# 第五章 导数及其应用（知识归纳+题型突破）

## 基础知识归纳

**1、平均变化率**

（1）变化率

事物的变化率是相关的两个量的“增量的比值”。如气球的平均膨胀率是半径的增量与体积增量的比值.

（2）平均变化率

一般地，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的平均变化率为：$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

（3）如何求函数的平均变化率

求函数的平均变化率通常用“两步”法：

①作差：求出 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$ 和 $\Delta x=x_2-x_1$

②作商：对所求得的差作商，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

**2、导数的概念**

（1）定义：函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处瞬时变化率是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数,记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$ 即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

（2）定义法求导数步骤：

① 求函数的增量：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

② 求平均变化率：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

③ 求极限，得导数：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

**3、导数的几何意义**

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数的几何意义，就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线的斜率 $k$，即 $k=f'(x_0)$.

**4、基本初等函数的导数公式**

| 基本初等函数 | 导数 |
| --- | --- |
| $f(x)=c$（$c$ 为常数） | $f'(x)=0$ |
| $f(x)=x^n$（$n\in R$） | $f'(x)=nx^{n-1}$ |

| | |
|---|---|
| $f(x)=\sin x$ | $f'(x)=\cos x$ |
| $f(x)=\cos x$ | $f'(x)=-\sin x$ |
| $f(x)=e^x$ | $f'(x)=e^x$ |
| $f(x)=a^x$（$a>0$） | $f'(x)=a^x\ln a$ |
| $f(x)=\ln x$ | $f'(x)=\frac{1}{x}$ |
| $f(x)=\log_a^x$（$a>0$， $a\neq 1$） | $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$ |
| $f(x)=\sqrt{x}$ | $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x)=\frac{1}{x}$ | $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ |

**5、导数的运算法则**

若 $f'(x)$， $g'(x)$ 存在，则有

（1）$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

（2）$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

（3）$[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

**6、复合函数求导**

复合函数 $y=f(g(x))$ 的导数和函数 $y=f(u)$， $u=g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x=y'_u u'_x$，即 $y$ 对 $x$ 的导数等于 $y$ 对 $u$ 的导数与 $u$ 对 $x$ 的导数的乘积.

**7、曲线的切线问题**

（1）在型求切线方程

已知：函数 $f(x)$ 的解析式.计算：函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 或者 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程.

步骤：第一步：计算切点的纵坐标 $f(x_0)$（方法：把 $x=x_0$ 代入原函数 $f(x)$ 中），切点 $(x_0,f(x_0))$.

第二步：计算切线斜率 $k=f'(x)$.

第三步：计算切线方程.切线过切点 $(x_0,f(x_0))$，切线斜率 $k=f'(x_0)$。

根据直线的点斜式方程得到切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

（2）过型求切线方程

已知：函数 $f(x)$ 的解析式.计算：过点 $P_1(x_1,y_1)$（无论该点是否在 $y=f(x)$ 上）的切线方程.

步骤：第一步：设切点 $P_0(x_0,y_0)$

第二步：计算切线斜率 $k=f'(x_0)$；计算切线斜率 $k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$；

第三步：令：$k=f'(x_0)=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，解出 $x_0$，代入 $k=f'(x_0)$ 求斜率

第三步：计算切线方程.根据直线的点斜式方程得到切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

**8、函数的单调性与导数的关系（导函数看正负，原函数看增减）**

| 条件 | 恒有 | 结论 |
|---|---|---|
| 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上可导 | $f'(x)\geq 0$ | $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内单调递增 |
| | $f'(x)\leq 0$ | $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内单调递减 |
| | $f'(x)=0$ | $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内是常数函数 |

**9、求已知函数（不含参）的单调区间**

①求 $y=f(x)$ 的定义域

②求 $f'(x)$

③令 $f'(x)>0$，解不等式，求单调增区间

④令 $f'(x)<0$，解不等式，求单调减区间

注：求单调区间时，令 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$）不跟等号.

**10、函数的极值**

一般地，对于函数 $y=f(x)$，

（1）若在点 $x=a$ 处有 $f'(a)=0$，且在点 $x=a$ 附近的左侧有 $f'(x)<0$，右侧有 $f'(x)>0$，则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的极小值点，$f(a)$ 叫做函数 $f(x)$ 的极小值.

（2）若在点 $x=b$ 处有 $f'(b)=0$，且在点 $x=b$ 附近的左侧有 $f'(x)>0$，右侧有 $f'(x)<0$，则称 $x=b$ 为 $f(x)$ 的极大值点，$f(b)$ 叫做函数 $f(x)$ 的极大值.

（3）极小值点与极大值点通称极值点，极小值与极大值通称极值.

注：极大（小）值点，不是一个点，是一个数.

**11、函数的最大（小）值**

一般地，如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象是一条连续不断的曲线，那么它必有最大值与最小值.

设函数 $f\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，求 $f\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的步骤为：

（1）求 $f\left(x\right)$ 在 $(a,b)$ 内的极值；

（2）将函数 $f\left(x\right)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a)$，$f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

重要题型

## 题型一：平均变化率与瞬时变化率

例题1．（2023下·上海普陀·高二上海市晋元高级中学校考期中）函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=2x^2$，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率为 $k_1$，在 $[x_0-\Delta x,x_0]$ 上的平均变化率为 $k_2$，则 $k_1$ 与 $k_2$ 的大小关系是_____

【答案】$k_1>k_2$

【详解】依题意 $k_1=\dfrac{2(x_0+\Delta x)^2-2x_0^2}{x_0+\Delta x-x_0}=\dfrac{4x_0\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x}=4x_0+2\Delta x$，

$k_2=\dfrac{2x_0^2-2(x_0-\Delta x)^2}{x_0-(x_0-\Delta x)}=\dfrac{4x_0\Delta x-2\Delta x^2}{\Delta x}=4x_0-2\Delta x$，

所以 $k_1-k_2=4\Delta x$，而 $\Delta x>0$，所以 $k_1>k_2$.

故答案为：$k_1>k_2$

例题2．（2023上·高二课时练习）自由落体运动的位移 $d$（单位：m）与时间 $t$（单位：s）满足函数关系 $d=\dfrac{1}{2}gt^2$（$g$ 为重力加速度）．

(1)分别求 $[4,4.1]$、$[4,4.01]$、$[4,4.001]$ 这些时间段内自由落体的平均速度；

(2)求 $t=4$ 时的瞬时速度；

(3)求 $t=a(a>0)$ 时的瞬时速度；

(4)借助（3）的结果，求 $t=\dfrac{5}{2}$ 时的瞬时速度．

【答案】(1) $4.05g$ m/s； $4.005g$ m/s； $4.0005g$ m/s

(2) $4g$ m/s；

(3) ag m/s；

(4) $\dfrac{5}{2}g$ m/s；

【详解】（1）在 $[4,4.1]$ 时间内，平均速度 $\overline{v_1}=\dfrac{\frac{1}{2}g(4.1)^2-\frac{1}{2}g(4)^2}{4.1-4}=4.05g$ m/s；

在 $[4,4.01]$ 时间内，平均速度 $\overline{v_2}=\dfrac{\frac{1}{2}g(4.01)^2-\frac{1}{2}g(4)^2}{4.01-4}=4.005g$ m/s；

在 $[4,4.001]$ 时间内，平均速度 $\overline{v_3}=\dfrac{\frac{1}{2}g(4.001)^2-\frac{1}{2}g(4)^2}{4.001-4}=4.0005g$ m/s；

（2）瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta d}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g\left(t+\Delta t\right)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{gt\Delta t+\frac{1}{2}\Delta t^2}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{1}{2}\Delta t\right)=gt$；

所以 $t=4$ 时瞬时速度为 $4g$ m/s；

（3）由（2）知，$t=a\left(a>0\right)$ 时的瞬时速度为 $v=gt=ag$ m/s；

（4）当 $t=\frac{5}{2}$ 时的瞬时速度 $v=gt=\frac{5}{2}g$ m/s；

例题 3．（2023 上·高二课时练习）从桥上将一小球掷向空中，小球相对于地面的高度 $h$（单位：m）和时间 $t$（单位：s）近似满足函数关系 $h=-5t^2+15t+12$．问：

(1)小球的初始高度是多少？

(2)小球在 $t=0$ 到 $t=1$ 这段时间内的平均速度是多少？

(3)小球在 $t=1$ 时的瞬时速度是多少？

(4)小球所能达到的最大高度是多少？何时达到？

【答案】(1)$12\text{m}$；

(2)$10\text{m/s}$；

(3)$5\text{m/s}$；

(4)最高高度为 $\frac{93}{4}\text{m}$，在 1.5 秒时达到.

【详解】（1）当 $t=0$ 时，$h\left(0\right)=12$，即初始高度为 $12\text{m}$；

（2）当 $t=1$ 时，$h\left(1\right)=-5\times 1^2+15\times 1+12=22$，

所以平均速度为 $v=\frac{22-12}{1-0}=10\text{m}/\text{s}$；

（3）由 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{h\left(1+\Delta t\right)-h\left(1\right)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{-5\left(1+\Delta t\right)^2+15\left(1+\Delta t\right)+12-22}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(-5\Delta t+5\right)=5$，

即 $t=1$ 时的瞬时速度是 $5\text{m/s}$；

（4）由 $h=-5t^2+15t+12$ 可得，当 $t=-\frac{15}{2\times\left(-5\right)}=1.5$ 时，$h_{\max}=h\left(1.5\right)=\frac{93}{4}$，

小球的最高高度为 $\frac{93}{4}\text{m}$，在 1.5 秒时达到.

## 巩固训练

1．（2023 上·高二课时练习）自由落体运动中，物体下落的距离 $d$（单位：m）与时间 $t$（单位：s）近似满足函数关系 $d=5t^2$．

(1)求物体在 $\left[2,4\right]$ 时间段内的平均速度；

(2)求物体在 $t=3$ 时的瞬时速度；

(3)求物体在 $t=a\left(a>0\right)$ 时的瞬时速度．

【答案】(1) $30$ m/s

(2) $30$ m/s

(3) $10a$ m/s；

【详解】（1）由 $d=5t^2$ 可知，第 4s 时的距离为 $d(4)=5\times4^2=80$；

第 2s 时的距离为 $d(2)=5\times2^2=20$；

所以平均速度为 $v=\dfrac{d(4)-d(2)}{4-2}=\dfrac{80-20}{4-2}=30$ m/s

（2）根据导数的定义可知

$$v=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta d}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{5(t+\Delta t)^2-5t^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{10t\Delta t+5(\Delta t)^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}(10t+5\Delta t)=10t;$$

所以物体在 $t=3$ 时的瞬时速度为 $v=10t=30$ m/s；

（3）由（2）的结论可知，物体在 $t=a(a>0)$ 时的瞬时速度 $v=10a$ m/s；

2．（2023 上·高二课时练习）已知车辆启动后的一段时间内，车轮旋转的角度和时间（单位：秒）的平方成正比，且车辆启动后车轮转动第一圈需要 1 秒．

(1)求车轮转动前 2 秒的平均角速度；

(2)求车轮在转动开始后第 3 秒的瞬时角速度．

【答案】(1) $4\pi$

(2) $12\pi$

【详解】（1）设车轮旋转的角度为 $y$，车辆启动后车轮转动的时间为 $t$ 秒，

则 $y=kt^2$，

由题意得 $t=1$ 时，$y=2\pi$，

即 $2\pi=1^2k$，解得 $k=2\pi$，

故 $y=2\pi t^2$，车轮转动前 2 秒的平均角速度为 $\dfrac{2\pi\times2^2-2\pi\times0^2}{2-0}=4\pi$，

（2）$y=2\pi t^2$，$y'=4\pi t$，

由导函数的意义可得车轮在转动开始后第 3 秒的瞬时角速度为 $4\pi\times3=12\pi$．

3．（2023 上·高二课时练习）将石子投入水中，水面产生的圆形波纹不断扩散．

(1)当半径 $r$ 从 $a$ 增加到 $a+h(h>0)$ 时，求圆周长相对于半径的平均变化率；

(2)当半径 $r=a$ 时，求圆周长相对于半径的瞬时变化率．

【答案】(1) $2\pi$

(2) $2\pi$

【详解】（1）当半径 $r$ 从 $a$ 增加到 $a+h(h>0)$ 时，圆周长相对于半径的平均变化率为

$$\frac{2\pi(a+h)-2\pi a}{a+h-a}=2\pi;$$

（2）当半径 $r=a$ 时，求圆周长相对于半径的瞬时变化率为

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\pi(a+h)-2\pi a}{a+h-a}=\lim_{h\to 0}2\pi=2\pi.$$

## 题型二：定义法求导数

例题 1．（2023 上·上海·高三上海中学校考期中）若 $f(x)=x^2+\sin x$，则 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=$______.

【答案】1

【详解】因为 $f(x)=x^2+\sin x$，所以 $f(0)=0$， $f'(x)=2x+\cos x$，

则 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+0)-f(0)}{h}=f'(0)=1$.

故答案为：1.

例题 2．（2023 上·高二课时练习）已知在使用某种杀菌剂 $t$ 小时后室内的细菌数量为 $f(t)=10^5+10^4t-10^3t^2$.

(1)求 $f'(10)$；

(2) $f'(10)$ 的实际意义是什么？

【答案】(1) $-10000$

(2)答案见解析

【详解】（1）解：由函数 $f(t)=10^5+10^4t-10^3t^2$，

当 $h\neq 0$ 时，在使用杀菌剂 10 小时附近的时间段 $[10,10+h](h>0)$ 内，

可得细菌数量关于时间的平均变化率为 $\frac{f(10+h)-f(10)}{h}$

$$=\frac{10^5+10^4(10+h)-10^3(10+h)^2-(10^5+10^4\times 10-10^3\times 10^2)}{h}=\frac{-10^4h-10^3h^2}{h}=-10^4-10^3h,$$

当 $h$ 趋近于 0，就得到 $f'(10)=\lim_{h\to 0}(-10^4-10^3h)=-10^4=-10000$.

（2）解 $f'(10)$ 的实际意义是细菌数量在 $t=10$ 时的瞬时变化率，它表明在 $t=10$ 附近，细菌数量大约以每小时 $10^4$ 的速率减少.

## 巩固训练

1．（2023 下·上海松江·高二上海市松江一中校考阶段练习）计算：$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+2h)-\sin x}{h}=$（　）

A．0　　B． $2\cos x$　　C． $\cos 2x$　　D． $2\cos 2x$

【答案】B

【详解】由 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+2h)-\sin x}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+2h)-\sin x}{2h}=2(\sin x)'=2\cos x$.

故选：B

2．（2023 下·上海浦东新·高二校考期末）设函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处导数存在，若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}=6$ 则 $f'\left(x_0\right)=$__________.

【答案】6

【详解】由导数的定义可得 $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0\right)-f\left(x_0-h\right)}{x_0-\left(x_0-h\right)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}=6$.

故答案为：6.

## 题型三：导数的运算

例题 1．（2023 下·上海普陀·高二校考期末）下列求导运算正确的是（　）

A．$\left(\ln x+\dfrac{3}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}$　　B．$\left(x^2\mathrm{e}^x\right)'=2x\mathrm{e}^x$

C．$\left(\mathrm{e}^x\cos 2x\right)'=\mathrm{e}^x\left(\cos 2x-2\sin 2x\right)$　　D．$\left(\ln\dfrac{1}{2}+\ln x\right)'=2+\dfrac{1}{x}$

【答案】C

【详解】$\left(\ln x+\dfrac{3}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}$，A 错；

$\left(x^2\mathrm{e}^x\right)'=(x^2)'\mathrm{e}^x+x^2(\mathrm{e}^x)'=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x$，B 错；

$\left(\mathrm{e}^x\cos 2x\right)'=(\mathrm{e}^x)'\cos 2x+\mathrm{e}^x(\cos 2x)'=\mathrm{e}^x\cos 2x-2\cdot\mathrm{e}^x\sin 2x=\mathrm{e}^x\left(\cos 2x-2\sin 2x\right)$，C 正确；

$\left(\ln\dfrac{1}{2}+\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$，D 错.

故选：C.

例题 2．（2023 上海·高二课时练习）已知 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$，$g\left(x\right)=\ln x$，计算下列函数 $y=h\left(x\right)$ 在点 $x=1$ 处的导数值：

(1) $h\left(x\right)=3f\left(x\right)-5g\left(x\right)$；

(2) $h\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)$；

(3) $h\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$；

(4) $h\left(x\right)=f\left(2x+1\right)+g\left(3x-1\right)$.

【答案】(1) $3\mathrm{e}-5$

(2) $\mathrm{e}$

(3)不存在

(4) $2\mathrm{e}^3+\dfrac{3}{2}$

【详解】（1）因为$h(x)=3f(x)-5g(x)=3\mathrm{e}^x-5\ln x$，

所以$h'(x)=3\mathrm{e}^x-\frac{5}{x}$，所以$h'(1)=3\mathrm{e}-5$.

（2）因为$h(x)=\mathrm{e}^x\ln x$，

所以$h'(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，所以$h'(1)=\mathrm{e}$.

（3）因为$h(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}$，定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，

所以函数$y=h(x)$在点$x=1$处的导数值不存在.

（4）因为$h(x)=f(2x+1)+g(3x-1)=\mathrm{e}^{2x+1}+\ln(3x-1)$，

所以$h'(x)=2\mathrm{e}^{2x+1}+\frac{3}{3x-1}$，所以$h'(1)=2\mathrm{e}^3+\frac{3}{2}$.

**例题 3．（2023 上海·高二课时练习）求下列函数$y=f(x)$的导数：**

**(1)** $f(x)=x^2\sin x$；　**(2)** $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$；　**(3)** $f(x)=(x-2)^2$.

【答案】(1) $f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

(2) $f'(x)=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

(3) $f'(x)=2x-4$

【详解】（1）$f'(x)=(x^2\sin x)'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x$；

（2）$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x+2}\right)'=\frac{(x^2)'(x+2)-x^2(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$；

（3）$f'(x)=\left[(x-2)^2\right]'=(x^2-4x+4)'=(x^2)'-(4x)'+4'=2x-4$.

## 巩固训练

**1．（2023 下·上海黄浦·高二格致中学校考阶段练习）已知函数$y=f(x)$导函数为$y=f'(x)$，且$f(x)=2f'(3)x-2x^2+3\ln x$，则$f(1)=$（　）**

**A．21　　B．20　　C．16　　D．11**

【答案】B

【详解】由$f(x)=2f'(3)x-2x^2+3\ln x$，得$f'(x)=2f'(3)-4x+\frac{3}{x}$，

则$f'(3)=2f'(3)-11$，所以$f'(3)=11$，则$f(1)=2f'(3)-2=22-2=20$，

故选：B

2. （2023下·上海黄浦·高三格致中学校考开学考试）已知函数 $f(x)=2f'(3)\cdot x-\frac{2}{9}x^2+\ln x$，则 $f(1)=$______.

【答案】$\frac{16}{9}$

【详解】因为 $f(x)=2f'(3)\cdot x-\frac{2}{9}x^2+\ln x$，所以 $f'(x)=2f'(3)-\frac{4}{9}x+\frac{1}{x}$，

则 $f'(3)=2f'(3)-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}$，解得：$f'(3)=1$，

所以 $f(x)=2x-\frac{2}{9}x^2+\ln x$，则 $f(1)=2-\frac{2}{9}+\ln 1=\frac{16}{9}$.

故答案为：$\frac{16}{9}$.

3. （2023上·高二课时练习）求下列函数 $y=f(x)$ 的导数：

(1) $f(x)=2x^{e}-e^2$；　(2) $f(x)=e^x\cos x$；　(3) $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$；　(4) $f(x)=\frac{\ln x}{\sin x}$.

【答案】(1) $f'(x)=2ex^{e-1}$ (2) $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$ (3) $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$

(4) $f'(x)=\frac{1}{x\sin x}-\frac{\ln x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$

【详解】（1）$f'(x)=(2x^{e})'-(e^2)'=2ex^{e-1}-0=2ex^{e-1}$；

（2）$f'(x)=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$；

（3）$f'(x)=\frac{(x-1)'(x-2)-(x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=-\frac{1}{(x-2)^2}$；

（4）$f'(x)=\frac{(\ln x)'\sin x-\ln x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{\frac{\sin x}{x}-\ln x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{x\sin x}-\frac{\ln x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$.

## 题型四：求切线方程

例题1. （2023上·上海普陀·高三上海市晋元高级中学校考期中）曲线 $y=e^x$ 在点 $(1,e)$ 处的切线斜率为__________.

【答案】e

【详解】因为 $y=e^x$，则 $y'=e^x$，

可知曲线 $y=e^x$ 在点 $(1,e)$ 处的切线斜率 $k=y'|_{x=1}=e$.

故答案为：e.

例题2. （2023下·上海嘉定·高二上海市嘉定区第一中学校考期中）已知曲线 $f(x)=2x^3-3x$，过点 $(0,0)$ 作曲线的切线，则切线方程______.

【答案】$y=-3x$

**【详解】设切点坐标为**$\left(x_0, 2x_0^3 - 3x_0\right)$**，**

由 $f(x)=2x^3-3x$，得 $f'(x_0)=6x_0^2-3$，

所以曲线 $f(x)$ 在点 $(x_0,2x_0^3-3x_0)$ 处的切线方程为 $y-(2x_0^3-3x_0)=(6x_0^2-3)(x-x_0)$.

因为切线过点 $(0,0)$，所以 $-2x_0^3+3x_0=(6x_0^2-3)(-x_0)$，解得 $x_0=0$.

所以切线方程为 $y=-3x$.

故答案为: $y=-3x$.

例题 3．（2023 上·上海宝山·高三校考期中）已知 $f(x)=x\ln x$.

(1)求 $f(x)$ 的导函数以及驻点.

(2)求平行于 $y=x-5$ 的切线方程;

【答案】(1) $f'(x)=1+\ln x$，驻点为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) $y=x-1$

【详解】（1）$\because f(x)=x\ln x$，$\therefore f'(x)=1+\ln x$，

令 $f'(x)=0$ 即 $1+\ln x=0$，解得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以函数 $f(x)$ 的驻点为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

（2）由 $y=x-5$，切线的斜率 $k=1$，设切点坐标为 $(x_0,y_0)$，

则 $f'(x_0)=1$，解得 $x_0=1$，

则 $y_0=x_0\ln x_0=0$，切点坐标为 $(1,0)$，

所以切线方程为 $y=x-1$.

例题 4．（2023·上海虹口·华东师范大学第一附属中学校考三模）已知函数 $f(x)=ae^x-be^{-x}-(a+1)x$（$a$、$b\in\mathrm{R}$）.

(1)当 $a$=2，$b$=0 时，求函数图象过点 $(0,f(0))$ 的切线方程;

【答案】(1) $x+y-2=0$

【详解】（1）当 $a=2,b=0$ 时，$f(x)=2e^x-3x, f'(x)=2e^x-3$，

$f'(0)=-1, f(0)=2$

所以切线方程为 $y-2=-(x-0)$，即为 $x+y-2=0$.

## 巩固训练

1．（2023 下·上海浦东新·高三上海市实验学校校考开学考试）已知曲线 $f(x)=2x^3-3x$，过点 $M(0,32)$ 作曲线的切线，则切线的方程为__________.

【答案】$21x-y+32=0$

【详解】设切点坐标为 $N(x_0,2x_0^3-3x_0)$，$f'(x)=6x^2-3$,则切线的斜率 $k=f'(x_0)=6x_0^2-3$，

故切线方程为$y=(6x_0^2-3)x+32$，又因为点$N(x_0,2x_0^3-3x_0)$在切线上，

所以$2x_0^3-3x_0=(6x_0^2-3)x_0+32$，整理得到$x_0^3=-8$，

解得$x_0=-2$，所以切线方程为$y=21x+32$.

故答案为：$21x-y+32=0$.

**2．（2023上·上海·高二校考阶段练习）（1）已知函数$f(x)=x^3-x^2-\frac{2}{3}f'(-1)x$，求$f'(-1)$；**

**（2）已知曲线$f(x)=x^3-2x^2+x$，求曲线$y=f(x)$在$x=2$处的切线方程.**

【答案】（1）$f'(-1)=3$；（2）$5x-y-8=0$.

【详解】解：（1）因为$f(x)=x^3-x^2-\frac{2}{3}f'(-1)x$，

等式两边求导可得$f'(x)=3x^2-2x-\frac{2}{3}f'(-1)$，

所以，$f'(-1)=3+2-\frac{2}{3}f'(-1)$，即$\frac{5}{3}f'(-1)=5$，解得$f'(-1)=3$；

（2）因为$f(x)=x^3-2x^2+x$，则$f'(x)=3x^2-4x+1$，

所以，$f(2)=2^3-2\times2^2+2=2$，$f'(2)=3\times2^2-4\times2+1=5$，

所以，曲线$y=f(x)$在$x=2$处的切线方程为$y-2=5(x-2)$，即$5x-y-8=0$.

**3．（2023上·高二课时练习）已知$f(x)=3x^2$，分别求曲线$y=f(x)$在点$P(-1,3)$和点$Q(1,3)$处的切线方程.**

【答案】$f(x)$在点$P(-1,3)$处的切线方程为：$6x+y+3=0$；$f(x)$在点$Q(1,3)$处的切线方程为：$6x-y-3=0$.

【详解】由题，$f'(x)=6x$，

\ $f(x)$在点$P(-1,3)$处的切线斜率为$k=f'(-1)=-6$，

可得$f(x)$在点$P(-1,3)$处的切线方程为：$y-3=-6(x+1)$，即为$6x+y+3=0$；

同样，$f(x)$在点$Q(1,3)$处的切线斜率为$k=f'(1)=6$，

可得$f(x)$在点$Q(1,3)$处的切线方程为：$y-3=6(x-1)$，即为$6x-y-3=0$.

**4．（2023下·上海浦东新·高二上海市川沙中学校考开学考试）（1）曲线$y=1-\frac{2}{x+2}$在点$(-1,-1)$处的切线方程.**

**（2）曲线$f(x)=x^3+x-2$的一条切线平行于直线$y=4x-1$，求切点$P_0$的坐标.**

【答案】（1）$y=2x+1$；（2）$(1,0)$或$(-1,-4)$

【详解】（1）因为$y=1-\frac{2}{x+2}$，所以$y'=\frac{2}{(x+2)^2}$，所以$k=\frac{2}{(-1+2)^2}=2$，所以曲线$y=1-\frac{2}{x+2}$在点$(-1,-1)$

处的切线方程为 $y-(-1)=2[x-(-1)]$，即 $y=2x+1$；

（2）设 $P_0$ 的坐标为 $(m,n)$，则 $n=m^3+m-2$，

$f(x)=x^3+x-2$ 的导数为 $f'(x)=3x^2+1$，在点 $P_0$ 处的切线斜率为 $3m^2+1$，

由切线平行于直线 $y=4x-1$，可得 $3m^2+1=4$，解得 $m=\pm 1$，

所以切点 $P_0$ 的坐标为 $(1,0)$ 或 $(-1,-4)$.

## 题型五：根据切线的斜率求参数

**例题 1．（2023 上·上海青浦·高三校考期中）**已知 $a\in\mathrm{R}$，曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(1,2)$ 且在该点处的切线方程为 $ax+y-5=0$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-2}{h}=$______.

【答案】$-3$

【详解】由点 $(1,2)$ 在直线 $ax+y-5=0$ 上，得 $a=3$，又曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为 $ax+y-5=0$，

则 $f'(1)=-a=-3$，而 $f(1)=2$，所以 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=-3$.

故答案为：$-3$

**例题 2．（2023 下·上海杨浦·高三复旦附中校考阶段练习）**已知 $a,b$ 为实数，函数 $y=\ln x+\dfrac{a}{x}$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $4y-x-b=0$，则 $ab$ 的值为________.

【答案】$\dfrac{3}{2}$/1.5

【详解】因为 $y=\ln x+\dfrac{a}{x}$，所以 $y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}$，

则 $y'|_{x=1}=1-a$，由 $x=1$ 处的切线方程为 $4y-x-b=0$，

得切线的斜率为 $k=\dfrac{1}{4}$，所以 $1-a=\dfrac{1}{4}$，得 $a=\dfrac{3}{4}$，

所以 $y=\ln x+\dfrac{3}{4x}$，当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{3}{4}$，所以切点为 $\left(1,\dfrac{3}{4}\right)$，

将 $\left(1,\dfrac{3}{4}\right)$ 代入切线方程得：$4\times\dfrac{3}{4}-1-b=0$，

解得 $b=2$，所以 $ab=\dfrac{3}{4}\times 2=\dfrac{3}{2}$.

故答案为：$\dfrac{3}{2}$

**例题 3．（2023 上·上海嘉定·高三校考期中）**已知函数 $f(x)=a\left(\mathrm{e}^x+a\right)-x$.

**(1)**当 $a=1$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的图像在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

**(2)**讨论函数 $y=f(x)$ 的单调性；

【答案】(1) $y=2$.

(2)见解析.

【详解】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-x+1$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

得 $f(0)=2$，点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 $f'(0)=0$，

所以函数 $y=f(x)$ 的图像在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为：$y=2$.

（2）由 $f(x)=a\left(\mathrm{e}^x+a\right)-x$ 得 $f'(x)=a\mathrm{e}^x-1$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln\dfrac{1}{a}$，

当 $x\in\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上所述，

当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

## 巩固训练

1．（2023下·上海松江·高二上海市松江二中校考期中）已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象在点 $M\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程是 $y=2x+1$，则 $f\left(1\right)+f'\left(1\right)=$_____.

【答案】5

【详解】由导数的几何意义可得 $f'\left(1\right)=2$，将点 $M$ 的坐标代入切线方程可得 $f\left(1\right)=2\times1+1=3$，

因此，$f\left(1\right)+f'\left(1\right)=5$.

故答案为：5.

2．（2023·上海·高二专题练习）函数 $f\left(x\right)=x^3-a\ln x$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与直线 $2x+y+1=0$ 平行，则实数 $a=$_____.

【答案】5

【详解】∵ $f\left(x\right)=x^3-a\ln x$，则 $f'\left(x\right)=3x^2-\dfrac{a}{x}$，

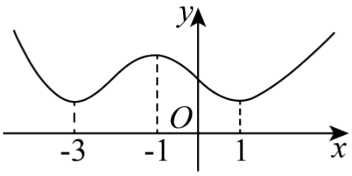
∴ $f'\left(1\right)=3-a$，

若切线与直线 $2x+y+1=0$ 平行，则 $f'\left(1\right)=3-a=-2$，解得 $a=5$.

故答案为：5.

## 题型六：函数的单调性与图象

例题 1．（2023 上·上海松江·高三统考期末）函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象如图所示，$y=f'\left(x\right)$ 为函数 $y=f\left(x\right)$ 的导函数，则不等式 $\frac{f'(x)}{x}<0$ 的解集为（　）




A．$(-3,-1)$　　　　B．$(0,1)$

C．$(-3,-1)\cup(0,1)$　　　　D．$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

【答案】C

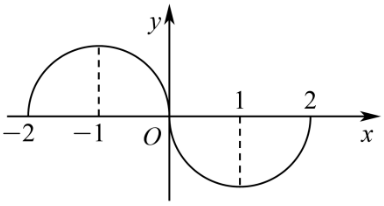
【详解】由图象可知，在区间 $\left(-\infty,-3\right),\left(-1,1\right)$ 上 $f'\left(x\right)<0$，

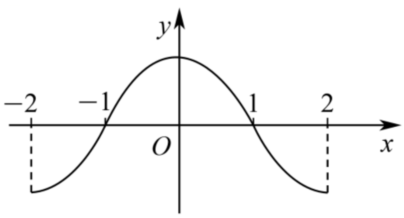
在区间 $\left(-3,-1\right),\left(1,+\infty\right)$ 上 $f'\left(x\right)>0$，

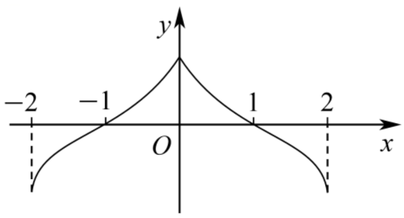
所以不等式 $\frac{f'(x)}{x}<0$ 的解集为 $(-3,-1)\cup(0,1)$．

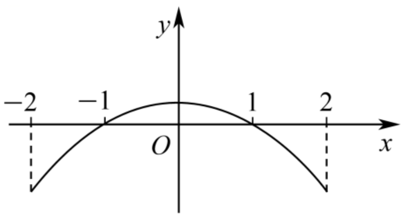
故选：C

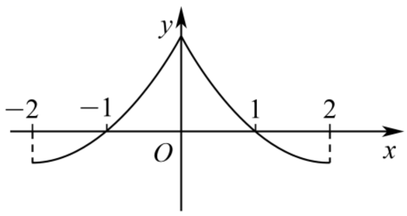
例题 2．（2023 下·高二单元测试）已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 图像如图所示，则 $f(x)$ 的图像是图四个图像中的（　）．




A．



B．



C．



D．



【答案】A

【详解】由题意可知，当 $-2<x<0$ 时，$f'\left(x\right)>0$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-2,0\right)$ 上单调递增，

当 $0<x<2$ 时，$f'\left(x\right)<0$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\right)$ 上单调递减，

当 $-2<x<-1$ 时，$f'\left(x\right)$ 单调递增，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-2,-1\right)$ 上增的越来越快，

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)$ 单调递减，则 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上增的越来越慢，

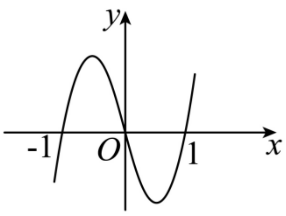
当 $0<x<1$ 时，$f'(x)$ 单调递减，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上减的越来越快，

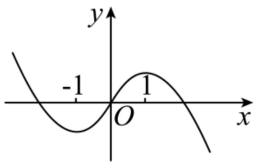
当 $1<x<0$ 时，$f'(x)$ 单调递增，则 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上减的越来越慢，

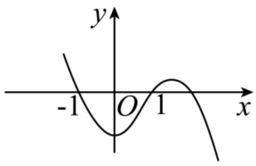
只有 **A** 选项符合.

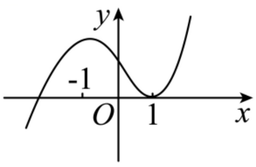
故选：**A.**

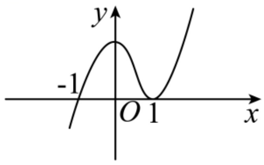
**例题 3．（2022 下·上海浦东新·高二校考期末）**已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如图所示（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），则下面四个图象中，$y=f(x)$ 的图象大致是（　）




**A.** 


**B.** 


**C.** 


**D.** 


【答案】**C**

【详解】由题给函数 $y=xf'(x)$ 的图象，可得

当 $x<-1$ 时，$xf'(x)<0$，则 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；

当 $-1<x<0$ 时，$xf'(x)>0$，则 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减；

当 $0<x<1$ 时，$xf'(x)<0$，则 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$xf'(x)>0$，则 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；

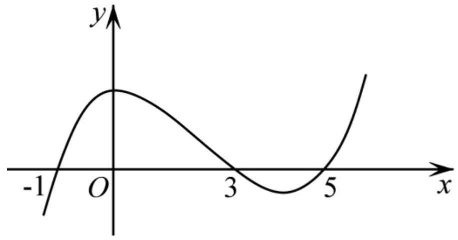
则 $f(x)$ 单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$；单调递减区间为 $(-1,1)$

故仅选项 **C** 符合要求.

故选：**C**

## 巩固训练

**1．（2023 下·上海浦东新·高二上海市建平中学校考阶段练习）**定义在 $\mathrm{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，如图是 $f'(x)$ 的图像，下列说法中不正确的是（　）




**A．** $[-1,3]$为函数$f(x)$的单调增区间

**B．** $[3,5]$为函数$f(x)$的单调减区间

**C．** 函数$f(x)$在$x=0$处取得极大值

**D．** 函数$f(x)$在$x=5$处取得极小值

**【答案】C**

**【详解】对选项 A：** $x\in[-1,3]$时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$单调递增，正确；

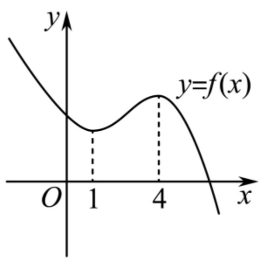
**对选项 B：** $x\in[3,5]$时，$f'(x)\leq 0$，$f(x)$单调递减，正确；

**对选项 C：** $x\in[-1,3]$时，$f(x)$单调递增，错误；

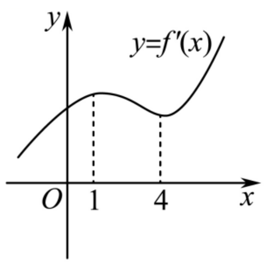
**对选项 D：** $x\in[3,5]$时，$f(x)$单调递减，当$x\in(5,+\infty)$时，$f(x)$单调递增，函数$f(x)$在$x=5$处取得极小值，正确；

故选：**C．**

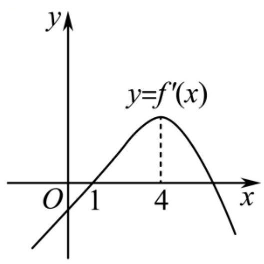
**2．**（**2023** 下·上海松江·高二上海市松江一中校考期末）设函数$f(x)$的图像如图所示，则导函数$f'(x)$的图像可能为（　）



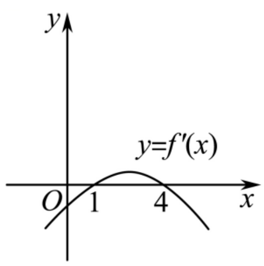

**A．**



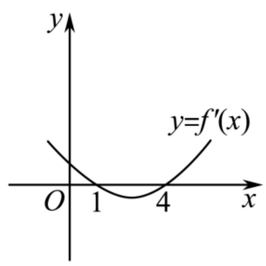

**B．**




**C．**




**D．**



【答案】C

【详解】解：由 $f(x)$ 的图像知:当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，$f'(x)<0$，

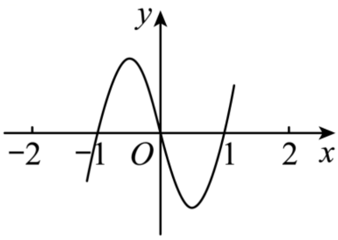
当 $x\in(1,4)$ 时，$f(x)$ 单调递增，$f'(x)>0$，

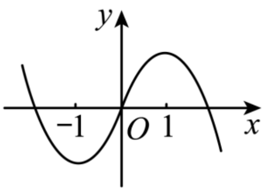
当 $x\in(4,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递减，$f'(x)<0$，

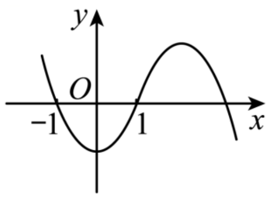
由选项各图知：选项 C 符合题意，

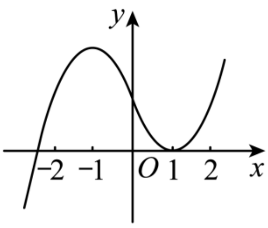
故选：C.

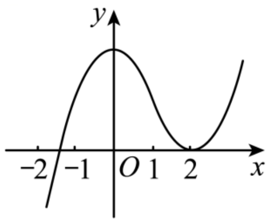
3．（2023 下·上海·高二专题练习）已知函数 $y=-xf'(x)$ 的图象如图所示，其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，则函数 $y=f(x)$ 的大致图象可以是




A. 


B. 


C. 


D. 


【答案】A

【详解】分析：讨论 x<﹣1，﹣1<x<0，0<x<1，x>1 时，$f'(x)$ 的正负，从而得函数 $f(x)$ 的单调性，即可得解.

详解：由函数 $y=-xf'(x)$ 的图象得到：

当 x<﹣1 时，f′（x）<0，f（x）是减函数；

当﹣1<x<0 时，f′（x）>0，f（x）是增函数；

当 0<x<1 时，f′（x）>0，f（x）是增函数；

当 x>1 时，f′（x）<0，f（x）是减函数.

由此得到函数 y=f（x）的大致图象可以是 A.

故选 A.

## 题型七：根据函数的单调性求参数（小题）

例题 1．（2023 上·上海静安·高三上海市市西中学校考期中）函数 $f(x)=x^3+ax$ 在区间 $[-2,3]$ 上是单调函数，

则实数 $a$ 的取值范围是_____.

【答案】$(-\infty,-27]\cup[0,+\infty)$

【详解】因为函数 $f(x)=x^3+ax$ 在区间 $[-2,3]$ 上是单调函数，

则 $f'(x)=3x^2+a$ 在 $[-2,3]$ 上有 $f'(x)\geq 0$ 或 $f'(x)\leq 0$ 恒成立，

当 $f'(x)\geq 0$ 时，即 $a\geq -3x^2$，则 $a\geq 0$，

当 $f'(x)\leq 0$ 时，即 $a\leq -3x^2$，则 $a\leq -27$，

综上：实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,-27]\cup[0,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,-27]\cup[0,+\infty)$

例题 2．（2019 下·上海徐汇·高二上海市第二中学校考期末）已知函数 $y=x^2-4ax$ 在 $[1,3]$ 上单调递增，则实数 $a$ 的取值范围_____.

【答案】$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

【详解】解：因为 $y=x^2-4ax$，所以 $y'=2x-4a$，

因为函数 $y=x^2-4ax$ 在 $[1,3]$ 上单调递增，所以 $y'=2x-4a\geq 0$ 在 $x\in[1,3]$ 恒成立，

即 $a\leq\frac{x}{2}$ 在 $x\in[1,3]$ 恒成立，

又 当 $x=1$ 时，$\frac{x}{2}$ 取最小值 $\frac{1}{2}$，

即 $a\leq\frac{1}{2}$，

故答案为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

例题 3．（2023 上·上海·高三校考期中）若函数 $f(x)=\sin x+a\cos x$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$ 上是严格单调函数，则实数 $a$ 的取值范围为__________.

【答案】$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$

【详解】$f'(x)=\cos x-a\sin x$，

函数 $f(x)=\sin x+a\cos x$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$ 上是严格单调函数，

所以 $f'(x)\geq 0$，或 $f'(x)\leq 0$，

当 $x=\pi$ 时，$f'(\pi)=-1, f'(x)\geq 0$ 不符合题意；

由 $f'(x)\leq 0$ 时，得 $a\sin x\geq\cos x$，

当$x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$时，$\sin x>0$，所以$a\ge\dfrac{1}{\tan x}$在$x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$上恒成立，

即求$a\ge\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)_{\max}$，因为$x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$，所以$\tan x\in\left(-\sqrt{3},0\right)$，$\dfrac{1}{\tan x}\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

所以$a\ge-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

当$x\in\left(\pi,\dfrac{7\pi}{6}\right)$时，$\sin x<0$，所以$a\le\dfrac{1}{\tan x}$在$x\in\left(\pi,\dfrac{7\pi}{6}\right)$上恒成立，

即求$a\le\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)_{\min}$，因为$x\in\left(\pi,\dfrac{7\pi}{6}\right)$，所以$\tan x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\dfrac{1}{\tan x}\in\left(\sqrt{3},+\infty\right)$，

即$a\le\sqrt{3}$；

综上所述，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le a\le\sqrt{3}$.

故答案为：$\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$.

**例题4．（2023下·上海松江·高二上海市松江一中校考期末）函数$y=x^3+(k-1)x^2+(k+5)x-1$在$(0,3)$上不单调，则实数$k$的取值范围是______.**

【答案】$(-5,-2)$

【详解】因为$y=x^3+(k-1)x^2+(k+5)x-1$，所以$f'(x)=3x^2+2(k-1)x+(k+5)$，

又因为函数$f(x)$在区间$(0,3)$上不单调，所以$f'(x)=0$在$(0,3)$内有实数根，且无重根，

即$3x^2+2(k-1)x+(k+5)=0$有两个不相等的实数根，且至少有一个实数根在区间$(0,3)$内，

①若$f'(0)=k+5=0$，则$k=-5$，$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$，

方程$f'(x)=0$的两个实根0和4均不在区间$(0,3)$内，所以$k\ne-5$；

②若$f'(3)=7k+26=0$，则$k=-\dfrac{26}{7}$，$f'(x)=3(x-3)\left(x-\dfrac{1}{7}\right)$，

方程$f'(x)=0$在区间$(0,3)$内有实根$\dfrac{1}{7}$，所以$k$可以为$-\dfrac{26}{7}$；

③若方程$f'(x)=0$有一个实根在区间$(0,3)$内，另一个实根在区间$[0,3]$外，

则$f'(0)\cdot f'(3)<0$，即$(k+5)(7k+26)<0$，$-5<k<-\dfrac{26}{7}$；

④若方程$f'(x)=0$在区间$(0,3)$内有两个不相等的实根，

则：$\begin{cases} f'(3)=7k+26>0 \\ f'(0)=k+5>0 \\ 0<-\dfrac{k-1}{3}<3 \\ \Delta=4(k-1)^2-12(k+5)>0 \end{cases}$，∴$\begin{cases} k>-\dfrac{26}{7} \\ k>-5 \\ -8<k<1 \\ (k+2)(k-7)>0 \end{cases}$，

∴$-\dfrac{26}{7}<k<-2$；

综合①②③④得 $k$ 的取值范围是 $(-5,-2)$.

故答案为：$(-5,-2)$

## 巩固训练

**1．（2023 下·上海浦东新·高二上海市建平中学校考阶段练习）若函数 $y=-x^3+ax$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格减，则 $a$ 的取值范围是_______.**

【答案】$(-\infty,3]$

【详解】由题意知 $f'(x)=-3x^2+a$，则 $f'(x)\le 0$ 在 $[1,+\infty)$ 恒成立，即 $a\le 3x^2$，故 $a\le 3$.

故答案为：$(-\infty,3]$

**2．（2023 上·上海浦东新·高三校考期中）已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，则 $a$ 的最小值为________.**

【答案】$e^{-1}/\dfrac{1}{e}$

【详解】因为 $f(x)=ae^x-\ln x\,(x>0)$，

所以 $f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x}$，

所以函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，

即 $f'(x)\ge 0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，

显然 $a>0$，所以问题转化为 $xe^x\ge\dfrac{1}{a}$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，

设 $g(x)=xe^x, x\in(1,2)$，

所以 $g'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(1)=e$，

故 $e\ge\dfrac{1}{a}\Rightarrow a\ge\dfrac{1}{e}$，

所以 $a$ 的最小值为：$\dfrac{1}{e}$.

故答案为：$\frac{1}{\mathrm{e}}$.

3．（2023下·上海杨浦·高二复旦附中校考期中）已知函数$y=f(x)=7x+n\cos(3x+7)$在定义域R上不单调，则正整数$n$的最小值是________.

【答案】3

【详解】函数$y=f(x)=7x+n\cos(3x+7)$，则$f'(x)=7-3n\sin(3x+7)$，

因为$n$为正整数，当$\sin(3x+7)<0$时，$f'(x)>7$，$f(x)$在R上存在递增区间；

若$f(x)$在R上存在递减区间，即$f'(x)<0$有解，则$f'(x)_{\min}=7-3n<0$，

所以$n>\frac{7}{3}$，所以正整数$n$的最小值是$3$.

故答案为：$3$.

4．（2022上·上海静安·高一校考期中）若函数$y=2x^2-kx+8$在区间$(2,5)$上不是单调函数，则实数$k$的取值范围_______.

【答案】$(8,20)$

【详解】解：因为$y=2x^2-kx+8$，所以函数的对称轴为$x=\frac{k}{4}$，

因为函数在区间$(2,5)$上不是单调函数，

所以$2<\frac{k}{4}<5$，解得$8<k<20$，即实数$k$的取值范围为$(8,20)$.

故答案为：$(8,20)$

## 题型八：讨论含参数函数的单调性问题

例题1．（2023下·上海浦东新·高二校考期中）已知$f(x)=\ln x+ax$.

(1)若$a=0$，求$f(x)$在$(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$处的切线方程；

(2)讨论$f(x)$的单调性；

【答案】(1)$x-\mathrm{e}y=0$

(2)答案见详解

【详解】（1）当$a=0$时，$f(x)=\ln x, f(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}=1$，则$f'(x)=\frac{1}{x}$，

所以$f(x)$在点$(\mathrm{e},1)$处的切线斜率$k=f'(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以所求切线方程为$y-1=\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，即$x-\mathrm{e}y=0$.

（2）由$f(x)=\ln x+ax, x>0$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}+a=\frac{1+ax}{x}$，

当$a\geq 0$时，$f'(x)>0$，所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；