河北省邯郸市2024-2025学年高二上学期开学考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知向量$\vec{m}$，$\vec{n}$满足$|\vec{m}|=|\vec{n}|=2$，且$\vec{m}\cdot\vec{n}=-2\sqrt{2}$，则$\vec{m}$，$\vec{n}$夹角为（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

2．在$\triangle ABC$中，角A,B,C对边为a,b,c，且$2c\cdot\cos^2\frac{A}{2}=b+c$，则$\triangle ABC$的形状为（　　）

A．等边三角形　　B．直角三角形　　C．等腰三角形　　D．等腰直角三角形

3．设复数$z_1=4+2i$，$z_2=1-3i$，则复数$z_2-\frac{z_1}{2}$的虚部是（　）

A．$4i$　　B．$-4i$　　C．4　　D．-4

4．袋中装有红、黄、蓝三种颜色的球各2个，无放回的从中任取3个球，则恰有两个球同色的概率为

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{3}{10}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

5．若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的一条渐近线方程为$y=-2x$，该双曲线的离心率是（　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{3}$

6．在四面体$ABCD$中，$AB=AC=2\sqrt{3}$，$BC=6$，$AD\perp$平面ABC，四面体$ABCD$的体积为$\sqrt{3}$.若四面体$ABCD$的顶点均在球O的表面上，则球O的表面积是（　）.

A．$\frac{49\pi}{4}$　　B．49π　　C．$\frac{49\pi}{2}$　　D．4π

7．已知圆C_1：$(x+5)^2+y^2=1$，C_2：$(x-5)^2+y^2=225$，动圆C满足与C_1外切且C_2与内切，若M为C_1上的动点，且$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{C_1M}=0$，则$|\overrightarrow{CM}|$的最小值为

A．$2\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．$2\sqrt{5}$

8．已知E，F分别是棱长为2的正四面体$ABCD$的对棱AD,BC的中点.过EF的平面α与正四面体$ABCD$相截，得到一个截面多边形τ，则下列说法正确的是（　）

A．截面多边形τ不可能是平行四边形　　B．截面多边形τ的周长是定值

C．截面多边形τ的周长的最小值是$\sqrt{2}+\sqrt{6}$　　D．截面多边形τ的面积的取值范围是$\left[1,\sqrt{2}\right]$

二、多选题

9．下列结论中正确的是（　　）

A．在频率分布直方图中，中位数左边和右边的直方图的面积相等

B．一组数据中的每个数都减去同一个非零常数a，则这组数据的平均数改变，方差不改变

C．一个样本的方差$s^2=\frac{1}{20}[(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+\cdots+(x_{20}-3)^2]$，则这组样本数据的总和等于60

D.数据a_1，a_2，a_3，...，a_n的方差为M,则数据$2a_1$，$2a_2$，$2a_3$，…，$2a_n$的方差为$2M$

10．（多选）设m，n是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，下列命题中正确的是（　　）

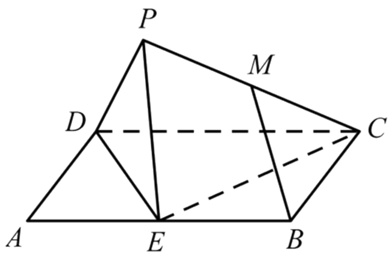
A．若$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m//\beta$，$n//\beta$，则$\alpha//\beta$

B．若$m\perp n$，$m//\alpha$，$\alpha//\beta$，则$n\perp\beta$

C．若m，n异面，$m\subset\alpha$，$m//\beta$，$n\subset\beta$，$n//\alpha$，则$\alpha//\beta$

D．若$\alpha//\beta$，$m\perp\alpha$，$n//\beta$，则$m\perp n$

11．如图，已知在平行四边形$ABCD$中，$AB=2AD=2$，$\angle BAD=60^\circ$，E为AB的中点，将$\triangle ADE$沿直线DE翻折成$\triangle PDE$，若M为PC的中点，则$\triangle ADE$在翻折过程中（点$P\notin$平面$ABCD$），以下命题正确的是（　　）



A．$BM//$平面PDE

B．$BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．存在某个位置，使$MB\perp DE$

D．当三棱锥$P-CDE$体积最大时，其外接球的表面积为$\frac{13\pi}{3}$

三、填空题

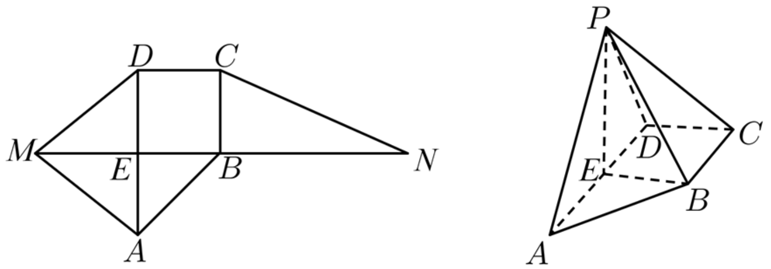
12．某学校三个年级共有2760名学生，要采用分层抽样的方法从全体学生中抽取一个容量为60的样本，已知一年级有1150名学生，那么从一年级抽取的学生人数是________名.

13．设双曲线C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$的左焦点和右焦点分别是$F_1$，$F_2$，点$P$是$C$右支上的一点，则$|PF_1|+\frac{3}{|PF_2|}$的最小值为__________.

14．已知点P是椭圆$C:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$上除顶点外的任意一点，过点$P$向圆$O:x^2+y^2=4$引两条切线$PM$，$PN$，设切点分别是$M$，$N$，若直线$MN$分别与$x$轴，$y$轴交于$A$，$B$两点，则$\triangle AOB$面积的最小值是________.

四、解答题

15．如图1所示，四边形$CDMN$为梯形且$CD//MN$，$BC//AD$，E为AD中点，$DE=DC=1$，$MA=MD=\sqrt{3}$，现将平面$\triangle AMD$沿AD折起，$\triangle BCN$沿BC折起，使平面$AMD\perp$平面$ABCD$，且M,N重合为点P（如图2所示）.

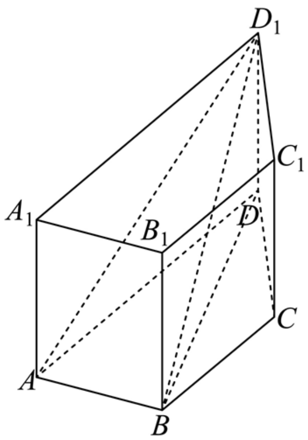


(图1)　　(图2)

(1)证明：平面$PBE\perp$平面PBC；

(2)求二面角$C-PA-D$的余弦值.

16．如图，四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面为梯形，$AD=2BC=2$，三个侧面ABB_1A_1，BCC_1B_1，CDD_1C_1均为正方形.



(1)证明：平面$ABD_1\perp$平面BDD_1.

(2)求点A_1到平面ABD_1的距离.

17．在平面直角坐标系xOy中，椭圆C的中心在坐标原点，焦点在坐标轴上，点$P\left(2,-1\right)$和点$Q\left(\sqrt{6},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$为椭圆$C$上两点.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

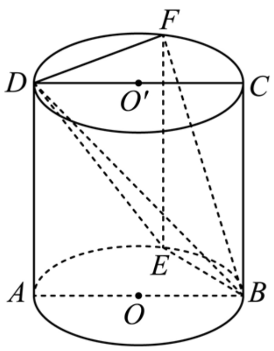
（Ⅱ）A，B为椭圆C上异于点P的两点，若直线PA与PB的斜率之和为0，求线段AB中点M的轨迹方程.

18．已知$\vee ABC$的三个内角A，B，C对的三边为a，b，c，且$\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{5a}{10-a}$

(1)若$b=1$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，求$\sin B$；

(2)已知$C=\dfrac{\pi}{3}$，当$S_{\vee ABC}$取得最大值时，求$\vee ABC$的周长.

19．如图，$ABCD$为圆柱OO'的轴截面，EF是圆柱上异于AD,BC的母线.



(1)证明：$BE\perp$平面DEF；

(2)若$AB=BC=\sqrt{6}$，当三棱锥$B-DEF$的体积最大时，求二面角$B-DF-E$的正弦值.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	D	C	C	B	A	D	ABC	CD
题号	11									
答案	ABD									

1．C

【分析】根据向量的点乘关系，求出$\cos\theta$，即可求出$\vec{m}$，$\vec{n}$夹角.

【详解】解：由题意，

在向量$\vec{m}$，$\vec{n}$中，$|\vec{m}|=|\vec{n}|=2$，

$\vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}||\vec{n}|\cos\theta=2\times2\cos\theta=4\cos\theta=-2\sqrt{2}$

解得：$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

故选：C.

2．B

【分析】先根据二倍角公式化简$\cos^2\dfrac{A}{2}$，根据余弦定理化简得到$c^2=a^2+b^2$即可得到答案.

【详解】因为$2c\cdot\cos^2\dfrac{A}{2}=b+c$，

所以$2c\cdot\dfrac{1+\cos A}{2}=b+c$，即$c+c\cos A=b+c$，

所以$c\cos A=b$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

代入得，$c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b$，即$b^2+c^2-a^2=2b^2$，

所以$c^2=a^2+b^2$.

所以$\triangle ABC$直角三角形.

故选：B

3．D

【解析】计算出$z_2-\dfrac{z_1}{2}$的值，即可找出虚部.

【详解】$z_2-\dfrac{z_1}{2}=(1-3i)-\dfrac{4+2i}{2}=-1-4i$，

则其虚部是-4。

故选：D.

【点睛】本题考查了复数的运算，以及复数的定义，属于基础题.

4．C

【分析】根据古典概型的计算公式即可求解.

【详解】解：从红、黄、蓝三种颜色的球各 2 个，无放回的从中任取 3 个球，共有 $C_6^3=20$ 种，其中恰有两个球同色有 $C_3^1\cdot C_4^1=12$ 种，故恰有两个球同色的概率为 $P=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$.

故选：C.

5．C

【分析】由双曲线方程求出渐近线方程，再结合已知可得 $\dfrac{b}{a}=2$，从而可求出双曲线的离心率.

【详解】双曲线的焦点位于 x 轴，则双曲线的渐近线为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，

因为双曲线的一条渐近线方程为 $y=-2x$，

所以 $\dfrac{b}{a}=2$，

所以双曲线的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$，

故选：C

6．B

【分析】先由题中条件，求出 $\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$AD=1$，设 $\vee ABC$ 的外接圆半径为 r，记 $\vee ABC$ 外接圆圆心为 O_1，连接 AO_1，由正弦定理，求出 $AO_1=r=2\sqrt{3}$，设外接球的半径为 R，连接 OO_1，得到 $AD//OO_1$，延长 O_1O 到 E，使得 $O_1E=AD$，连接 DE，连接 OA，OD，根据三角形全等，得到 $R=OA=\sqrt{AO_1{}^2+OO_1{}^2}$，进而可求出结果.

【详解】因为 $AB=AC=2\sqrt{3}$，$BC=6$，

所以 $\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=-\dfrac{1}{2}$，则 $\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $S_{\vee ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

因为 $AD\perp$ 平面 ABC，四面体 $ABCD$ 的体积为 $\sqrt{3}$，

所以$\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot S_{\vee ABC}\cdot AD=\sqrt{3}AD$，则$AD=1$；

设$\vee ABC$的外接圆半径为r，记$\vee ABC$外接圆圆心为O_1，连接AO_1，

由正弦定理可得，$2r=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$，则$AO_1=r=2\sqrt{3}$

设外接球的半径为R，连接OO_1，

根据球的性质可得，$OO_1\perp$平面ABC，

又$AD\perp$平面ABC，所以$AD//OO_1$，

延长O_1O到E，使得$O_1E=AD$，连接DE，

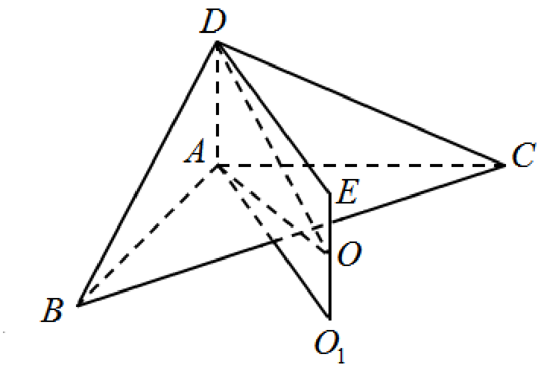
则四边形AO_1ED为矩形；所以$AO_1=DE$

连接OA，OD，则$OA=OD=R$，

所以$Rt\vee DEO$；$Rt\vee AO_1O$，所以$OO_1=OE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}$，

因此$R=OA=\sqrt{AO_1^{\,2}+OO_1^{\,2}}=\sqrt{r^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{12+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{49}{4}}$，

因此球O的表面积是$S=4\pi R^2=49\pi$.

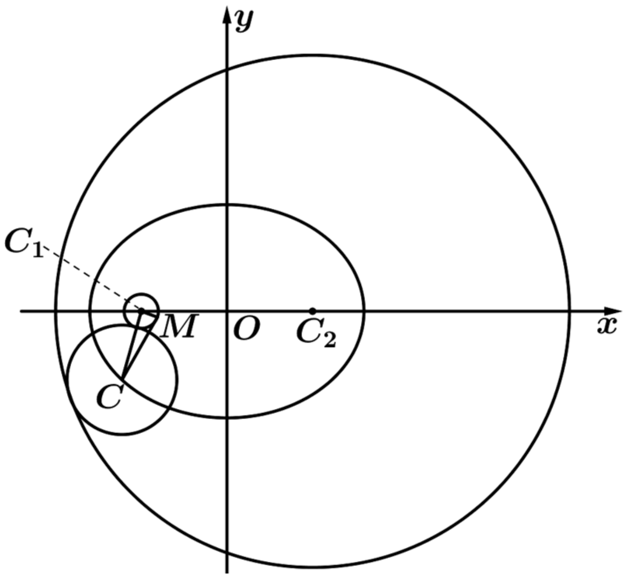


故选：B.

【点睛】本题主要考查求几何体外接球的表面积，熟记几何体结构特征，以及球的表面积公式即可，属于常考题型.

7．A

【详解】



$\because$圆C_1：$(x+5)^2+y^2=1$，圆C_2：$(x-5)^2+y^2=225$，

动圆C满足与C_1外切且C_2与内切，设圆C的半径为r ，

由题意得$|CC_1|+|CC_2|=(1+r)+(15-r)=16$，$\therefore$则$C$的轨迹是以（$(-5,0),(5,0)$ 为焦点，长轴长为16的椭圆，

$\therefore$其方程为$\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{39}=1$，因为$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{C_1M}=0$，即$CM$为圆$C_1$ 的切线，要$\left|\overrightarrow{CM}\right|$的最小，只要$|CC_1|$最小，设$M(x_0,y_0)$，则

$$\left|\overrightarrow{CM}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{CC_1}\right|^2-1^2}=\sqrt{(x_0+5)^2+y_0^2-1}=\sqrt{x_0^2+10x_0+25+39\left(1-\frac{x_0^2}{64}\right)-1}$$

$$=\sqrt{\frac{25x_0^2}{64}+10x_0+64-1},\because -8\le x_0\le 8,\therefore\left|\overrightarrow{CM}\right|_{\min}=\sqrt{\frac{25(-8)^2}{64}+10\times(-8)+64-1}=2\sqrt{2}.$$ ，选A.

8．D

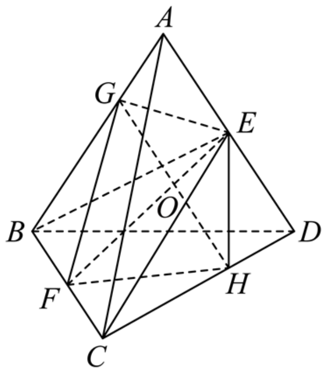
【分析】将平面α从平面ADF开始旋转，结合对称性可判断A；设$AG=m(0\le m\le 2)$，利用余弦定理表示出$GE+GF$，利用几何意义求最小值，利用二次函数单调性求最大值可判断BC；先判断$EF\perp GH$，然后利用向量方法求出$\overrightarrow{GH}^2=2(m-1)^2+2$，可得截面面积的范围，可判断D.

【详解】对于A，当平面α过AD或BC时，截面为三角形.

易知正四面体关于平面ADF对称，将平面α从平面ADF开始旋转与AB交于点G时，

由对称性可知，此时平面α与CD交于点H，且$AG=DH$，

此时截面为四边形$EGFH$，且注意到当G,H分别为AB,CD的中点时，此时满足$AG=DH$，且$GF//AC,AC//EH,GF=EH=\frac{1}{2}AC$，即此时截面四边形$EGFH$是平行四边形，故A错误；



对于BC，设$AG=m\left(0\le m\le 2\right)$，由余弦定理得$GE=\sqrt{m^2+1-m}=\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，

$GF=\sqrt{\left(2-m\right)^2+1-\left(2-m\right)}=\sqrt{\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，

由两点间距离公式知，$GE+GF$表示动点$\left(m,0\right)$到定点$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$和$\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$的距离之和，

当三点共线时取得最小值$\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2$，

由二次函数单调性可知，当$m=0$或$m=2$时，$GE+GF$取得最大值$1+\sqrt{3}$，

所以截面多边形τ周长的取值范围是$\left[4,2+2\sqrt{3}\right]$，故BC错误；

对于D，记GH与EF的交点为O，由对称性$\angle EFG=\angle EFH$，$FG=FH$，

所以$EF\perp GH$，$S_{EGFH}=\frac{1}{2}EF\cdot GH$，

因为$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\sqrt{3}$，

所以$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{2}$，所以$S_{EGFH}=\frac{\sqrt{2}}{2}GH$，

记$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，

则$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=-\frac{m}{2}\vec{a}+\vec{c}+\frac{m}{2}\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=-\frac{m}{2}\vec{a}+\frac{m}{2}\vec{b}+\left(1-\frac{m}{2}\right)\vec{c}$，

因为$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=2\times 2\cos\frac{\pi}{3}=2,\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=2$，

所以$\overrightarrow{GH}^2=\frac{m^2}{4}\vec{a}^2+\frac{m^2}{4}\vec{b}^2+\left(1-\frac{m}{2}\right)^2\vec{c}^2-\frac{m}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-m\left(1-\frac{m}{2}\right)\vec{a}\cdot\vec{c}+m\left(1-\frac{m}{2}\right)\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=m^2+m^2+4\left(1-\frac{m}{2}\right)^2-m^2-2m\left(1-\frac{m}{2}\right)+2m\left(1-\frac{m}{2}\right)$

$=2\left(m-1\right)^2+2$，

由二次函数性质可知，$2\le\overrightarrow{GH}^2\le4$，即$\sqrt{2}\le GH\le2$，

所以$1\le S_{EGFH}\le\sqrt{2}$，故 D 正确；

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本题解题关键是找到正四面体的对称性，根据对称性判断截面形状，利用余弦定理求周长，利用空间向量求距离，然后可得面积，题目综合性强，对学生的直观想象能力有较高的要求.

9．ABC

【分析】A 选项，利用中位数的定义可判断；

B 选项，一组数据中的每个数都减去同一个非零常数 a，平均数会随之改变，方差不变；

C 选项，可以看出平均数和样本总量，从而求出样本数据的总和；

D 选项，方差会变为原来的 4 倍.

【详解】对于 A，在频率分布直方图中，中位数左边和右边的直方图的面积相等，都为$\frac{1}{2}$，

∴A 正确；

对于 B，一组数据中的每个数都减去同一个非零常数 a，则这组数据的平均数也减去 a，方差s^2不改变，∴B 正确；

对于 C，∵样本的方差$s^2=\frac{1}{20}[(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+\cdots+(x_{20}-3)^2]$，∴这个样本有 20 个数据，平均数是 3，∴这组样本数据的总和为 3×20＝60，C 正确；

对于 D，数据a_1，a_2，a_3，…，a_n的方差为 M，则数据$2a_1$，$2a_2$，$2a_3$，…，$2a_n$的方差为 $4M$，∴D 不正确.

故选：ABC

10．CD

【分析】根据线面平行、线线平行与面面平行的性质定理及判定定理一一判断即可；

【详解】解：对于 A：当且仅当m与n相交时，满足$\alpha//\beta$，故 A 错误；