系　泊　系　统　的　设　计

摘要

本文详细对系泊系统的各个机构进行了力学分析，针对系泊系统的要求，建立优化模型，求解系泊系统在多种环境下的最优解，使得浮标游动范围，吃水程度和钢桶倾斜角度尽可能的小。

针对问题一，本文对系泊系统的受力及力矩进行了分析，基于浮标倾斜的考虑，得到了平衡状态下关于受力平衡及力矩平衡的方程组。由于方程组数量较多及相互影响的特点，直接求解十分困难。因此我们考虑以浮标两边的浸水长度h_1,h_2为变量，利用搜索算法对方程组进行求解，并得到相应的结果。如当风速为12m/s时，钢桶的倾斜角度1.0405°，从上到下钢管的倾斜角度分别为1.0086°、1.0146°、1.0206°、1.0267°，浮标吃水深度0.735m，浮标游动区域半径14.4429m。

针对问题二，首先将风速为36m/s的情况代入问题一建立的模型中，但是得到的结果不满足题目所给定的要求。则考虑在重物球质量一定的条件下，以浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角为目标，建立了一个单决策变量的多目标最优系泊模型，相比于问题一，此问的变量更多，更加难于求解，故考虑将多目标转化成单目标的问题进行求解，并继续使用搜索法对问题进行求解。最后找到了三组可行解，其中最优解是重力球的质量为2102kg.

针对问题三，本文中有三个决策变量以及三个变系数，相比于前两问，无论是计算量还是计算维数，难度更大。为了求解该问，建立了一个多决策变量的多目标变系数的最优系泊系统模型，为了简便运算，我们建立了变步长的搜索算法，并最终求解得到结果，得到的一组解为:选用了III型号的锚链，重物球质量为2800kg，锚链长度为23.4m。

针对论文的实际情况，对论文的优缺点做了评价，文章最后还给出了其他的改进方向，以用于指导实际应用。

关键词：系泊系统设计；力的平移定理；多目标；优化模型；搜索算法

1．问题的重述

一个由浮标系统、系泊系统和水声通讯系统组成的近浅海观测网的传输节点。可以简化看作是一个浮于海平面的圆柱体浮标通过四节钢管链接装有通讯设备的钢桶，钢桶再通过锚链链接一个可以移动的锚，锚沉在海床上。为了不让锚被拖行要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过 16 度，并且要保证通讯设备的工作效果，钢桶与电焊锚链链接出可悬挂重物体，使得钢桶的倾斜角度（钢桶与竖直线的夹角）不超过 5 度。

需要建立模型讨论并解决下列的几个问题：

1. 若海水静止，在选用 II 型电焊锚链 22.05m，重物球的质量为 1200kg，布放水

深为 18m，海床平坦，海水密度为 $1.025\times10^3 kg/m^3$ 的条件下，分别计算海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

2. 在问题 1 的假设下，计算海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚

链形状和浮标的游动区域。并调节重物球的质量，使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度，锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。

3. 若布放海域的实测水深介于 16m-20m 之间。布放点的海水速度最大可达到 1.5m/s、风速最大可达到 36m/s。给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计，分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

2．模型的假设

（1）假设两钢管用铰链链接在一起，可以自由转动。

（2）假设风是沿平行海平面的方向吹来。

（3）假设忽略锚链和重物球的浮力影响。

（4）假设忽略由于其它原因（如温度，湿度，受力等）而对各个系统产生的形变。

（5）假设浮标不会出现因为风力过大而被吹翻的情况。

（6）假设各个系统之间连接处的长度忽略不计。

3．符号说明

F_{wind}：浮标所受水平方向的风力大小；

$F_{buoyantA}$：浮标所受浮力大小；

$F_{buoyantB}$：每节钢管所受浮力大小；

$F_{buoyantC}$：钢桶所受浮力大小；

F_{B_0}：第一节钢管对浮标拉力的大小(或浮标对第一节钢管拉力的大小)；

F_{B_i}：第i节钢管下端所受拉力的大小（$i=1,2,3,4$）；

$F_C(F_{D_0})$：钢桶所受锚链的拉力大小(或锚链上方第一段所受钢桶的拉力大小)；

F_{D_j}：锚链第j段(自上而下)下端所受拉力大小（$j=1,2,\mathrm{L}\ ,N$，其中N为张紧状态锚链的段数)；

F_f：锚与海底间的摩擦力；

$F_{\max}$：锚与海底间的最大静摩擦力；

F_{waterA}：浮标所受的水流力大小；

F_{waterB_i}：第i节钢管所受水流力大小（$i=1,2,3,4$）；

F_{waterC}：钢桶所受水流力大小；

μ：锚与海底间的最大静摩擦系数；

F_N：海底对锚的支持力；

G_A：浮标的重力；

G_B：每节钢管的重力；

G_C：表示钢桶的重力；

G_D：锚链每段链环的重力；

G_E：锚的重力；

θ_{B_0}：第一节钢管对浮标拉力与水平方向的夹角；

θ_{B_i}：第i节钢管下端所受拉力与水平方向的夹角（$i=1,2,3,4$）；

$\theta_C(\theta_{D_0})$：钢桶所受锚链的拉力与水平方向的夹角；

θ_{D_j}：锚链第j段（自上而下）下端所受拉力与水平方向的夹角（$j=1,2,\mathrm{L}\ ,N$）；

α_A：浮标的水平倾斜角度；

α_{B_i}：第i节钢管的水平倾斜角度（$i=1,2,3,4$）；

α_c：钢桶的水平倾斜角度；

h_1,h_2：圆柱体浮标两端的浸水长度，其中$h_1 \le h_2$；

h：浮标的吃水深度；

v_{wind}：水平方向的风速；

S_{wind}：浮标在风向法平面的投影面积；

$V_{overflowA}$：浮标的排水体积；

V_{water}：水流速度大小；

m_A：浮标的质量；

m_B：每节钢管的质量；

m_C：钢桶系统的质量；

m：重物球的质量；

ρ：海水密度；

ρ_D：锚链的线密度；

C_{DN}：法向阻力系数；

γC_{DN}：切向阻力系数；

r_A：浮标的底面半径；

r_B：每节钢管的底面半径；

L_B：每节钢管的长度；

r_C：钢桶的底面半径；

L_C：钢桶的长度；

L_D：锚链每段链环的长度；

H：海水深度；

s：锚链某点至锚链上端顶点的弧长；

S_A：浮标浸入水下部分在水流力法平面的投影面积；

S_{B_i}：第i节钢管在水流力法平面的投影面积（$i=1,2,3,4$）；

S_C：钢桶在水流力法平面的投影面积；

T：锚链某点处所受拉力的大小；

φ：锚链某点处所受拉力与水平方向的夹角；

X_A：平衡状态下浮标的水平距离；

X_B：平衡状态下钢管的水平距离；

X_C：平衡状态下钢桶的水平距离；

X_D：平衡状态下锚链的水平距离；

X：平衡状态下整体的水平距离；

y_D：锚链竖直方向上的高度；

$\theta_{\max}$：锚不滑动时，锚链在锚点与海床的最大夹角；

D_α：单位长度上锚链所受的法向水流力大小；

D_β：单位长度上锚链所受的切向水流力大小；

4. 模型的建立与求解

4.1 问题的分析

4.1.1 系统平衡的两种状态——张紧状态和松弛状态及游动区域的理解

本文考虑的在风力及水流力作用下的系泊系统的设计问题，首先我们考虑一种简单情形，即海水静止且风向水平情况，此时整个系泊系统可能会因风力移动达到一个平衡的状态，由于风向恒定我们可以认为最终的平衡状态中浮标、钢管、钢桶、锚链和锚大致位于同一个平面内，如图 1 所示。

图 1 传输节点示意图

在平衡状态下，各系统所受力及力矩分别达到平衡，此时浮标会与锚形成一定的水平距离。此时的平衡状态可能分为两种：一种是张紧状态，即锚链的每一段都受到了前后端的拉力从而使整个系统平衡；另一种是松弛状态，即锚链上方的一部分存在拉力，而下方部分散落在水底呈无拉力状态达到平衡。

在张紧状态下达到平衡时，浮标到达某个定点，此时该点与锚得水平距离为半径以锚和浮标的水平距离为半径、锚所在位置为圆心做一个圆面，该区域即浮标的游动区域，如图 2 所示。但在松弛状态下由于松弛部分锚链的可伸缩性，浮标的位置会处于一定的区域，当松弛部分锚链长度最大时浮标位于最远位置，以此时浮标与锚的水平距离为半径、锚所在位置为圆心的圆形区域即其游动区域。

图 2 浮标游动区域俯视示意图

4.1.2 浮标的倾斜问题及对吃水深度的理解

在对组成各个系统的零件受力分析的过程中，会出现无法将物体看作是均匀的情况，这样一来，物体的各力的受力点将不再是质点，为此应尽可能将受力点移动到质心上。这时，根据力的平移定理，在将各力平移到质心上去的过程中会产生力矩，且对于一个平衡的物体其力矩和应为零。

在力矩平衡的作用下，我们发现平衡状态下浮标会产生一定的倾斜角度。

假设在浮标的底面与海平面平行，即没有倾角时，其受力分析如图 3 所示。

图 3 浮标垂直海平面的受力分析图

由图可知除浮力$F_{buoyantA}$外，风力F_{wind}和钢管拉力F_{B_0}都会产生非零力矩，且方向相同，导致力矩和不为零，从而会产生旋转，不会达到平衡状态，我们认为在平衡状态下，浮标底面相对海平面存在一个倾斜角度α_A。

吃水深度为浮标底部到海面的距离。由于浮标倾斜，导致浮标各点侵入海水的长度不同，如图 4 所示。假设浮标两边侵入水中的长度分别为h_1, h_2，其中$h_1 < h_2$，则吃水深度即两边浸水长度的平均值$\frac{h_1+h_2}{2}$。

图 4 倾斜浮标的浸水示意图

4.2 问题 1 模型的建立

根据对问题的分析发现，问题旨在讨论在不同情形达到平衡状态下，分析各钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的方程，通过已知的信息，求得系统各部分所受拉力大小及其角度情况和各部分本身的倾斜角度。

4.2.1 浮标的力平衡方程

通过浮标的受力分析可得,浮标受到竖直向上的浮力$F_{buoyantA}$,水平向右的风力F_{wind},重力G_A以及钢管对其的拉力F_{B_0}，其受力分析图如图 5 所示：

图 5 浮标的受力分析图

根据平面力系平衡原理，可得浮标的力平衡方程如下：

在水平方向上，有

$$F_{B_0}\cos\theta_{B_0} = F_{wind}, \quad (1)$$

其中，θ_{B_0}为钢管对浮标拉力与水平方向的夹角，F_{wind}为水平风力的大小，有如下的近似公式（S为物体在风法平面的投影面积）

$$F_{wind} = 0.625 \times S(v_{wind})^2; \quad (2)$$

在竖直方向上，有

$$F_{B_0} \sin\theta_{B_0} + m_A g = F_{buoyantA}, \quad (3)$$

其中，有

$$F_{buoyantA} = \rho g V_{overflowA}, \quad (4)$$

而

$$V_{overflowA} = \pi r_A^2 h_1 + \frac{1}{2}\pi r_A^2 (h_2 - h_1) = \frac{1}{2}\pi r_A^2 (h_1 + h_2), \quad (5)$$

在这儿，m_A为浮标质量，h_1, h_2分别表示浮标两边的浸水长度(见图 4)，r_A为浮标的底面半径，$V_{overflowA}$为浮标的排水体积，ρ为海水密度，g为重力加速度。

4.2.2 浮标在风向法平面的投影面积公式

在计算风力F_{wind}时，需用到浮标在风向法平面的投影面积S，由于浮标倾斜，该投影区域并非一标准的矩形，而是由两个部分构成，其中的下方部分为矩形，而上方部分为倾斜圆在水平面上投影的一半，即半椭圆的一半，最终得到浮标在风向法平面的投影面积如图 6 所示。

图 6 浮标在风向法平面的投影面积示意图

通过平面几何关系可得，第一部分矩形的面积S_1满足：

$$S_1 = 2r_A[L_A - 0.5(h_1 + h_2)] \cdot \frac{2r_A}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + (2r_A)^2}}, \quad (6)$$

第二部分半椭圆的面积S_2满足：

$$S_2 = \frac{\pi(h_2 - h_1) r_A}{4}, \quad (7)$$

其中，r_A为浮标的底面半径，h_1, h_2分别表示浮标两边的浸水长度，L_A表示浮标的长度。

4.2.3 钢管的平衡方程

通过分析可得，每节钢管的受力分析图如图 7 所示。

图 7 第i节钢管的受力分析图

根据平面力系平衡原理及力的平移定理(力矩平衡公式)，有如下方程：

水平方向力平衡方程

$$F_{B_i} \cos\theta_{B_i} = F_{B_{i-1}} \cos\theta_{B_{i-1}} (i = 1, 2, 3, 4), \quad (8)$$

竖直方向力平衡方程

$$F_{B_i} \sin\theta_{B_i} + m_B g = F_{B_{i-1}} \sin\theta_{B_{i-1}} + F_{buoyantB} (i = 1, 2, 3, 4), \quad (9)$$

力矩平衡方程

$$F_{B_i} \cdot \frac{1}{2}\sin(\alpha_{B_i} - \theta_{B_i}) L_B = F_{B_{i-1}} \cdot \frac{1}{2}\sin(\theta_{B_{i-1}} - \alpha_{B_i}) L_B (i = 1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

在这儿，$F_{buoyantB}$为每节钢管所受浮力大小，满足

$$F_{buoyantB}=\rho g\pi r_B^{\ 2}L_B,\quad(11)$$

而F_{B_i}为第i节钢管下端所受拉力大小，m_B为每节钢管的质量，g为重力加速度，α_{B_i}是第i节钢管与水平方向的夹角（钢管的倾斜角度），θ_{B_i}是拉力F_{B_i}与水平方向的夹角，r_B为钢管的底面半径，L_B为钢管的长度。

4.2.4 钢桶系统的平衡方程

钢桶的受力分析如图 8 所示。

图 8 钢桶的受力分析图

根据平面力系平衡原理及力的平移定理(力矩平衡公式)，有如下方程：

水平方向力平衡方程

$$F_C\cos\theta_C=F_{B_4}\cos\theta_{B_4},\quad(12)$$

竖直方向力平衡方程

$$F_C\sin\theta_C+(m_C+m)g=F_{B_4}\sin\theta_{B_4}+F_{buoyantC},\quad(13)$$

力矩平衡方程

$$F_C\cdot\frac{1}{2}\sin(\alpha_C-\theta_C)L_C=F_{B_4}\cdot\frac{1}{2}\sin(\theta_{B_4}-\alpha_C)L_C+mg\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha_C L_C,\quad(14)$$

在这儿，$F_{buoyantC}$为钢桶系统的浮力，有

$$F_{buoyantC}=\rho g\pi r_C^{\ 2}L_C,\quad(15)$$

而F_{B_4}表示钢管对钢桶拉力的大小，θ_{B_4}表示钢管对钢桶拉力与水平方向的夹角，F_C表示钢桶受下方锚链拉力的大小，θ_C表示F_C与水平方向的夹角，m_C表示钢桶的质量，m表示重物球的质量，r_C表示钢桶的底面半径，L_C表示钢桶的长度。

4.2.5 锚链系统的平衡方程

由于锚链无档普通链环，我们可以将其看作无弹性悬垂线，这样可以将锚链视作柔性的。因此可用微元法的思想分析其受力平衡状态。

考虑锚链其中自上而下一小段弧长(s 到 s+ds)上的受力情况，如图 9 所示。

图 9 锚链微元的受力分析图

图中ds表示取的任意一段小弧长，T表示上段锚链对所取小弧长的拉力，而$T+dT$表示下段锚链对小弧长的拉力；φ是拉力T与水平方向的夹角；$\varphi+d\varphi$是拉力$T+dT$与水平方向的夹角。

根据这一弧长微元上的受力平衡，可得出以下方程：

水平方向上，有

$$T\cos\varphi=(T+dT)\cos(\varphi+d\varphi),\quad(16)$$

竖直方向上，有

$$T\sin\varphi=(T+dT)\sin(\varphi+d\varphi)+\rho_{\mathrm{D}}ds\cdot g\quad(17)$$

其中ρ_D表示单位长度锚链的质量。

将其展开可得

$$\begin{cases}T\cos\varphi=T\cos\varphi\cos d\varphi+dT\cos\varphi\cos d\varphi-T\sin\varphi\sin d\varphi-dT\sin\varphi\sin d\varphi\\T\sin\varphi=T\sin\varphi\cos d\varphi+dT\sin\varphi\cos d\varphi+T\cos\varphi\sin d\varphi+dT\cos\varphi\sin d\varphi-\rho_D ds\cdot g\end{cases}\quad(18)$$

由泰勒公式$\sin d\varphi=d\varphi-\frac{(d\varphi)^3}{3!}+\mathrm{L}$ 可知，当角度变化$d\varphi$很小时，忽略高阶无穷小的影响，故$\sin d\varphi$近似等于$d\varphi$， $\cos d\varphi$近似等于 1，从而可得如下的近似方程：

$$\begin{cases}0=dT\cos\varphi-T\sin\varphi d\varphi-dT\sin\varphi d\varphi\\\rho_{\mathrm{D}}ds\cdot g=-dT\sin\varphi-T\cos\varphi d\varphi-dT\cos\varphi d\varphi\end{cases}\quad(19)$$

忽略高阶无穷小$dT\cdot d\varphi$项，（其中$dT\cdot d\varphi$都为无穷小，故它们的乘积为高阶的无穷小）对上式化简可得如下一阶非线性微分方程组：

$$\begin{cases}\frac{d\varphi}{ds}=-\frac{\rho_D g}{T}\cos\varphi\\\frac{dT}{ds}=-\rho_D g\sin\varphi\end{cases}\quad(20)$$

且有初值条件$\varphi(0)=\theta_C,T(0)=F_C$

4.2.6 锚的平衡方程及平衡状态条件

锚的受力直接关系着最终是否达到平衡状态，其受力分析如图 10 所示：

图 10 锚的受力分析图

水平方向上，有

$$F_{D_N}\cos\theta_{D_N}=F_f,\quad(21)$$

在竖直方向上，有

$$F_N+F_{D_N}\sin\theta_{D_N}=G_E=m_E g,\quad(22)$$

由于判断整个系统平衡的关键即对锚的水平拉力是否超过锚与海底之间的最大静摩擦力$F_{\max}$，即得到平衡状态的判断条件为

$$F_{D_N}\cos\theta_{D_N}\le F_{\max}.\quad(23)$$

又由海水深度为 18m，可知

$$H=\frac{h_1+h_2}{2}\sin\alpha_A+\sum_{i=1}^{4}L_B\sin(\alpha_{B_i})+L_C\sin\alpha_C+y_D \quad (24)$$

其中，H 表示海水深度；$\frac{h_1+h_2}{2}\sin\alpha_A$ 表示浮标底面轴心到海平面的距离，h_1,h_2 分别表示浮标两边浸入水中的长度，α_A 浮标的倾斜角度，$\sum_{i=1}^{4}L_B\sin(\alpha_{B_i})$ 表示 4 个钢管在水中的高度和，L_B 表示每节钢管的长度，α_{B_i} 表示第 i 节钢管的倾斜角度；L_C 表示钢桶的长度，α_C 表示钢桶的倾斜角度，y_D 表示锚链竖直方向的高度。

4.2.7 游动区域的分析

经过分析和求解可以知道在平衡状态下的各个系统水平距离分别为：

浮标的水平距离

$$X_A=\frac{h_2-h_1}{\sqrt{(h_2-h_1)^2+(2r_A)^2}}\cdot\frac{h_2+h_1}{2}+\frac{\sqrt{(h_2-h_1)^2+(2r_A)^2}}{2}, \quad (25)$$

钢管的水平距离

$$X_B=\sum_{i=1}^{4}L_{B_i}\cos\alpha_{B_i}, \quad (26)$$

钢桶的水平距离

$$X_C=L_C\cdot\cos\alpha_C, \quad (27)$$

锚链的水平距离

$$X_D=\int_{\theta_{N_D}}^{\theta_C}\int_0^s\cos(\theta+d\theta)dsd\theta \quad (28)$$

则整体的水平距离(游动半径)为

$$X=X_A+X_B+X_C+X_D \quad (29)$$

4.3 问题一模型的求解

4.3.1 模型的求解思路

通过对系泊系统各部分进行单独受力分析和力矩分析，得到了系统各处拉力大小及其倾角等未知量在平衡状态下的关系，由于方程数量较多，且相互影响，使得直接计算非常复杂。因此我们首先考虑各方程之间的关系，得到未知量满足一定规律的递推公式，对问题进行系列简化，然后再采用搜索算法进行求解。

4.3.2 方程的简化及递推公式的推导

由于锚链是无档普通链环，实际中是环环相扣的离散系统，为了计算方便，我们首

先考虑对锚链系统对应的一阶非线性微分方程组(20式)进行转换[3]，由ds与水平方向及竖直方向上的位移之间的关系

$$dx=\cos\theta ds, dy=\sin\theta ds, \quad (30)$$

可得链环连接处的受力大小及角度的递推公式

$$\begin{cases} F_{D_{j-1}}\cos\theta_{D_{j-1}}=F_{D_j}\cos\theta_{D_j} \\ F_{D_{j-1}}\sin\theta_{D_{j-1}}=F_{D_j}\sin\theta_{D_j}+G_{D_j} \end{cases} (j=1,2,\mathrm{L}\ ,N), \quad (31)$$

其中，F_{D_0}表示链环上方第一段所受钢桶带来拉力的大小，θ_{D_0}表示链环上方第一段所受钢桶带来拉力与水平方向的角度，由于其与链环对钢桶拉力F_C互为反作用力，有$F_{D_0}=F_C,\theta_{D_0}=\theta_C$； F_{D_j}表示链环第j段(自上而下)下端所受拉力大小，θ_{D_j}表示链环第j段下端所受拉力与水平方向的夹角$(j=1,2,\mathrm{L}\ ,N)$， N为链环的段数。

4.3.2.2 水平力平衡公式的推导及简化

整个系泊系统的每个部分均在两个水平力的作用下平衡，有

$$F_{wind}=F_{B_i}\cos\theta_{B_i}=F_C\cos\theta_C=F_{D_j}\cos\theta_{D_j}(i=1,2,3,4;j=1,2,\mathrm{L}\ ,N), \quad (32)$$

其中风力F_{wind}由浮标两边的入水深度h_1,h_2决定。

4.3.2.3 竖直方向力平衡公式的推导及简化

由竖直方向上受力平衡可得到如下递推公式

$$\begin{cases} F_{B_0}\sin\theta_{B_0}=F_{buoyantA}-G_A \\ F_{B_k}\sin\theta_{B_k}=F_{B_0}\sin\theta_{B_0}+F_{buoyantA}-G_A+\sum_{i=1}^{k}F_{buoyantB_i}-\sum_{i=1}^{k}G_{B_i}(k=1,2,3,4) \\ F_C\sin\theta_C=F_{B_0}\sin\theta_{B_0}+F_{buoyantA}-G_A+\sum_{i=1}^{4}F_{buoyantB_i}-\sum_{i=1}^{4}G_{B_i}+F_{buoyangtC}-G_C \\ F_{D_k}\sin\theta_{D_k}=F_{B_0}\sin\theta_{B_0}+F_{buoyantA}-G_A+\sum_{i=1}^{4}F_{buoyantB_i}-\sum_{i=1}^{4}G_{B_i}+F_{buoyangtC}-G_C-kG_D(k=1,2,\mathrm{L}\ ,N) \end{cases} \quad (33)$$

其中浮标的浮力$F_{buoyantA}$也由浮标两边的入水深度h_1,h_2决定。

4.3.2.4 系统各段所受拉力大小及其角度的计算公式

将各拉力竖直方向分力与水平分力相比，可得相应角度正切值$\tan\theta$的计算公式如

$$\begin{cases} \tan\theta_{B_0}=(F_{buoyantA}-G_A)/F_{wind} \\ \tan\theta_{B_k}=(F_{B_0}\sin\theta_{B_0}+F_{buoyantA}-G_A+\sum_{i=1}^{k}F_{buoyantB_i}-\sum_{i=1}^{k}G_{B_i})/F_{wind}\ (k=1,2,3,4) \\ \tan\theta_C=(F_{B_0}\sin\theta_{B_0}+F_{buoyantA}-G_A+\sum_{i=1}^{4}F_{buoyantB_i}-\sum_{i=1}^{4}G_{B_i}+F_{buoyangtC}-G_C)/F_{wind} \\ \tan\theta_{D_k}=(F_{B_0}\sin\theta_{B_0}+F_{buoyantA}-G_A+\sum_{i=1}^{4}F_{buoyantB_i}-\sum_{i=1}^{4}G_{B_i}+F_{buoyangtC}-G_C-kG_D)/F_{wind}\ (k=1,2,\text{L}\ ,N) \end{cases} \quad (34),$$

从而可得平衡状态下依赖于h_1,h_2的各段拉力角度及大小的计算公式。

4.3.2.5 各个部件在竖直方向的高度的计算

（1）找出浮标的竖直方向高度，这里记为H_A（$H_A=\overline{QR}$）。如图所示：

图 11. 浮标的竖直方向高度示意图

图中，$h_1=\overline{MN}$，$h_2=\overline{OP}$，$H_A=\overline{QR}$。在直角ΔRMQ和直角ΔNKP中，因为$\angle RMQ=\angle NPK$（同位角相等），所以这两个三角形另外两个角相等，即：

$$\angle RQM=\angle KNP=\arctan\frac{KP}{NK} \quad (35)$$

所以

$$H_A=\overline{RQ}=\overline{QM}\cos\angle RQM=\frac{h_1+h_2}{2}\cos(\arctan(\frac{\overline{PK}}{\overline{KN}})) \quad (36)$$

即:

$$H_A=\frac{r_A(h_1+h_2)}{\sqrt{(h_1-h_2)^2+(2r_A)^2}} \quad (37)$$

其中，r_A表示浮标的半径,为$1\,m$。

（2）钢管的竖直方向高度，这里记为H_{B_i}。

根据浮标的平衡方程、水平方向的方程（$F_{B_0}\cos\theta_{B_0}=F_{wind}$）和竖直方向的方程（$F_{B_0}\sin\theta_{B_0}+G_A=F_{buoyantA}$）相除得：

$$\cot\theta_{B_0}=\frac{F_{wind}}{F_{buoyantA}-G_A}=\frac{0.625\times S(v_{wind})^2}{\rho g V_{overflowA}-G_A} \quad (38)$$

即可以求出θ_{B_0}，这样再带入浮标水平方向平衡方程则可求出F_{B_0}。再把θ_{B_0}和F_{B_0}的值带入钢管的平衡方程，我们可以求出钢管的F_{B_i}拉力及其倾斜角度θ_{B_i}和钢管的倾斜角α_{B_i}，又可以根据钢管的几何关系（如图 6 所示）：

$$H_B=\sum_i^4 H_{B_i}=\sum_i^4 l_{B_i}\sin(\alpha_{B_i}) \quad (39)$$

其中H_B表示四根钢管的总高度，H_{B_i}表示第i节钢管的高度，α_{B_i}表示第i节钢管的倾斜角度。

（3）钢桶的竖直方向高度，这里记为H_C。

把上个环节的计算出来的结果带入钢桶系统的平衡方程，同样也可以计算出钢桶倾斜角度α_C，锚链对钢桶的拉力F_C及其方向（与X轴的夹角θ_C）。则可以得出钢桶高度的公式：

$$H_C = l_C \sin\alpha_C \quad (40)$$

其中l_C为钢桶的长度，它是一个常数，大小为$1m$。

（4）钢桶的竖直方向高度，这里记为H_D。

根据已求得的钢桶对锚链的拉力F_C及其方向，把这对初始值带入锚链平衡微分方程，可解出函数关系。就可以表示出锚链的高度：

$$H_D = \int_{\theta_C}^{\theta_{D_N}} \int_0^{22.05} ds \cdot \sin(\varphi + d\varphi) \quad (41)$$

其中，ds表示锚链一微段的长度，$\varphi + d\varphi$表示那一微段的倾斜角度。

故整个系泊系统总高度为

$$H = H_A + H_B + H_C + H_D \quad (42)$$

4.3.2.6 吃水深度h_1和h_2的值范围的确定

根据题目可知浮标的高度为$2m$，则有：$0 < h_1 < 2m$，$0 < h_2 < 2m$，h_2为较长的一条高。只有当浮标在海水中时，浮标的重力与浮标的浮力二力平衡，即：

$$G_A = g\rho V_{overflowA} \quad (43)$$

可以计算出此时$h_1 = h_2 = 0.31m$。那么可以进一步确定范围：

$$0.31 < h_1 \le h_2 < 2, \quad (44)$$

4.3.3 算法步骤

（1）给定一组浮标吃水深度值$[h_1, h_2],$，（得到$0.31 < h_1 \le h_2 < 2$），可以依次计算得到H，θ_{D_N}；

（2）判断如果同时满足$|H - 18| < \varepsilon$，（ε取较小值，比如 0.1）和$0 < \theta_{D_N} < 16$两个条件，则输出结果，并停止计算；如果不满足，则取步长有$h_1 = h_1 + \Delta h_1, h_2 = h_2 + \Delta h_2,$并转到步骤（1）。

4.3.4 计算结果及分析

（1）当风速为$12 m/s$时，得到的结果如下表所示：

表 1. 风速为$12 m/s$时的求解结果

h_1	h_2	海水深度	锚链水平倾角	钢桶的倾角	所用无档链环个数
0.68m	0.79m	17.9042m	3.4838°	1.0405°	144
钢管 1 的倾角	钢管 2 的倾角	钢管 3 的倾角	钢管 4 的倾角	游动区域半径	浮标的吃水深度
1.0086°	1.0146°	1.0206°	1.0267°	14.4429m	0.735m

得到锚链的形状如图 12 所示：

图 12. 风速为$12 m/s$时锚链的形状

以上求解得到的结果满足题目的要求，且所用的链环个数为 144 个，小于链的总个数，说明达到平衡时锚链并未完全绷紧。

（2）当风速为$24 m/s$时，得到的结果如下表所示：

表 2. 风速为$24 m/s$时的求解结果

h_1	h_2	海水深度	锚链水平倾角	钢桶的倾角	所用无档链环个数
0.71m	0.79m	17.9117m	11.7855°	3.9299°	185

钢管 1 的倾角	钢管 2 的倾角	钢管 3 的倾角	钢管 4 的倾角	游动区域半径	浮标的吃水深度
3.814°	3.8356°	3.8575°	3.8797°	17.2252m	0.75m

得到锚链的形状如图 13 所示：

图 13. 风速为 24 m/s 时锚链的形状

以上求解得到的结果满足题目的要求，且所用的链环个数为 185 个，小于链的总个数，说明达到平衡时锚链并未完全绷紧。

4.4 问题 2 的模型分析与建立

4.4.1 风速为 36 m/s 时系泊状态及其分析

当风速达到 36 m/s 时，若不考虑角度的限制，可通过问题一的递推式及搜索算法求得如下结果：

表 3. 风速为 36 m/s 时的求解结果

h_1	h_2	海水深度	锚链水平倾角	钢桶的倾角	所用无档链环个数
0.759m	0.7810m	17.7796m	17.7796°	8.1268°	210
钢管 1 的倾角	钢管 2 的倾角	钢管 3 的倾角	钢管 4 的倾角	游动区域半径	浮标的吃水深度
7.8999°	7.9424°	7.9853°	8.0287°	18.3712m	0.77m

得到锚链的形状如图 14 所示：

图 14. 风速为 36 m/s 时锚链的形状

此时，锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角为 17.7796 度，超过了 16 度，钢桶的倾斜角度(钢桶与竖直线的夹角)为 8.1268 度，超过 5 度，已经不能够达到平衡状态，因此需考虑调节重物球质量，使其重新达到平衡状态。

4.4.2 基于重物球质量的定常系统最优系泊模型

当风速达到 36 m/s 时，系泊系统已经不再满足角度的要求，从而不再处于平衡状态，因此我们考虑调整重物球质量。在此我们假设海水静止，考虑水平风速、水深、锚链型号、长度等均为定常数，基于重物球质量的选择，建立了单决策变量的多目标最优系泊模型。

4.4.2.1 目标函数

（一）浮标的吃水深度尽可能小：

$$\min_{m} \quad h; \text{（45）}$$

其中吃水深度 $h=\frac{h_1+h_2}{2}$，即浮标两边浸水长度的平均值；

（二）游动区域尽可能小，即游动半径尽可能最小：

$$\min_{m} \quad X \text{（46）}$$

其中游动半径 $X=X_A+X_B+X_C+X_D$（见 29 式）；

（三）钢桶的倾斜角度尽可能小；

$$\min_{m} \quad \frac{\pi}{2}-\alpha_C \text{（47）}$$

其中α_C表示钢桶与水平面的夹角。

4.4.2.2 约束条件

(一)海水的深度约束，即平衡状态下整个系泊系统的竖直高度之和应等于水深H，有

$$\frac{h_1+h_2}{2}\sin\alpha_A+\sum_i^4 L_B\sin(\alpha_{B_i})+L_C\sin\alpha_C+y_D=H,\quad(48)$$

其中$\frac{h_1+h_2}{2}\sin\alpha_A$表示浮标底面轴心到海平面的距离，$h_1,h_2$分别表示浮标两边浸入水中的长度，$\alpha_A$浮标的倾斜角度，$\sum_{i=1}^4 L_B\sin(\alpha_{B_i})$表示 4 个钢管在水中的高度和，$L_B$表示每节钢管的长度，$\alpha_{B_i}$表示第$i$节钢管的倾斜角度；$L_C$表示钢桶的长度，$\alpha_C$表示钢桶的倾斜角度，$y_D$表示锚链竖直方向的高度。

（二）锚链底端拉力的夹角约束，即锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度，有

$$\varphi(s)=\theta_{D_N}\le\theta_{\max},\quad(49)$$

由问题 1 可知，T,φ,s满足如下微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{ds}=\dfrac{\rho_D g}{T}\cos\varphi\\[2ex]\dfrac{dT}{ds}=\rho_D g\sin\varphi\end{cases},\quad(50)$$

其中θ_{D_N}表示锚链在锚点与海床的夹角，$\theta_{\max}$表示使得锚不滑动时，锚链在锚点与海床的最大夹角。

（三）平衡约束条件，即达到系统各部分力和力矩平衡的各等式约束条件，包括式？

综上：我们建立了基于重物球质量的多目标最优系泊模型如下

$$\begin{aligned}&\min\quad h;\\&\min\quad X;\\&\min\quad \frac{\pi}{2}-\alpha_C;\end{aligned}\quad(51)$$

$$\begin{cases}H=\dfrac{h_1+h_2}{2}\sin\alpha_A+\sum_i^4 L_B\sin(\alpha_{B_i})+L_C\sin\alpha_C+y_D\\[2ex]\theta_{D_N}\le\theta_{\max}\\力及力矩平衡约束条件(1)\text{-}(23)\end{cases}\quad(52)$$

4.5 问题 2 的模型求解

4.5.1 多目标的转换

对于问题 2，这是一个多目标的优化问题，不能够直接进行求解，需要把多目标转化为单目标进行求解。具体方法为：

先计算单目标

$$\min\quad\frac{\pi}{2}-\alpha_C\quad(53)$$

$$\begin{cases} H=\dfrac{h_1+h_2}{2}\sin\alpha_A+\sum_i^4 L_B\sin(\alpha_{B_i})+L_C\sin\alpha_C+y_D \\ \theta_{D_N}\le\theta_{\max} \\ \text{力及力矩平衡约束条件(1)-(23)} \end{cases} \quad (54)$$

得到倾角的最优值α^*，再将$\alpha^*\le\dfrac{\pi}{2}\le 5$作为约束条件加入到优化问题里面，这样问题转化为双目标优化问题。

$$\begin{matrix}\min & h; \\ \min & X;\end{matrix} \quad (55)$$

$$\begin{cases} H=\dfrac{h_1+h_2}{2}\sin\alpha_A+\sum_i^4 L_B\sin(\alpha_{B_i})+L_C\sin\alpha_C+y_D \\ \theta_{D_N}\le\theta_{\max} \\ \alpha^*\le\dfrac{\pi}{2}\le 5 \\ \text{力及力矩平衡约束条件(1)-(23)} \end{cases} \quad (56)$$

再考虑吃水深度的优化，利用类似的方法得到其最优值作为约束条件，即：

$$\min \quad X; \quad (57)$$

$$\begin{cases} H=\dfrac{h_1+h_2}{2}\sin\alpha_A+\sum_i^4 L_B\sin(\alpha_{B_i})+L_C\sin\alpha_C+y_D \\ \theta_{D_N}\le\theta_{\max} \\ \alpha^*\le\dfrac{\pi}{2}\le 5 \\ h^*\le h\le 2 \\ \text{力及力矩平衡约束条件(1)-(23)} \end{cases} \quad (58)$$

4.5.2 可行解的范围

因为该问所给的风速变大，在初始的条件下不能再得到可行解了。所以这里除了给定h_1、h_2的值，还需要给定重物球的质量。在问题一种重力球质量为$1200\,kg$已经不能满足题目要求，所以重物球的重力应该满足：$G_{C1}>12000N$。为了找到重物球重力的上限，首先假设只有重物球的重力作用，且浮标完全淹没在水中。此时，对浮标进行受力分析，得到的受力分析图如图 15 所示：

图 15. 浮标的受力分析图

根据受力分析，当浮标处于平衡状态时有：

$$F_{buyantA}=G_A+G_{C1} \quad (59)$$

其中，$F_{buoyantA}=\rho g V_{overflowA}$；

由于浮标完全被淹没，所以有：

则：

此时，$G_{C1}=53082.6N$。因此设定重物球重力的取值范围是$12000N<G_{C1}<53082.6N$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/027063066150006132