将L_1与L_2横向、纵向同时放大a倍，使点K落在L_1或L_2上（放大过程中不改变坐标原点的位置），直接写出符合条件的a的值．

【答案】(1)①$(3,7)$ ②解析式：$y=x^2-2x+4$，顶点坐标$(1,3)$

(2)点P、Q在运动的整个过程中，距离不超过2的时间为$\frac{8-\sqrt{2}-2\sqrt{7}}{2}$秒；

(3)a的值为$\frac{5}{2}$或$\frac{20}{17}$．

【分析】（1）①由$2\times\frac{3}{2}=3$，可得P、Q第一次相遇时，点P的坐标为$(3,7)$；

②用待定系数法得抛物线L_1的解析式解析式为$y=x^2-2x+4$；即可得物线L_1的顶点坐标是$(1,3)$；

（2）设抛物线L_2的解析式为$y=x^2+mx+n$，用待定系数法可得抛物线L_2的解析式为$y=x^2-12x+34$，分别求出当Q在抛物线L_1上，点P、Q距离不超过2的时间和当Q在抛物线L_2上，点P、Q距离不超过2的时间，再相加即可；

（3）由抛物线L_1的解析式为$y=(x-1)^2+3$，抛物线L_2的解析式为$y=(x-6)^2-2$，可知将L_1与L_2横向、纵向同时放大a倍后，抛物线L_1的顶点为$(a,3a)$，抛物线L_2的顶点为$(6a,-2a)$，设放大a倍后，抛物线L_1的解析式为$y=p(x-a)^2+3a$，用待定系数法可得放大a倍后，抛物线L_1的解析式为$y=\frac{1}{a}(x-a)^2+3a$，把$K(10,5)$代入得$5=\frac{1}{a}(10-a)^2+3a$，方程无实数解，故K不可能在放大a倍后的抛物线L_1上；同理可得放大a倍后，抛物线L_2的解析式为$y=\frac{1}{a}(x-6a)^2-2a$，把$K(10,5)$代入可解得$a=\frac{5}{2}$或$a=\frac{20}{17}$.

【详解】（1）解：①$\because 2\times\frac{3}{2}=3$，$A(0,7)$，

$\therefore P$、Q第一次相遇时，点P的坐标为$(3,7)$；

故答案为：$(3,7)$；

②把$(3,7)$，$(0,4)$代入$y=x^2+bx+c$得：

$$\begin{cases}9+3b+c=7\\c=4\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}b=-2\\c=4\end{cases}$，

$\therefore$抛物线L_1的解析式解析式为$y=x^2-2x+4$；

$\because y=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$，

$\therefore$物线L_1的顶点坐标是$(1,3)$；

（2）解：设抛物线L_2的解析式为$y=x^2+mx+n$，

$\because$当$t=3$时，光点Q运动到抛物线L_2的最低点，

$\therefore -\frac{m}{2}=3\times 2$，

$\therefore m=-12$，

$\therefore y=x^2-12x+n$，

把$(3,7)$代入$y=x^2-12x+n$得：

$7=9-36+n$，

解得：$n=34$，

$\therefore$抛物线L_2的解析式为$y=x^2-12x+34$，

当Q在抛物线L_1上，点P、Q距离为2，则$x^2-2x+4=7-2$，

解得：$x=1+\sqrt{2}$或$x=1-\sqrt{2}$（不符合题意，舍去），

$\therefore$当Q在抛物线L_1上，点P、Q距离不超过2的时间为$\dfrac{3-(1+\sqrt{2})}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$（秒）；

当Q在抛物线L_2上，点P、Q距离为2，则$x^2-12x+34=7-2$，

解得：$x=6+\sqrt{7}$或$x=6-\sqrt{7}$，

由对称性可知，停止运动时，P的横坐标为9，

$\therefore$当Q在抛物线L_2上，点P、Q距离不超过2的时间为$\dfrac{6-\sqrt{7}-3}{2}+\dfrac{9-(6+\sqrt{7})}{2}=3-\sqrt{7}$（秒）；

$\therefore$点P、Q在运动的整个过程中，距离不超过2的时间为$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+3-\sqrt{7}=\dfrac{8-\sqrt{2}-2\sqrt{7}}{2}$（秒）；

（3）解：由（1）（2）知，抛物线L_1的解析式为$y=(x-1)^2+3$，抛物线L_2的解析式为$y=(x-6)^2-2$，

$\therefore$将L_1与L_2横向、纵向同时放大a倍后，抛物线L_1的顶点为$(a,3a)$，抛物线L_2的顶点为$(6a,-2a)$，

设放大a倍后，抛物线L_1的解析式为$y=p(x-a)^2+3a$，

将$(3a,7a)$代入得：$7a=4a^2p+3a$，

$\therefore 4a^2p=4a$，

$\because a\neq 0$，

$\therefore p=\dfrac{1}{a}$，

$\therefore$放大a倍后，抛物线L_1的解析式为$y=\dfrac{1}{a}(x-a)^2+3a$，

把$K(10,5)$代入得：$5=\dfrac{1}{a}(10-a)^2+3a$，

方程无实数解，

$\therefore K$ 不可能在放大 a 倍后的抛物线 L_1 上；

同理设放大 a 倍后，抛物线 L_2 的解析式为 $y=q(x-6a)^2-2a$，

将 $(3a,7a)$ 代入得：$7a=9a^2q-2a$，

$\therefore 9a^2q=9a$，

$\because a\neq 0$，

$\therefore q=\dfrac{1}{a}$，

$\therefore$ 放大 a 倍后，抛物线 L_2 的解析式为 $y=\dfrac{1}{a}(x-6a)^2-2a$，

把 $K(10,5)$ 代入得：$5=\dfrac{1}{a}(10-6a)^2-2a$，

解得 $a=\dfrac{5}{2}$ 或 $a=\dfrac{20}{17}$，

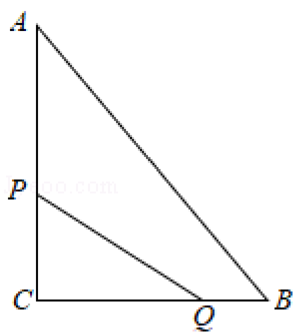
综上所述，a 的值为 $\dfrac{5}{2}$ 或 $\dfrac{20}{17}$．

【点睛】本题考查二次函数的综合应用，涉及待定系数法，动点问题，位似变换等知识，解题的关键是读懂题意，用含字母的代数式表示相关点坐标和相关相等的长度．

题型 7.位似与相似、函数的综合运用

17. 如图，Rt△ABC，∠C＝90°，AC＝10cm，BC＝8cm．点 P 从点 C 出发，以 2cm/s 的速度沿 CA 向点 A 匀速运动，同时点 Q 从点 B 出发，以 1cm/s 的速度沿 BC 向点 C 匀速运动，当一个点到达终点时，另一个点随之停止．（1）求经过几秒后，△PCQ 的面积等于△ABC 面积的 $\dfrac{2}{5}$？

（2）经过几秒，△PCQ 与△ABC 相似？



【分析】（1）设经过 x 秒，△PCQ 的面积等于△ABC 面积的 $\dfrac{2}{5}$，根据三角形的面积和已知列出方程，求出方程的解即可；（2）根据相似三角形的判定得出两种情况，再求出 t 即可．

【解答】解：（1）设经过 x 秒，△PCQ 的面积等于△ABC 面积的 $\dfrac{2}{5}$，

$\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(8-x)=\frac{1}{2}\times 10\times 8\times\frac{2}{5}$，解得：$x_1=x_2=4$，

答：经过 4 秒后，△PCQ的面积等于△ABC面积的$\frac{2}{5}$；

（2）设经过 t 秒，△PCQ与△ABC相似，因为∠C=∠C，所以分为两种情况：

①$\frac{PC}{BC}=\frac{CQ}{AC}$，$\frac{2t}{8}=\frac{8-t}{10}$，解得：$t=\frac{16}{7}$；

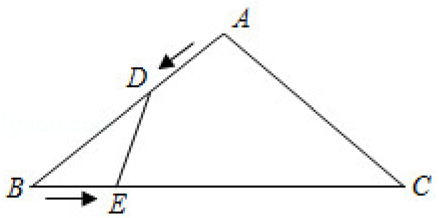
②$\frac{PC}{AC}=\frac{CQ}{BC}$，$\frac{2t}{10}=\frac{8-t}{8}$，解得：$t=\frac{40}{13}$；

答：经过$\frac{16}{7}$秒或$\frac{40}{13}$秒时，△PCQ与△ABC相似.

【点评】本题考查了三角形的面积，直角三角形，相似三角形的判定等知识点，能得出关于 x 的方程是解（1）的关键，能求出符合的所有情况是解（2）的关键.

题型 8.规律探究题

18. 如图所示，在等腰△ABC中，AB=AC=10cm，BC=16cm. 点 D 由点 A 出发沿 AB 方向向点 B 匀速运动，同时点 E 由点 B 出发沿 BC 方向向点 C 匀速运动，它们的速度均为 1cm/s. 连接 DE，设运动时间为 t（s）（0＜t＜10），解答下列问题：（1）当 t 为何值时，△BDE 的面积为 7.5cm^2；（2）在点 D，E 的运动中，是否存在时间 t，使得△BDE 与△ABC 相似？若存在，请求出对应的时间 t；若不存在，请说明理由.



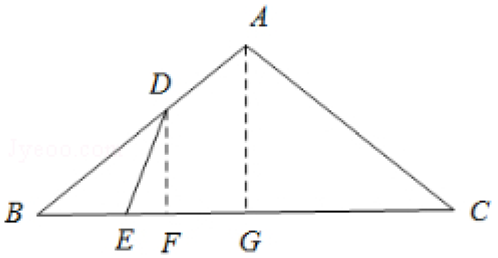
【分析】（1）根据等腰三角形的性质和相似三角形的判定和性质求三角形 BDE 边 BE 的高即可求解；（2）根据等腰三角形和相似三角形的判定和性质分两种情况说明即可.

【解答】解：（1）分别过点 D、A 作 DF⊥BC、AG⊥BC，垂足为 F、G；

如图；∴DF∥AG，$\frac{DF}{AG}=\frac{BD}{AB}$ ∵AB=AC=10，BC=16∴BG=8，∴AG=6.

∵AD=BE=t，∴BD=10 - t，∴$\frac{DF}{6}=\frac{10-t}{10}$解得 $DF=\frac{3}{5}$（10 - t）

∵$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BE\bullet DF$=7.5∴$\frac{3}{5}$（10 - t）•t=15 解得 t=5. 答：t 为 5 秒时，△BDE 的面积为 7.5cm^2.



（2）存在．理由如下：

①当 $BE=DE$ 时，$\triangle BDE\backsim\triangle BCA$，$\therefore\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{BD}{BC}$即$\dfrac{t}{10}=\dfrac{10-t}{16}$，解得 $t=\dfrac{50}{13}$，

②当 $BD=DE$ 时，$\triangle BDE\backsim\triangle BAC$，$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BD}{AB}$即$\dfrac{t}{16}=\dfrac{10-t}{10}$，解得 $t=\dfrac{80}{13}$．

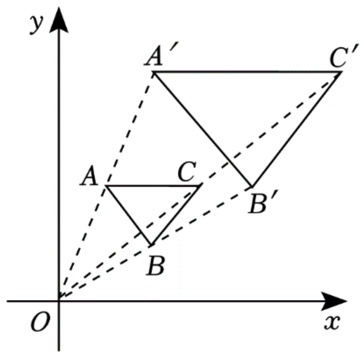
答：存在时间 t 为$\dfrac{50}{13}$或$\dfrac{80}{13}$秒时，使得$\triangle BDE$与$\triangle ABC$相似．

【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质、等腰三角形的性质，解决本题的关键是动点变化过程中形成不同的等腰三角形．

【方法三】 仿真实战法

考法 1. 位似变换

1．（2023•浙江）如图，在直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 A（1，2），B（2，1），C（3，2），现以原点 O 为位似中心，在第一象限内作与$\triangle ABC$ 的位似比为 2 的位似图形$\triangle A'B'C'$，则顶点 C' 的坐标是（　　）



A．（2，4）　　　B．（4，2）　　　C．（6，4）　　　D．（5，4）

【分析】根据位似变换的性质解答即可．

【解答】解：∵$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 位似，$\triangle A'B'C'$ 与$\triangle ABC$ 的相似比为 2：1，

∴$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 位似比为 1：2，

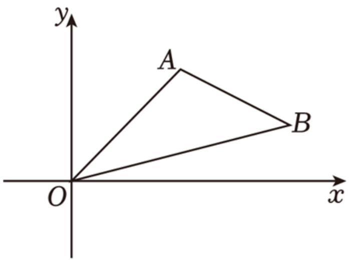
∵点 C 的坐标为（3，2），

∴点 F 的坐标为（3×2，2×2），即（6，4），

故选：C．

【点评】本题考查的是位似变换的性质、相似三角形的性质，在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为 k，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$．

2．（2023•朝阳）如图，在平面直角坐标系中，已知点 A（2，2），B（4，1），以原点 O 为位似中心，相似比为 2，把△OAB 放大，则点 A 的对应点 A' 的坐标是（　　）



A．（1，1）　　B．（4，4）或（8，2）

C．（4，4）　　D．（4，4）或（－4，－4）

【分析】根据位似变换的性质计算，得到答案．

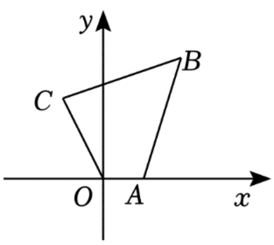
【解答】解：∵以原点 O 为位似中心，相似比为 2，把△OAB 放大，点 A 的坐标为（2，2），

∴点 A 的对应点 A' 的坐标为（2×2，2×2）或（2×（－2），2×（－2）），即（4，4）或（－4，－4），

故选：D．

【点评】本题考查的是位似变换，在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为 k，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$．

3．（2023•辽宁）如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别是 O（0，0），A（1，0），B（2，3），C（－1，2），若四边形 $OA'B'C'$ 与四边形 $OABC$ 关于原点 O 位似，且四边形 $OA'B'C'$ 的面积是四边形 $OABC$ 面积的 4 倍，则第一象限内点 B' 的坐标为 ________．



【分析】根据四边形 $OA'B'C'$ 的面积是四边形 $OABC$ 面积的 4 倍，可得四边形 $OA'B'C'$ 与四边形 $OABC$ 的位似比是 2：1，进而得出各对应点位置，进而得第一象限内点 B' 的坐标．

【解答】解：∵四边形 $OA'B'C'$ 与四边形 $OABC$ 关于原点 O 位似，且四边形 $OA'B'C'$ 的面积是四边形 $OABC$ 面积的 4 倍，

∴四边形 $OA'B'C'$ 与四边形 $OABC$ 的位似比是 2：1，

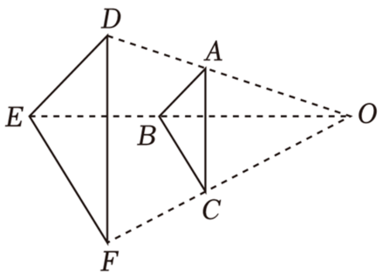
∵点 B（2，3），

∴第一象限内点 B' 的坐标为（4，6）.

故答案为：（4，6）.

【点评】本题考查作图－位似变换，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

4.（2023•阜新）如图，△ABC 和△DEF 是以点 O 为位似中心的位似图形，相似比为 2：3，则△ABC 和△DEF 的面积比是 ________.



【分析】先利用位似的性质得到△ABC∽△DEF，相似比为 2：3，然后根据相似三角形的性质解决问题.

【解答】解：∵△ABC 与△DEF 是以点 O 为位似中心的位似图形，位似比为 2：3，

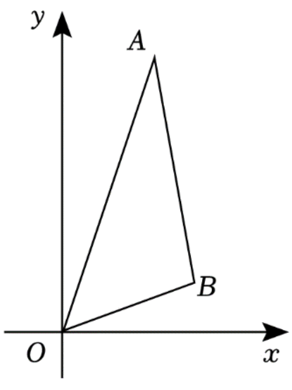
∴△ABC∽△DEF，相似比为 2：3，

∴△ABC 与△DEF 的面积之比为 2^2：3^2＝4：9.

故答案为：4：9.

【点评】本题考查的是位似变换的概念和性质、相似三角形的性质，熟记相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的关键.

5.（2023•盘锦）如图，△ABO 的顶点坐标是 A（2，6），B（3，1），O（0，0），以点 O 为位似中心，将△ABO 缩小为原来的$\frac{1}{3}$，得到△$A'B'O$，则点 A' 的坐标为 ________.



【分析】根据位似变换的性质计算，得到答案.

【解答】解：∵以原点 O 为位似中心，把△ABC 缩小为原来的$\frac{1}{3}$，可以得到△$A'B'O$，点 A 的坐标为