雅礼教育集团 2024 年上学期期末考试试卷

高一数学

时量：120 分钟　分值：150 分

命题人：邹佳乐　审题人：张鎏　彭熹

一、选择题：本题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1. 已知集合 $A=\left\{x\mid x^2-x<6\right\},B=\left\{x\middle|x+1\rangle 0\right\}$，则 $A\mathrm{I}\ B=$（　　）

A. $\left\{x\middle|-2<x<3\right\}$　　B. $\left\{x\middle|-2<x<-1\right\}$　　C. $\left\{x\middle|-1<x<3\right\}$　　D. $\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$

【答案】C

【解析】

【分析】先化简求解不等式，再由交集运算可得.

【详解】由 $x^2-x-6<0$ 解得 $-2<x<3$，$A=\left\{x\mid -2<x<3\right\}$，

由 $x+1>0$ 解得 $x>-1$，$B=\left\{x\mid x>-1\right\}$，

则 $A\cap B=\left\{x\middle|-1<x<3\right\}$，

故选：C.

2. 已知复数 $z=\dfrac{10\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$，则 $|z|=$（　　）

A. 3　　B. $\sqrt{10}$　　C. 4　　D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】根据复数的除法计算可化简复数 z，进而可得 $|z|$.

【详解】由 $z=\dfrac{10\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}=\dfrac{10\mathrm{i}(1+3\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}=\dfrac{10\mathrm{i}+30\mathrm{i}^2}{1-9\mathrm{i}^2}=\dfrac{-30+10\mathrm{i}}{10}=-3+\mathrm{i}$，

所以 $|z|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$，

故选：B.

3. 某同学掷骰子 5 次，记录了每次骰子出现的点数，则从以下情况中可以判断出这组数据一定没有出现点数 6 的是（　　）

A. 平均数为 3，中位数为 2　　　　B. 中位数为 3，众数为 2

C. 中位数为 3，方差为 2.8　　　　D. 平均数为 2，方差为 2.4

【答案】D

【解析】

【分析】举特例可说明的 A、B、C 正误，利用方差的计算公式可判断 D.

【详解】五次点数分别为 2，2，2，3，6 时，满足平均数为 3，中位数为 2，故 A 中可出现点数 6;

五次点数分别为 2，2，3，5，6 时，满足中位数为 3，众数为 2，故 B 中可出现点数 6;

五次点数分别为 2，3，3，6，6 时，满足中位数为 3，方差为 2.8，故 C 中可出现点数 6;

若平均数为 2，出现了 6，那么方差至少为 $\frac{1}{5}(6-2)^2=\frac{16}{5}=3.2>2.4$，

故 D 中不可能出现点数 6，

故选：D.

4. 已知 $\tan\alpha=\sqrt{2}$，α 为第三象限角，则 $\sqrt{2}\sin\alpha+\cos\alpha=$（　　）

A. $-\sqrt{2}$　　B. $-2\sqrt{2}$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $-2\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用同角三角函数的商数与平方关系求解 $\cos^2\alpha$，再根据 α 所在象限求解即 $\sin\alpha,\cos\alpha$,代入可得.

【详解】由 $\tan\alpha=\sqrt{2}$，得 $\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$，所以 $\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha$，

联立 $\begin{cases}\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$，解得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$，

因为 α 为第三象限角，

所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故 $\sqrt{2}\sin\alpha+\cos\alpha=2\cos\alpha+\cos\alpha=3\cos\alpha=3\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\sqrt{3}$

故选：C.

5. 函数 $f(x)=x^2+(a-1)x+1$ 有两个零点的充分不必要条件是（　　）

A. $a>3$　　　　B. $-1<a<3$

C. $a<-1$ 或 $a>3$　　　　D. $a<0$

【答案】A

【解析】

【分析】由题意求出 a 的取值范围，结合选项判断哪个选项对应集合为其真子集，即可确定答案.

【详解】函数 $f\left(x\right)=x^2+\left(a-1\right)x+1$ 有两个零点，则 $x^2+\left(a-1\right)x+1=0$ 有 2 个不等实数根，

即 $(a-1)^2-4>0,\therefore a>3$ 或 $a<-1$，

由于 $(3,+\infty)$ □ $(3,+\infty)\cup(-\infty,-1)$，

故 $a>3$ 为函数 $f\left(x\right)=x^2+\left(a-1\right)x+1$ 有两个零点的充分不必要条件，

显然 $-1<a<3$，$a<0$ 均不能推出 $a>3$ 或 $a<-1$，不符合题意；

$a<-1$ 或 $a>3$ 是函数 $f\left(x\right)=x^2+\left(a-1\right)x+1$ 有两个零点的充分必要条件，

故选：A

6. 设点 $A\left(-1,0\right)$、$B\left(1,0\right)$，若直线 $2x+y-b=0$ 与线段 AB 相交，则 b 的取值范围是（　　）

A. $\left[2,+\infty\right)$　　　　B. $\left[0,2\right]$

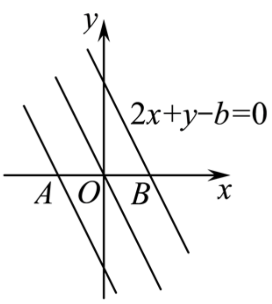
C. $\left[-2,2\right]$　　　　D. $\left(-2,2\right]$

【答案】C

【解析】

【分析】分析可知 b 为直线 $y=-2x+b$ 在 y 轴上的截距，数形结合求出 b 的最大值和最小值，即可得出 b 的取值范围.

【详解】如下图所示：



化直线方程为 $y=-2x+b$，则 b 为直线 $y=-2x+b$ 在 y 轴上的截距，

观察图象可知，当直线 $y=-2x+b$ 过点 A 时，b 取最小值，此时 $2+b=0$，可得 $b=-2$；

当直线 $y=-2x+b$ 过点 B 时，b 取最大值，此时 $-2+b=0$，可得 $b=2$.

综上所述，b 的取值范围是 $[-2,2]$.

故选：C.

7. 已知正数 x，y 满足 $2\sqrt{3}x+2y-xy=0$，则当 xy 取得最小值时，$x+2y=$（　　）

A. $4+8\sqrt{3}$　　B. $2+4\sqrt{3}$　　C. $3+6\sqrt{3}$　　D. $8+6\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据条件，利用基本不等式及取等号的条件，可得 $x=4$，$y=4\sqrt{3}$，即可求出结果.

【详解】由题意可得 $\sqrt{3}x+y=\dfrac{1}{2}xy\geq 2\sqrt{\sqrt{3}xy}$，平方得 $xy\geq 16\sqrt{3}$，

当且仅当 $\sqrt{3}x=y$，即 $x=4$，$y=4\sqrt{3}$ 时取得等号，

故 xy 取得最小值时，$x+2y=4+8\sqrt{3}$.

故选：A.

8. 已知四面体 $ABCD$ 的各顶点均在球 O 的球面上，平面 $ABC\perp$ 平面 $BCD, AB=BC=AC=CD=2,$ $BC\perp CD$，则球 O 的表面积为（　　）

A. $\dfrac{16\pi}{3}$　　B. 8π　　C. $\dfrac{28\pi}{3}$　　D. 12π

【答案】C

【解析】

【分析】先找 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心，过圆心分别作两个三角形所在平面的垂线，两垂线的交点就是球心.

【详解】如图，取 BC 的中点为 E，BD 的中点为 F，所以 F 为 $\triangle BCD$ 的外心，

连接 AE，EF，设 $\triangle ABC$ 的外心为 G，

因为 $AB=BC=AC=2$，即 $\triangle ABC$ 为等边三角形，

所以点 G 在 AE 上，且设球心为 O，连接 OG，OF，

则 $OG\perp$ 平面 $ABC, OF\perp$ 平面 BCD，

因为平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，所以 $OG\perp OF$，

因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，E 为 BC 的中点，所以 $AE\perp BC$，

因为平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$， $AE\subset$ 面 ABC，

所以 $AE\perp$ 平面 BCD，则 $AE// OF$，又 $EF\subset$ 平面 BCD，所以 $AE\perp EF$，

同理 $EF\perp$ 平面 ABC，所以 $EF// OG$，故四边形 $OGEF$ 是矩形.

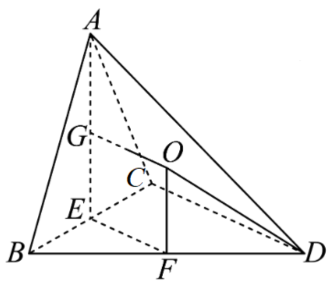
由 $BC\perp CD$，可得 $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，故 $DF=\sqrt{2}$，

又 $OF=EG=\frac{1}{3}AE=\frac{1}{3}AB\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

设球 O 的半径为 R，则 $R^2=OD^2=OF^2+FD^2=\frac{7}{3}$，

所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{28\pi}{3}$.

故选：C



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 盒子里有 2 个红球和 2 个白球，从中不放回地依次取出 2 个球，设事件 $A=$“两个球颜色相同”， $B=$“第 1 次取出的是红球”， $C=$“第 2 次取出的是红球”， $D=$“两个球颜色不同”.则下列说法正确的是（　　）

A. A 与 B 相互独立　　B. A 与 D 互为对立

C. B 与 C 互斥　　D. B 与 D 相互独立

【答案】ABD

【解析】

【分析】依次列出样本空间，事件 A、B、C、D 包含的基本事件，由事件的基本关系及概率公式一一判定选项即可.

【详解】依题意可设 2 个红球为 a_1，a_2，2 个白球为 b_1，b_2，则样本空间为：

$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_1),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,b_2),$

$\left(b_2,a_1\right),\left(b_2,a_2\right),\left(b_2,b_1\right)\}$，共 12 个基本事件.

事件 $A=\left\{\left(a_1,a_2\right),\left(a_2,a_1\right),\left(b_1,b_2\right),\left(b_2,b_1\right)\right\}$，共 4 个基本事件.

事件 $B=\left\{\left(a_1,a_2\right),\left(a_1,b_1\right),\left(a_1,b_2\right),\left(a_2,a_1\right),\left(a_2,b_1\right),\left(a_2,b_2\right)\right\}$，共 6 个基本事件.

事件 $C=\left\{\left(a_1,a_2\right),\left(a_2,a_1\right),\left(b_1,a_1\right),\left(b_1,a_2\right),\left(b_2,a_1\right),\left(b_2,a_2\right)\right\}$，共 6 个基本事件.

事件 $D=\left\{\left(a_1,b_1\right),\left(a_1,b_2\right),\left(a_2,b_1\right),\left(a_2,b_2\right),\left(b_1,a_1\right),\left(b_1,a_2\right),\left(b_2,a_1\right),\left(b_2,a_2\right)\right\}$，

共 8 个基本事件.

对于 A 选项，因 $P\left(A\right)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3},P\left(B\right)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},P\left(AB\right)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，

则 $P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)=P\left(AB\right)$，故 A 与 B 相互独立，故 A 正确；

对于 B 选项，注意到 $A\cap D=\varnothing$，$A\cup D=\Omega$，得 A 与 D 互为对立事件，故 B 正确；

对于 C 选项，注意到 $B\cap C\neq\varnothing$，则 B 与 C 不互斥，故 C 错误；

对于 D 选项，因 $P\left(B\right)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，$P\left(D\right)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，$P\left(BD\right)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，

则 $P\left(D\right)\cdot P\left(B\right)=P\left(DB\right)$，故 D 与 B 相互独立，故 D 正确.

故选：ABD

10. 已知函数 $f(x)=\cos 2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$，则下列命题正确的是（　　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π；

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称；

C. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减；

D. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度后所得到的图象与函数 $y=2\sin 2x$ 的图象重合.

【答案】AB

【解析】

【分析】根据二倍角的正弦公式和辅助角公式可得 $f(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$，结合余弦函数的图象与性质依次判断选项即可求解.

【详解】$f(x)=\cos 2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$.

A：函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 正确；

B：$f(\dfrac{\pi}{3})=2\cos(2\times\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3})=2\cos\pi=-2$，为 $f(x)$ 的最小值，故 B 正确；

C：由 $-\dfrac{2\pi}{3}\le x\le-\dfrac{\pi}{6}$，得 $-\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le 0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}]$ 上单调递增，故 C 错误；

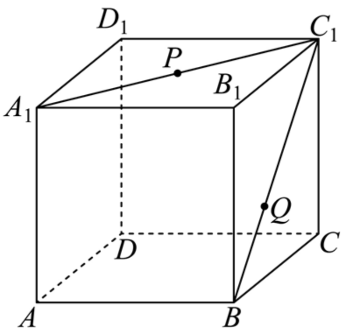
D：将函数 $f(x)$ 图象向左平移 $\dfrac{5\pi}{12}$ 个单位长度，

得 $y=2\cos[2(x+\dfrac{5\pi}{12})+\dfrac{\pi}{3}]=2\cos(2x+\dfrac{7\pi}{6})=-2\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})$ 图象，

与函数 $y=2\sin 2x$ 的图象不重合，故 D 错误；

故选：AB

11. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为线段 A_1C_1 的中点，Q 为线段 BC_1 上的动点．则下列结论正确的是（　　）



A. 存在点 Q．使得 $PQ//BD$

B. 存在点 Q，使得 $PQ\perp$ 平面 AB_1C_1D

C. 三棱锥 $Q-APD$ 的体积不是定值

D. 存在点 Q．使得 $PQ\perp AC$

【答案】BCD

【解析】

【分析】对于 A，由 $BD//B_1D_1$、$B_1D_1\cap PQ=P$ 即可判断；对于 B，若 Q 为 BC_1 中点，根据正方体、线面的性质及判定即可判断；

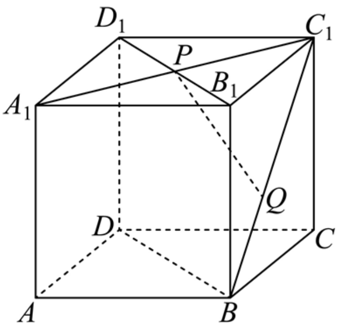
对于 C，只需求证 BC_1 与面 APD 是否平行；对于 D，证明 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1 即可判断．

【详解】对于 A，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1//DD_1$，$BB_1=DD_1$，

则四边形 BB_1D_1D 为平行四边形，所以，$BD//B_1D_1$，

而 P 为线段 A_1C_1 的中点，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形，

所以 P 为 B_1D_1 的中点，所以 $B_1D_1 \cap PQ = P$，



若存在点 Q，使得 $BD//PQ$，且 B_1D_1、PQ 不重合，

又 $BD // B_1D_1$，所以 $PQ//B_1D_1$，

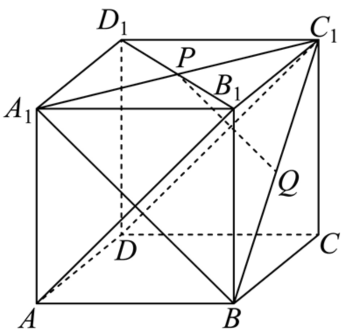
这与 $B_1D_1 \cap PQ = P$ 矛盾，假设不成立，A 错误；

对于 B，若 Q 为 BC_1 中点，则 $PQ//A_1B$，而 $A_1B \perp AB_1$，故 $PQ \perp AB_1$，

又 $AD \perp$ 面 ABB_1A_1，$A_1B \subset$ 面 ABB_1A_1，则 $A_1B \perp AD$，故 $PQ \perp AD$，

因为 $AB_1 \cap AD = A$，AB_1、$AD \subset$ 平面 AB_1C_1D，则 $PQ \perp$ 平面 AB_1C_1D，

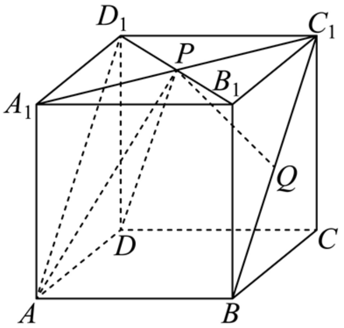
所以存在 Q 使得 $PQ \perp$ 平面 AB_1C_1D，B 正确；



对于 C，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//C_1D_1$，$AB = C_1D_1$，

所以，四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，则 $BC_1//AD_1$，

而 $AD_1 \cap$ 面 $APD = A$，故 BC_1 与面 APD 不平行，



所以 Q 在线段 BC_1 上运动时，Q 到面 APD 的距离不是定值，又 $\triangle APD$ 的面积为定值，

故三棱锥 $Q-APD$ 的体积不是定值，C 正确；

对于 D，因为 $AC \perp BD, AC \perp BB_1$，

$BD, BB_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1，$BD \cap BB_1 = B$，

所以 $AC \perp$ 平面 BDD_1B_1，又 $BP \subset$ 平面 BDD_1B_1，

所以 $AC \perp BP$，

所以若点 Q 与点 B 重合，则 $PQ \perp AC$，D 正确，

故选：BCD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

12. 已知向量 $\vec{a} = (-22,90,28), \vec{b} = (11,-45,k)$，若 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线，则 $k =$___________.

【答案】-14

【解析】

【分析】根据向量共线即可确定 k 的取值.

【详解】向量 $\vec{a} = (-22,90,28)$，$\vec{b} = (11,-45,k)$，

若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共线，则有 $\vec{a} = -2\vec{b}$，则有 $-2k = 28$，$k = -14$.

故答案为：-14.

13. 底面半径为 4 的圆锥被平行于底面的平面所截，截去一个底面半径为 1，母线长为 3 的圆锥，则所得圆台的侧面积为__________.

【答案】45π

【解析】

【分析】根据相似可得母线，进而利用圆锥的侧面积公式即可求解.

【详解】如图，设原圆锥的母线为l，则$\frac{1}{4}=\frac{3}{l}$，则$l=12$，

所以圆台的侧面积为：$\pi\times(1+4)\times(12-3)=45\pi$.

故答案为：45π

14. 已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别是a，b，c，$B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),a=3,b=2c$，且

$9\sin B-2\sin C=2\sqrt{15}$，则$\triangle ABC$的周长为______.

【答案】9

【解析】

【分析】由题知$\sin B=2\sin C$，进而结合题意得$\sin C=\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos C=\frac{7}{8}$，再根据余弦定理解方程即可得答案.

【详解】解因为$b=2c$，所以$\sin B=2\sin C$，$b>c$

又因为$9\sin B-2\sin C=2\sqrt{15}$，

所以$\sin C=\frac{\sqrt{15}}{8}$，又$C$为锐角，所以$\cos C=\frac{7}{8}$，

由余弦定理得$c^2=4c^2+9-2\times3\times2c\times\frac{7}{8}$，解得$c=2$或$c=\frac{3}{2}$，

因为当$c=\frac{3}{2}$时，$b=2c=a=3$，此时$\angle ABC$一定不是钝角，故舍去.

所以$c=2$，所以$\triangle ABC$的周长为$2+4+3=9$.

故答案为：9

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 已知a，b，c分别为$\triangle ABC$的三个内角A，B，C的对边，且$b^2+c^2+bc=a^2$.

（1）求角A；

（2）若$a=2\sqrt{3}$，$b+c=4$，求$\triangle ABC$的面积.

【答案】（1）$\frac{2\pi}{3}$

（2）$\sqrt{3}$

【解析】