

新定义综合(数列新定义、函数新定义、集合新定义)(精选30题)

题目 1 (2024·辽宁·二模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项是奇数, 且 a_n 是正整数 n 的最大奇因数, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^n}$.

- (1) 求 a_6, a_{20} 的值;
- (2) 求 S_1, S_2, S_3 的值;
- (3) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式.

题目 2 (2024 · 黑龙江双鸭山 · 模拟预测) 已知数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_N (N \geq 3)$ 的各项均为正整数, 设集合 $T =$

$\{x \mid x = a_j - a_i, 1 \leq i < j \leq N\}$, 记 T 的元素个数为 $P(T)$.

(1) 若数列 $A: 1, 3, 5, 7$, 求集合 T , 并写出 $P(T)$ 的值;

(2) 若 A 是递减数列, 求证: “ $P(T) = N - 1$ ”的充要条件是“ A 为等差数列”;

(3) 已知数列 $A: 2, 2^2, \dots, 2^N$, 求证: $P(T) = \frac{N(N-1)}{2}$.

题目 3 (2024 · 广西 · 二模) 已知函数 $f(x) = \ln x$, 若存在 $g(x) \leq f(x)$ 恒成立, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个“下界函数”.

(1) 如果函数 $g(x) = \frac{t}{x} - \ln x$ 为 $f(x)$ 的一个“下界函数”, 求实数 t 的取值范围;

(2) 设函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex}$, 试问函数 $F(x)$ 是否存在零点? 若存在, 求出零点个数; 若不存在, 请说明理由.

题目 4 (2024 · 湖南长沙 · 模拟预测) 设 n 次多项式 $P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 (a_n \neq 0)$, 若其满

足 $P_n(\cos x) = \cos nx$, 则称这些多项式 $P_n(t)$ 为切比雪夫多项式. 例如: 由 $\cos \theta = \cos \theta$ 可得切比雪夫多项式 $P_1(x) = x$, 由 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ 可得切比雪夫多项式 $P_2(x) = 2x^2 - 1$.

(1) 若切比雪夫多项式 $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 求实数 a, b, c, d 的值;

(2) 对于正整数 $n \geq 3$ 时, 是否有 $P_n(x) = 2x \cdot P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ 成立?

(3) 已知函数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有 3 个不同的零点, 分别记为 x_1, x_2, x_3 , 证明: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

题目 5 (2024 · 浙江 · 模拟预测) 已知实数 $q \neq 0$, 定义数列 $\{a_n\}$ 如下: 如果 $n = x_0 + 2x_1 + 2^2x_2 + \cdots + 2^kx_k, x_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, 2, \cdots, k$, 则 $a_n = x_0 + x_1q + x_2q^2 + \cdots + x_kq^k$.

(1) 求 a_7 和 a_8 (用 q 表示);

(2) 令 $b_n = a_{2^{n-1}}$, 证明: $\sum_{i=1}^n b_i = a_{2^n - 1}$;

(3) 若 $1 < q < 2$, 证明: 对于任意正整数 n , 存在正整数 m , 使得 $a_n < a_m \leq a_n + 1$.

题目 6 (2024 · 辽宁 · 三模) 若实数列 $\{a_n\}$ 满足 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 有 $a_n + a_{n+2} \geqslant 2a_{n+1}$, 称数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”.

(1) 判断 $a_n = n^2, b_n = \ln n$ 是否为“ T 数列”, 并说明理由;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”, 证明: 对于任意正整数 k, m, n , 且 $k < m < n$, 都有 $\frac{a_n - a_m}{n - m} \geqslant \frac{a_m - a_k}{m - k}$

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”, 且 $\sum_{i=1}^{2024} a_i = 0$. 令 $M = \max\{|a_1|, |a_{2024}|\}$, 其中 $\max\{a, b\}$ 表示 a, b 中的较大者.

证明: $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, 2024\}$, 都有 $-\frac{2025}{2023}M \leqslant a_k \leqslant M$.

题目 7 (2024 · 广东梅州 · 二模) 已知 $\{a_n\}$ 是由正数组成的无穷数列, 该数列前 n 项的最大值记为 M_n , 即

$M_n = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; 前 n 项的最小值记为 m_n , 即 $m_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 令 $p_n = M_n - m_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 并将数列 $\{p_n\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的“生成数列”.

(1) 若 $a_n = 3^n$, 求其生成数列 $\{p_n\}$ 的前 n 项和;

(2) 设数列 $\{p_n\}$ 的“生成数列”为 $\{q_n\}$, 求证: $p_n = q_n$;

(3) 若 $\{p_n\}$ 是等差数列, 证明: 存在正整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ 是等差数列.

题目 8 (2024 · 浙江绍兴 · 二模) 已知 $k \in \mathbf{N}^*$, 集合 $X_k = \{x \mid x = 2^{i_0} + 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}, 0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_k, \text{ 其中 } i_0, i_1, \dots, i_k \in \mathbf{N}\}$.

(1) 求 X_2 中最小的元素;

(2) 设 $a = 2^1 + 2^3 \in X_1$, $b \in X_1$, 且 $a + b \in X_1$, 求 b 的值;

(3) 记 $Y_k = X_k \cap (2^{k+n-1}, 2^{k+n}]$, $n \in \mathbf{N}^*$, 若集合 Y_k 中的元素个数为 b_n , 求 $\sum_{m=1}^{k+1} \frac{b_m}{2^{m-1}}$.

题目 9 (2024 · 山东潍坊 · 二模) 数列 $\{a_n\}$ 中, 从第二项起, 每一项与其前一项的差组成的数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 称

为 $\{a_n\}$ 的一阶差数列, 记为 $\{a_n^{(1)}\}$, 依此类推, $\{a_n^{(1)}\}$ 的一阶差数列称为 $\{a_n\}$ 的二阶差数列, 记为 $\{a_n^{(2)}\}$, $\dots$.

如果一个数列 $\{a_n\}$ 的 p 阶差数列 $\{a_n^{(p)}\}$ 是等比数列, 则称数列 $\{a_n\}$ 为 p 阶等比数列 ($p \in \mathbf{N}^*$).

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$.

(i) 求 $a_1^{(1)}$, $a_2^{(1)}$, $a_3^{(1)}$;

(ii) 证明: $\{a_n\}$ 是一阶等比数列;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 为二阶等比数列, 其前 5 项分别为 $1, \frac{20}{9}, \frac{37}{9}, \frac{78}{9}, \frac{215}{9}$, 求 b_n 及满足 b_n 为整数的所有 n 值.

题目 10 (2024·贵州黔西·一模) 布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的不动点定理,它可运用到有限维空间并构成了一般不动点定理的基石,得名于荷兰数学家鲁伊兹·布劳威尔 (*L.E.J.Brouwer*). 简单地讲就是: 对于满足一定条件的连续函数 $f(x)$, 存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 我们就称该函数为“不动点”函数, 实数 x_0 为该函数的不动点.

(1) 求函数 $f(x) = 2^x + x - 3$ 的不动点;

(2) 若函数 $g(x) = \ln x - b$ 有两个不动点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 若 $x_2 - x_1 \leq 2$, 求实数 b 的取值范围.

题目 11 (2024 · 河北沧州 · 一模) 对于函数 $y=f(x)$, $x \in I$, 若存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一阶不动点; 若存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(f(x_0)) = x_0$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的二阶不动点; 依此类推, 可以定义函数 $f(x)$ 的 n 阶不动点. 其中一阶不动点简称为“不动点”, 二阶不动点简称为“稳定点”, 函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”构成的集合分别记为 A 和 B , 即 $A = \{x | f(x) = x\}$, $B = \{x | f(f(x)) = x\}$.

(1) 若 $f(x) = e^{\frac{x}{e}} (x > 0)$, 证明: 集合 $A = \{x | f(x) = x\}$ 中有且仅有一个元素;

(2) 若 $f(x) = (a+1)x - \frac{1}{x} + \frac{2\ln x}{e^2} (a > -1)$, 讨论集合 B 的子集的个数.

题目 12 (2024 · 山东聊城 · 二模) 对于函数 $f(x)$, 若存在实数 x_0 , 使 $f(x_0)f(x_0+\lambda)=1$, 其中 $\lambda \neq 0$, 则称 $f(x)$

为“可移 λ 倒数函数”, x_0 为“ $f(x)$ 的可移 λ 倒数点”. 已知 $g(x)=e^x, h(x)=x+a(a>0)$.

(1) 设 $\varphi(x)=g(x)h^2(x)$, 若 $\sqrt{2}$ 为“ $h(x)$ 的可移 -2 倒数点”, 求函数 $\varphi(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $\omega(x)=\begin{cases} g(x), & x>0 \\ \frac{1}{h(x)}, & x<0 \end{cases}$, 若函数 $\omega(x)$ 恰有 3 个“可移 1 倒数点”, 求 a 的取值范围.

题目 13 (2024 · 湖南 · 二模) 罗尔定理是高等代数中微积分的三大定理之一,它与导数和函数的零点有关,

是由法国数学家米歇尔·罗尔于 1691 年提出的. 它的表达如下:如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a, b]$ 连续,在开区间 (a, b) 内可导,且 $f(a) = f(b)$,那么在区间 (a, b) 内至少存在一点 m ,使得 $f'(m) = 0$.

(1) 运用罗尔定理证明:若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续,在区间 (a, b) 上可导,则存在 $x_0 \in (a, b)$,使得 $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(2) 已知函数 $f(x) = x \ln x, g(x) = \frac{1}{2}x^2 - bx + 1$,若对于区间 $(1, 2)$ 内任意两个不相等的实数 x_1, x_2 ,都有 $|f(x_1) - f(x_2)| > |g(x_1) - g(x_2)|$ 成立,求实数 b 的取值范围.

(3) 证明:当 $p > 1, n \geq 2$ 时,有 $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right]$.

题目 14 (2024 · 安徽合肥 · 二模) 在数学中, 广义距离是泛函分析中最基本的概念之一. 对平面直角坐标

系中两个点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$, 记 $|P_1P_2|_t = \max\left\{\frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|}, \frac{|y_1 - y_2|}{1 + |y_1 - y_2|}\right\}$, 称 $|P_1P_2|_t$ 为点 P_1 与点 P_2 之间的“ t -距离”, 其中 $\max\{p, q\}$ 表示 p, q 中较大者.

(1) 计算点 $P(1, 2)$ 和点 $Q(2, 4)$ 之间的“ t -距离”;

(2) 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是平面中一定点, $r > 0$. 我们把平面上到点 P_0 的“ t -距离”为 r 的所有点构成的集合叫做以点 P_0 为圆心, 以 r 为半径的“ t -圆”. 求以原点 O 为圆心, 以 $\frac{1}{2}$ 为半径的“ t -圆”的面积;

(3) 证明: 对任意点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$, $|P_1P_3|_t \leq |P_1P_2|_t + |P_2P_3|_t$.

题目 15 (2024 · 广东深圳 · 二模) 无穷数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 的定义如下: 如果 n 是偶数, 就对 n 尽可能多次地除以 2, 直到得出一个奇数, 这个奇数就是 a_n ; 如果 n 是奇数, 就对 $3n+1$ 尽可能多次地除以 2, 直到得出一个奇数, 这个奇数就是 a_n .

(1) 写出这个数列的前 7 项;

(2) 如果 $a_n = m$ 且 $a_m = n$, 求 m, n 的值;

(3) 记 $a_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求一个正整数 n , 满足 $n < f(n) < f(f(n)) < \dots < \underbrace{f(f(\dots f(n) \dots))}_{2024 \text{ 个 } f}$.

题目 16 (2024·湖南邵阳·模拟预测) 对于定义在 D 上的函数 $f(x)$, 若存在距离为 d 的两条平行直线 $l_1: y =$

$kx + b_1$ 和 $l_2: y = kx + b_2$, 使得对任意的 $x \in D$ 都有 $kx + b_1 \leq f(x) \leq kx + b_2$, 则称函数 $f(x) (x \in D)$ 有一个宽度为 d 的通道, l_1 与 l_2 分别叫做函数 $f(x)$ 的通道下界与通道上界.

(1) 若 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, 请写出满足题意的一组 $f(x)$ 通道宽度不超过 3 的通道下界与通道上界的直线方程;

(2) 若 $g(x) = x + \sin x + \cos x$, 证明: $g(x)$ 存在宽度为 2 的通道;

(3) 探究 $h(x) = \frac{2\ln x + 3}{x}, x \in [1, +\infty)$ 是否存在宽度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的通道? 并说明理由.

题目 17 (2024 · 福建福州 · 模拟预测) 记集合 $L_{f(x), x \in D} =$

$\{l(x) = kx + b(x \in R) | \forall x \in D, f(x) \leq l(x), \text{ 且 } \exists x_0 \in D, f(x_0) = l(x_0)\}$, 集合 $T_{f(x), x \in D} =$

$\{l(x) = kx + b(x \in R) | \forall x \in D, f(x) \geq l(x), \text{ 且 } \exists x_0 \in D, f(x_0) = l(x_0)\}$, 若 $l(x) \in L_{f(x), x \in D}$, 则称直线 $y =$

$l(x)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的“最佳上界线”; 若 $l(x) \in T_{f(x), x \in D}$, 则称直线 $y = l(x)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的“最佳下界线”.

(1) 已知函数 $f(x) = -x^2 + x$, $l_0(x) = kx + 1$. 若 $l_0(x) \in L_{f(x), x \in R}$, 求 k 的值;

(2) 已知 $g(x) = e^x + 1$.

(i) 证明: 直线 $y = l(x)$ 是曲线 $y = g(x)$ 的一条切线的充要条件是直线 $y = l(x)$ 是函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的“最佳下界线”;

(ii) 若 $h(x) = \ln(x - 1)$, 直接写出集合 $L_{h(x), x \in (1, +\infty)} \cap T_{g(x), x \in R}$ 中元素的个数 (无需证明).

题目 18 (2024 · 辽宁 · 二模) 如果数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 其中 $y_n \in \mathbf{Z}$, 对任意正整数 n 都有 $|x_n - y_n| < \frac{1}{2}$, 则称数列

$\{y_n\}$ 为数列 $\{x_n\}$ 的“接近数列”. 已知数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“接近数列”.

(1) 若 $a_n = 2n + \frac{2}{3} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求 b_1, b_2, b_3 的值;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差为 $d (d \in \mathbf{Z})$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{231}{100}$, 且 $a_{n+1} = -\frac{9}{10}a_n + \frac{57}{20}$, 记数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 试判断是

否存在正整数 n , 使得 $S_n < T_n$? 若存在, 请求出正整数 n 的最小值; 若不存在, 请说明理由. (参考数据:

$$\log_{\frac{9}{10}} \frac{14}{81} \approx 16.7)$$

题目 19 (2024 · 辽宁大连 · 一模) 对于数列 $A: a_1, a_2, a_3 (a_i \in \mathbf{N}, i = 1, 2, 3)$, 定义“ T 变换”: T 将数列 A 变换成

数列 $B: b_1, b_2, b_3$, 其中 $b_i = |a_{i+1} - a_i| (i = 1, 2)$, 且 $b_3 = |a_3 - a_1|$. 这种“ T 变换”记作 $B = T(A)$, 继续对数列 B 进行“ T 变换”, 得到数列 $C: c_1, c_2, c_3$, 依此类推, 当得到的数列各项均为 0 时变换结束.

(1) 写出数列 $A: 3, 6, 5$ 经过 5 次“ T 变换”后得到的数列:

(2) 若 a_1, a_2, a_3 不全相等, 判断数列 $A: a_1, a_2, a_3$ 不断的“ T 变换”是否会结束, 并说明理由;

(3) 设数列 $A: 2020, 2, 2024$ 经过 k 次“ T 变换”得到的数列各项之和最小, 求 k 的最小值.

题目 20 (2024 · 湖南 · 一模) 已知 d 为非零常数, $a_n > 0$, 若对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1}^2 - a_n^2 = d$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为 D 数列.

(1) 证明: D 数列是递增数列, 但不是等比数列;

(2) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 若 $\{a_n\}$ 为 D 数列, 证明: $b_n < \sqrt{\frac{d}{4n-3}}$;

(3) 若 $\{a_n\}$ 为 D 数列, 证明: $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} > 2024$.

题目 21 (2023 · 山西 · 模拟预测) 对于数列 $\{a_n\}$, 若存在 $M > 0$, 使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 总有 $\sum_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k| < M$,

则称 $\{a_n\}$ 为“有界变差数列”.

- (1) 若各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 为有界变差数列, 求其公比 q 的取值范围;
- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1} + \frac{1}{b_n} = 2$, 且 $b_1 = 2$, 证明: $\{b_n\}$ 是有界变差数列;
- (3) 若 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均为有界变差数列, 且 $y_n \geq y_1 > 0$, 证明: $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 是有界变差数列.

题目 22 (2024·江西九江·二模) 定义两个 n 维向量 $\vec{a}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n})$, $\vec{a}_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n})$ 的数量积

$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = x_{i,1}x_{j,1} + x_{i,2}x_{j,2} + \dots + x_{i,n}x_{j,n}$ ($i, j \in N_+$), $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i = \vec{a}_i^2$, 记 $x_{i,k}$ 为 $\vec{a}_i$ 的第 k 个分量 ($k \leq n$ 且 $k \in N_+$). 如三维向量 $\vec{a}_1 = (2, 1, 5)$, 其中 $\vec{a}_1$ 的第 2 分量 $a_{1,2} = 1$. 若由 n 维向量组成的集合 A 满足以下三个条件: ①集合中含有 n 个 n 维向量作为元素; ②集合中每个元素的所有分量取 0 或 1; ③集合中任意两个元素 $\vec{a}_i, \vec{a}_j$, 满足 $\vec{a}_i^2 = \vec{a}_j^2 = T$ (T 为常数) 且 $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 1$. 则称 A 为 T 的完美 n 维向量集.

(1) 求 2 的完美 3 维向量集;

(2) 判断是否存在完美 4 维向量集, 并说明理由;

(3) 若存在 A 为 T 的完美 n 维向量集, 求证: A 的所有元素的第 k 分量和 $S_k = T$.

题目 23 (2024 · 浙江台州 · 二模) 设 A, B 是两个非空集合, 如果对于集合 A 中的任意一个元素 x , 按照某种

确定的对应关系 f , 在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 和它对应, 并且不同的 x 对应不同的 y ; 同时 B 中的每一个元素 y , 都有一个 A 中的元素 x 与它对应, 则称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一一对应, 并称集合 A 与 B 等势, 记作 $\overline{A} = \overline{B}$. 若集合 A 与 B 之间不存在一一对应关系, 则称 A 与 B 不等势, 记作 $\overline{A} \neq \overline{B}$.

例如: 对于集合 $A = \mathbb{N}^*$, $B = \{2n | n \in \mathbb{N}^*\}$, 存在一一对应关系 $y = 2x (x \in A, y \in B)$, 因此 $\overline{A} = \overline{B}$.

(1) 已知集合 $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, $D = \{(x, y) | \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1\}$, 试判断 $\overline{C} = \overline{D}$ 是否成立? 请说明理由;

(2) 证明: ① $\overline{(0, 1)} = \overline{(-\infty, +\infty)}$;

② $\overline{\mathbb{N}^*} \neq \overline{\{x | x \subseteq \mathbb{N}^*\}}$.

(2024·浙江嘉兴·二模) 已知集合 $A = \left\{ \sum_{i=1}^m 2^{a_i} \mid 0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_m, a_i \in \mathbf{N} \right\}$, 定义: 当 $m = t$ 时, 把集

合 A 中所有的数从小到大排列成数列 $\{b(t)_n\}$, 数列 $\{b(t)_n\}$ 的前 n 项和为 $S(t)_n$. 例如: $t = 2$ 时, $b(2)_1 = 2^0 + 2^1 = 3, b(2)_2 = 2^0 + 2^2 = 5, b(2)_3 = 2^1 + 2^2 = 6, b(2)_4 = 2^0 + 2^3 = 9, \cdots, S(2)_4 = b(2)_1 + b(2)_2 + b(2)_3 + b(2)_4 = 23$.

(1) 写出 $b(2)_5, b(2)_6$, 并求 $S(2)_{10}$;

(2) 判断 88 是否为数列 $\{b(3)_n\}$ 中的项. 若是, 求出是第几项; 若不是, 请说明理由;

(3) 若 2024 是数列 $\{b(t)_n\}$ 中的某一项 $b(t_0)_{n_0}$, 求 t_0, n_0 及 $S(t_0)_{n_0}$ 的值.

题目 25 (2024 · 广西 · 二模) 设 $x \in \mathbf{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = [x]$ 称为取整函数, 取整函数

是德国数学家高斯最先使用, 也称高斯函数. 该函数具有以下性质:

① $y = [x]$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $\mathbf{Z}$;

② 任意实数都能表示成整数部分和纯小数部分之和, 即 $x = [x] + \{x\} (0 \leq \{x\} < 1)$, 其中 $[x]$ 为 x 的整数部分, $\{x\} = x - [x]$ 为 x 的小数部分;

③ $[n + x] = n + [x] (n \in \mathbf{Z})$;

④ 若整数 a, b 满足 $a = bq + r (b > 0, q, r \in \mathbf{Z}, 0 \leq r < b)$, 则 $\left[\frac{a}{b}\right] = q$.

(1) 解方程 $\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$;

(2) 已知实数 r 满足 $\left[r + \frac{19}{100}\right] + \left[r + \frac{20}{100}\right] + \left[r + \frac{21}{100}\right] + \cdots + \left[r + \frac{91}{100}\right] = 546$, 求 $[100r]$ 的值;

(3) 证明: 对于任意的大于等于 3 的正整数 n , 均有 $\left\{\frac{n(n+1)}{4n-2}\right\} > \left\{\frac{n+1}{4}\right\}$.

题目 26 (2024 · 河北石家庄 · 二模) 设集合 M 是一个非空数集, 对任意 $x, y \in M$, 定义 $\rho(x, y) = |x - y|$, 称 ρ

为集合 M 的一个度量, 称集合 M 为一个对于度量 ρ 而言的度量空间, 该度量空间记为 (M, ρ) .

定义 1: 若 $f: M \rightarrow M$ 是度量空间 (M, ρ) 上的一个函数, 且存在 $\alpha \in (0, 1)$, 使得对任意 $x, y \in M$, 均有: $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$, 则称 f 是度量空间 (M, ρ) 上的一个“压缩函数”.

定义 2: 记无穷数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 为 $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, 若 $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是度量空间 (M, ρ) 上的数列, 且对任意正实数 $\varepsilon > 0$, 都存在一个正整数 N , 使得对任意正整数 $m, n \geq N$, 均有 $\rho(a_m, a_n) < \varepsilon$, 则称 $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是度量空间 (M, ρ) 上的一个“基本数列”.

(1) 设 $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}$, 证明: f 是度量空间 $([\frac{1}{2}, 2], \rho)$ 上的一个“压缩函数”;

(2) 已知 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是度量空间 $(\mathbf{R}, \rho)$ 上的一个压缩函数, 且 $a_0 \in \mathbf{R}$, 定义 $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 证明: $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 为度量空间 $(\mathbf{R}, \rho)$ 上的一个“基本数列”.

题目 27 (2024 · 湖北 · 模拟预测) 欧拉函数在密码学中有重要的应用. 设 n 为正整数, 集合 $X_n =$

$\{1, 2, \dots, n-1\}$, 欧拉函数 $\varphi(n)$ 的值等于集合 X_n 中与 n 互质的正整数的个数; 记 $M(x, y)$ 表示 x 除以 y 的余数 (x 和 y 均为正整数),

(1) 求 $\varphi(6)$ 和 $\varphi(15)$;

(2) 现有三个素数 $p, q, e(p < q < e)$, $n = pq$, 存在正整数 d 满足 $M(de, \varphi(n)) = 1$; 已知对素数 a 和 $x \in X_a$, 均有 $M(x^{a-1}, a) = 1$, 证明: 若 $x \in X_n$, 则 $x = M([M(x^e, n)]^d, n)$;

(3) 设 n 为两个未知素数的乘积, e_1, e_2 为另两个更大的已知素数, 且 $2e_1 = 3e_2 + 1$; 又 $c_1 = M(x^{e_1}, n)$, $c_2 = M(x^{e_2}, n)$, $x \in X_n$, 试用 c_1, c_2 和 n 求出 x 的值.

题目 28 (2024·江西宜春·模拟预测) 定义: 设 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 均为定义在 I 上的函数, 其导函数分别为 $f'(x), g'(x)$, 若不等式 $[f(x)-g(x)][f'(x)-g'(x)] \geq 0$ 对任意 $x \in I$ 恒成立, 则称 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 为区间 I 上的“友好函数”.

(1) 若 $f(x)=e^{2x}$ 和 $g(x)=a-e^x$ 是“友好函数”, 求 a 的取值范围;

(2) 给出两组函数: ① $f_1(x)=e^x, g_1(x)=x+1$; ② $f_2(x)=xe^{2x}-4\ln x-6, g_2(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x$, 分别判断这两组函数是否为 $(0, +\infty)$ 上的“友好函数”.

题目 29 (2024·海南省直辖县级单位·一模) 若有穷数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ (n 是正整数), 满足 $a_i = a_{n-i+1}$ ($i \in N$, 且 $1 \leq i \leq n$), 就称该数列为“ S 数列”.

- (1) 已知数列 $\{b_n\}$ 是项数为 7 的 S 数列, 且 b_1, b_2, b_3, b_4 成等比数列, $b_1 = 2, b_3 = 8$, 试写出 $\{b_n\}$ 的每一项;
- (2) 已知 $\{c_n\}$ 是项数为 $2k+1$ ($k \geq 1$) 的 S 数列, 且 $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_{2k+1}$ 构成首项为 100, 公差为 -4 的等差数列, 数列 $\{c_n\}$ 的前 $2k+1$ 项和为 S_{2k+1} , 则当 k 为何值时, S_{2k+1} 取到最大值? 最大值为多少?
- (3) 对于给定的正整数 $m > 1$, 试写出所有项数不超过 $2m$ 的 S 数列, 使得 $1, 2, 2^2, \dots, 2^{m-1}$ 成为数列中的连续项; 当 $m > 1500$ 时, 试求这些 S 数列的前 2024 项和 S_{2024} .

题目 30 (2024 · 江苏南京 · 二模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若对每一个 $n \in \mathbf{N}^*$, 有且仅有一个 $m \in \mathbf{N}^*$, 使得 $S_m \leq a_n < S_{m+1}$, 则称 $\{a_n\}$ 为“ X 数列”. 记 $b_n = S_{m+1} - a_n, n \in \mathbf{N}^*$, 称数列 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的“余项数列”.

- (1) 若 $\{a_n\}$ 的前四项依次为 $0, 1, -1, 1$, 试判断 $\{a_n\}$ 是否为“ X 数列”, 并说明理由;
- (2) 若 $S_n = 2^n$, 证明 $\{a_n\}$ 为“ X 数列”, 并求它的“余项数列”的通项公式;
- (3) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 为“ X 数列”, 且 $\{a_n\}$ 的“余项数列”为等差数列, 证明: $S_n \leq (1 + 2^{n-2})a_1$.

新定义综合(数列新定义、函数新定义、集合新定义)(精选30题)

题目 1 (2024·辽宁·二模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项是奇数, 且 a_n 是正整数 n 的最大奇因数, $S_n = a_1 + a_2 + a_3$

$+ a_4 + \cdots + a_{2^n}$.

(1) 求 a_6, a_{20} 的值;

(2) 求 S_1, S_2, S_3 的值;

(3) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $a_6 = 3, a_{20} = 5$

(2) $S_1 = 2, S_2 = 6, S_3 = 22$

(3) $S_n = \frac{4^n + 2}{3}$

【分析】 (1) 根据所给定义直接计算可得;

(2) 根据所给定义列出 $a_i (i = 1, 2, 3, \cdots, 8)$, 即可得解;

(3) 当 n 为奇数时 $a_n = a_{2k-1} = 2k-1 (k \in N^*)$, 即可求出 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2^n-1}$, 当 n 为偶数时 $a_n = a_{2k} = a_k (k \in N^*)$, 从而得到 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{2^n} = S_{n-1}$, 即可推导出 $S_n - S_{n-1} = 4^{n-1} (n \geq 2)$, 再利用累加法计算可得.

【详解】 (1) 因为 $6 = 1 \times 2 \times 3$, 所以 $a_6 = 3$,

又 $20 = 1 \times 4 \times 5$, 所以 $a_{20} = 5$;

(2) 依题意可得 $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 1, a_5 = 5, a_6 = 3, a_7 = 7, a_8 = 1$,

所以 $S_1 = a_1 + a_2 = 2$,

$S_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 + 1 = 6$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 1 + 1 + 3 + 1 + 5 + 3 + 7 + 1 = 22$.

(3) 因为 a_n 是正整数 n 的最大奇因数,

当 n 为奇数, 即 $n = 2k-1 (k \in N^*)$ 时 $a_n = a_{2k-1} = 2k-1$,

所以 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2^n-1} = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2^n-1) = \frac{1 + (2^n-1)}{2} \times 2^{n-1} = 4^{n-1}$,

当 n 为偶数, 即 $n = 2k (k \in N^*)$ 时 $a_n = a_{2k} = a_k$,

所以当 $n \geq 2$ 时 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{2^n} = a_{1 \times 2} + a_{2 \times 2} + a_{3 \times 2} + a_{4 \times 2} + \cdots + a_{2^{n-1} \times 2}$

$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^{n-1}} = S_{n-1}$,

所以 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^n}$

$= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2^n-1}) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{2^n})$

$= 4^{n-1} + S_{n-1}$,

所以 $S_n - S_{n-1} = 4^{n-1} (n \geq 2)$ 且 $S_1 = 2$,

所以 $S_n = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots + (S_3 - S_2) + (S_2 - S_1) + S_1$

$= 4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4^2 + 4 + 2$

$$= \frac{4(1-4^{n-1})}{1-4} + 2 = \frac{4^n+2}{3},$$

当 $n=1$ 时 $S_1=2$ 也满足 $S_n = \frac{4^n+2}{3}$,

所以数列 $\{S_n\}$ 的通项公式为 $S_n = \frac{4^n+2}{3}$.

【点睛】关键点点睛: 本题关键是理解定义, 第三问关键是推导出 $S_n - S_{n-1} = 4^{n-1} (n \geq 2)$ 且 $S_1=2$, 最后利用累加法求出 S_n .

题目 2 (2024 · 黑龙江双鸭山 · 模拟预测) 已知数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_N (N \geq 3)$ 的各项均为正整数, 设集合 $T =$

$\{x \mid x = a_j - a_i, 1 \leq i < j \leq N\}$, 记 T 的元素个数为 $P(T)$.

(1) 若数列 $A: 1, 3, 5, 7$, 求集合 T , 并写出 $P(T)$ 的值;

(2) 若 A 是递减数列, 求证: “ $P(T) = N-1$ ”的充要条件是“ A 为等差数列”;

(3) 已知数列 $A: 2, 2^2, \dots, 2^N$, 求证: $P(T) = \frac{N(N-1)}{2}$.

【答案】(1) $T = \{2, 4, 6\}, P(T) = 3$.

(2) 证明见解析;

(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据题意, 结合集合的新定义, 即可求解;

(2) 若 A 为等差数列, 且 A 是递减数列, 得到 $d < 0$, 结合 $a_j - a_i = (j-i)d$, 证得充分性成立; 再由 A 是递减数列, 得到 $T = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, \dots, a_N - a_1\}$, 结合互不相等, 得到 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_N - a_{N-1}$, 得到必要性成立, 即可得证;

(3) 根据题意, 得到 $P(T) \leq \frac{N(N-1)}{2}$, 得出 $a_j - a_i = 2^j - 2^i$, 得到 $2^{i_1}(2^{j_1-i_1}-1) = 2^{i_2}(2^{j_2-i_2}-1)$, 不妨设 $i_1 > i_2$, 则 $2^{i_1-i_2}(2^{j_1-i_1}-1) = 2^{j_2-i_2}-1$, 推得 $2^{j_2-i_2}-1$ 为奇数, 矛盾, 进而得证.

【详解】(1) 解: 由题意, 数列 $A: 1, 3, 5, 7$,

可得 $3-1=2, 5-1=4, 7-1=6, 5-3=2, 7-3=4, 7-5=2$,

所以集合 $T = \{2, 4, 6\}$, 所以 $P(T) = 3$.

(2) 证明: 充分性: 若 A 为等差数列, 且 A 是递减数列, 则 A 的公差为 $d (d < 0)$,

当 $1 \leq i < j \leq N$ 时, $a_j - a_i = (j-i)d$, 所以 $T = \{d, 2d, 3d, \dots, (N-1)d\}$,

则 $P(T) = N-1$, 故充分性成立.

必要性: 若 A 是递减数列, $P(T) = N-1$, 则 A 为等差数列,

因为 A 是递减数列, 所以 $a_2 - a_1 > a_3 - a_1 > a_4 - a_1 > \dots > a_N - a_1$,

所以 $a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, \dots, a_N - a_1 \in T$, 且互不相等,

所以 $T = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, \dots, a_N - a_1\}$,

又因为 $a_3 - a_2 > a_4 - a_2 > \dots > a_N - a_2 > a_N - a_1$,

所以 $a_3 - a_2, a_4 - a_2, \dots, a_N - a_2, a_N - a_1 \in T$ 且互不相等,

所以 $a_3 - a_2 = a_2 - a_1, a_4 - a_2 = a_3 - a_1, \dots, a_N - a_2 = a_{N-1} - a_1$,

所以 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_N - a_{N-1}$,

所以 A 为等差数列, 必要性成立.

所以若 A 是递减数列, “ $P(T) = N - 1$ ”的充要条件是“ A 为等差数列”.

(3) 证明: 由题意集合 $T = \{x | x = a_j - a_i, 1 \leq i < j \leq N\}$ 中的元素个数最多为 $\frac{N(N-1)}{2}$ 个,

即 $P(T) \leq \frac{N(N-1)}{2}$,

对于数列 $A: 2, 2^2, \cdots, 2^N$, 此时 $a_j - a_i = 2^j - 2^i$,

若存在 $a_{j_1} - a_{i_1} = a_{j_2} - a_{i_2}$, 则 $2^{j_1} - 2^{i_1} = 2^{j_2} - 2^{i_2}$, 其中 $j_1 > i_1, j_2 > i_2$,

故 $2^{i_1}(2^{j_1-i_1}-1) = 2^{i_2}(2^{j_2-i_2}-1)$,

若 $i_1 \neq i_2$, 不妨设 $i_1 > i_2$, 则 $2^{i_1-i_2}(2^{j_1-i_1}-1) = 2^{j_2-i_2}-1$, 而 $j_1 > i_1, j_2 > i_2$,

故 $2^{i_1-i_2}(2^{j_1-i_1}-1)$ 为偶数, $2^{j_2-i_2}-1$ 为奇数, 矛盾,

故 $i_1 = i_2$, 故 $j_1 = j_2$, 故由 $A: 2, 2^2, \cdots, 2^N$ 得到的 $a_j - a_i$ 彼此相异, 所以 $P(T) = \frac{N(N-1)}{2}$.

题目 3 (2024 · 广西 · 二模) 已知函数 $f(x) = \ln x$, 若存在 $g(x) \leq f(x)$ 恒成立, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个“下界函数”.

(1) 如果函数 $g(x) = \frac{t}{x} - \ln x$ 为 $f(x)$ 的一个“下界函数”, 求实数 t 的取值范围;

(2) 设函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex}$, 试问函数 $F(x)$ 是否存在零点? 若存在, 求出零点个数; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $(-\infty, -\frac{2}{e})$

(2) 函数 $F(x)$ 是否存在零点, 理由见解答

【分析】(1) 把恒成立问题转换为求 $2x \ln x$ 的最小值问题, 利用导数求出最小值即可;

(2) 把函数整理成 $F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{ex} \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} \right)$, 要判断是否有零点, 只需看 F

(x) 的正负问题, 令 $G(x) = \frac{1}{e} - \frac{x}{e^x}$, 利用导数分析 $G(x)$ 即可.

【详解】(1) 由 $g(x) \leq f(x)$ 恒成立, 可得 $\frac{t}{x} - \ln x \leq \ln x$ 恒成立,

所以 $t \leq 2x \ln x$ 恒成立, 令 $h(x) = 2x \ln x$, 所以 $h'(x) = 2(1 + \ln x)$,

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 单调递减;

当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 单调递增;

所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(\frac{1}{e}) = -\frac{2}{e}$, 所以 $t \leq -\frac{2}{e}$,

实数 t 的取值范围 $(-\infty, -\frac{2}{e}]$;

(2) 由 (1) 可知 $2x \ln x \geq -\frac{2}{e}$, 所以 $2 \ln x \geq -\frac{2}{ex}$, 所以 $\ln x \geq -\frac{1}{ex}$, ①

又 $F(x) = f(x) - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex}$, 所以 $F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} \right)$,

令 $G(x) = \frac{1}{e} - \frac{x}{e^x}$, 所以 $G'(x) = \frac{x-1}{e^x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $G'(x) < 0$, $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $G'(x) > 0$, $G(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增;

所以 $G(x) \geq G(1) = 0$, ②

所以 $F(x) = \ln x - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} \geq -\frac{1}{ex} - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{ex} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} \right) \geq 0$,

又①②中取等号的条件不同, 所以 $F(x) > 0$

所以函数没有零点.

题目 4 (2024 · 湖南长沙 · 模拟预测) 设 n 次多项式 $P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ ($a_n \neq 0$), 若其满

足 $P_n(\cos x) = \cos nx$, 则称这些多项式 $P_n(t)$ 为切比雪夫多项式. 例如: 由 $\cos \theta = \cos \theta$ 可得切比雪夫多项式

$P_1(x) = x$, 由 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ 可得切比雪夫多项式 $P_2(x) = 2x^2 - 1$.

(1) 若切比雪夫多项式 $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 求实数 a, b, c, d 的值;

(2) 对于正整数 $n \geq 3$ 时, 是否有 $P_n(x) = 2x \cdot P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ 成立?

(3) 已知函数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有 3 个不同的零点, 分别记为 x_1, x_2, x_3 , 证明: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

【答案】 (1) $a = 4, b = d = 0, c = -3$

(2) $P_{n+1}(x) = 2x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x)$ 成立

(3) 证明见解析

【分析】 (1) 利用 $P_3(\cos \theta) = \cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$ 展开计算, 根据切比雪夫多项式可求得 a, b, d, c ; (2) 要证原等式成立, 只需证明 $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cdot \cos \theta$ 成立即可, 利用两角和与差的余弦公式可证结论成立;

(3) 由已知可得方程 $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有 3 个不同的实根, 令 $x = \cos \theta, \theta \in (0, \pi)$, 结合 (1) 可是 $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$, 可得 $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}, x_2 = \cos \frac{5\pi}{9}, x_3 = \cos \frac{7\pi}{9}$, 计算可得结论.

【详解】 (1) 依题意, $P_3(\cos \theta) = \cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta = (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2\sin^2 \theta \cos \theta$

$= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$,

因此 $P_3(x) = 4x^3 - 3x$, 即 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 4x^3 - 3x$, 则 $a = 4, b = d = 0, c = -3$,

(2) $P_{n+1}(x) = 2x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x)$ 成立.

这个性质是容易证明的, 只需考虑和差化积式 $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cdot \cos \theta$.

首先有如下两个式子:

$P_{n+1}(\cos \theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta$,

$P_{n-1}(\cos \theta) = \cos(n\theta - \theta) = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta$,

两式相加得, $P_{n-1}(\cos \theta) + P_{n+1}(\cos \theta) = 2\cos n\theta \cos \theta = 2P_n(\cos \theta) \cos \theta$,

将 $\cos\theta$ 替换为 x , 所以 $P_{n+1}(x) = 2x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x)$.

所以对于正整数 $n \geq 3$ 时, 有 $P_n(x) = 2x \cdot P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ 成立.

(3) 函数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有 3 个不同的零点 x_1, x_2, x_3 ,

即方程 $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有 3 个不同的实根,

令 $x = \cos\theta, \theta \in (0, \pi)$, 由 (1) 知 $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$, 而 $3\theta \in (0, 3\pi)$, 则 $3\theta = \frac{\pi}{3}$ 或 $3\theta = \frac{5\pi}{3}$ 或 $3\theta = \frac{7\pi}{3}$,

于是 $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}, x_2 = \cos \frac{5\pi}{9}, x_3 = \cos \frac{7\pi}{9}$,

则 $x_1 + x_2 + x_3 = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} - \left(\cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} \right)$,

而 $\cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} = \cos \left(\frac{3\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{9} - \frac{\pi}{9} \right) = 2\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9}$,

所以 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

题目 5 (2024 · 浙江 · 模拟预测) 已知实数 $q \neq 0$, 定义数列 $\{a_n\}$ 如下: 如果 $n = x_0 + 2x_1 + 2^2x_2 + \cdots + 2^kx_k, x_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, 2, \cdots, k$, 则 $a_n = x_0 + x_1q + x_2q^2 + \cdots + x_kq^k$.

(1) 求 a_7 和 a_8 (用 q 表示);

(2) 令 $b_n = a_{2^{n-1}}$, 证明: $\sum_{i=1}^n b_i = a_{2^n - 1}$;

(3) 若 $1 < q < 2$, 证明: 对于任意正整数 n , 存在正整数 m , 使得 $a_n < a_m \leq a_n + 1$.

【答案】 (1) $a_7 = 1 + q + q^2, a_8 = q^3$

(2) 证明见解析

(3) 证明见解析

【分析】 (1) 观察题目条件等式中的系数可得答案;

(2) $b_n = a_{2^{n-1}} = q^{n-1}$, 分别计算 $\sum_{i=1}^n b_i$ 和 $a_{2^n - 1}$ 可证明结论;

(3) 先根据 $a_{2^{n-1}} = q^{n-1}$ 无上界说明存在正整数 m , 使得 $a_n < a_m$, 分 $m-1$ 是偶数和 $m-1$ 是奇数分别说明.

【详解】 (1) 因为 $7 = 1 + 2 + 2^2$, 所以 $a_7 = 1 + q + q^2$;

因为 $8 = 2^3$, 所以 $a_8 = q^3$;

(2) 由数列 $\{a_n\}$ 定义得: $b_n = a_{2^{n-1}} = q^{n-1}$; 所以 $\sum_{i=1}^n b_i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$.

而 $2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$,

所以 $a_{2^n - 1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{i=1}^n b_i$;

(3) 当 $1 < q < 2$, 由 (2) 可知, $a_{2^{n-1}} = q^{n-1}$ 无上界, 故对任意 a_n , 存在 a_m , 使得 $a_m > a_n$.

设 m 是满足 $a_m > a_n$ 的最小正整数. 下面证明 $a_m \leq a_n + 1$.

① 若 $m-1$ 是偶数, 设 $m-1 = 2x_1 + 2^2x_2 + \cdots + 2^kx_k, x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \cdots, k$,

则 $m = 1 + 2x_1 + 2^2x_2 + \cdots + 2^kx_k$, 于是 $a_m = 1 + x_1q + x_2q^2 + \cdots + x_kq^k = 1 + a_{m-1}$.

因为 $a_n \geq a_{m-1}$, 所以 $a_m = 1 + a_{m-1} \leq a_n + 1$.

②若 $m-1$ 是奇数, 设 $m-1=1+2+2^2+\cdots+2^l+2^{l+2}x_{l+2}+\cdots+2^kx_k$,

则 $a_m-a_{m-1}=q^{l+1}-(1+q+q^2+\cdots+q^l)=(q-1)(1+q+q^2+\cdots+q^l)-(1+q+q^2+\cdots+q^l)+1<1$.

所以 $a_m<a_{m-1}+1\leq a_n+1$.

综上所述, 对于任意正整数 n , 存在正整数 m , 使得 $a_n<a_m\leq a_n+1$.

题目 6 (2024·辽宁·三模) 若实数列 $\{a_n\}$ 满足 $\forall n\in\mathbf{N}^*$, 有 $a_n+a_{n+2}\geq 2a_{n+1}$, 称数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”.

(1) 判断 $a_n=n^2, b_n=\ln n$ 是否为“ T 数列”, 并说明理由;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”, 证明: 对于任意正整数 k, m, n , 且 $k<m<n$, 都有 $\frac{a_n-a_m}{n-m}\geq \frac{a_m-a_k}{m-k}$

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”, 且 $\sum_{i=1}^{2024} a_i=0$. 令 $M=\max\{|a_1|, |a_{2024}|\}$, 其中 $\max\{a, b\}$ 表示 a, b 中的较大者.

证明: $\forall k\in\{1, 2, 3, \cdots, 2024\}$, 都有 $-\frac{2025}{2023}M\leq a_k\leq M$.

【答案】(1) 数列 $\{a_n\}$ 是“ T 数列”, 数列 $\{b_n\}$ 不是“ T 数列”;

(2) 证明见解析

(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据“ T 数列”的定义判断可得出结论;

(2) 由 $a_{k-1}+a_{k+1}\geq 2a_k (k=2, 3, \cdots)$ 可得出 $a_{k+1}-a_k\geq a_k-a_{k-1}$, 利用累加法结合不等式的基本性质可得

$\frac{a_n-a_m}{n-m}\geq a_{m+1}-a_m$, 以及 $\frac{a_m-a_k}{m-k}\leq a_m-a_{m-1}$, 再结合 $a_{m+1}-a_m\geq a_m-a_{m-1}$ 可证得结论成立;

(3) 首先当 $k=1$ 或 2024 时的情况, 再考虑 $k\in\{2, 3, \cdots, 2023\}$ 时, 结合(2)中结论考虑用累加法可证得结论.

【详解】(1) 因为 $a_n+a_{n+2}-2a_{n+1}=n^2+(n+2)^2-2(n+1)^2=2>0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是“ T 数列”,

因为 $b_n+b_{n+2}-2b_{n+1}=\ln n+\ln(n+2)-2\ln(n+1)=\ln(n^2+2n)-\ln(n^2+2n+1)<0$,

所以数列 $\{b_n\}$ 不是“ T 数列”;

(2) 令 $c_n=a_{n+1}-a_n$, 因为数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”, 所以 $a_n+a_{n+2}\geq 2a_{n+1}$

从而 $a_{n+2}-a_{n+1}\geq a_{n+1}-a_n$, 所以 $c_{n+1}\geq c_n$

因为 $1\leq k<m<n$, 所以

$$\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_{m+1}-a_m)}{n-m}$$

$$=\frac{c_{n-1}+c_{n-2}+\cdots+c_m}{n-m}\geq \frac{(n-m)c_m}{n-m}=c_m,$$

$$\frac{a_m-a_k}{m-k}=\frac{(a_m-a_{m-1})+(a_{m-1}-a_{m-2})+\cdots+(a_{k+1}-a_k)}{m-k}$$

$$=\frac{c_{m-1}+c_{m-2}+\cdots+c_k}{m-k}\leq \frac{(m-k)c_{m-1}}{m-k}=c_{m-1}$$

因为 $c_m\geq c_{m-1}$, 所以 $\frac{a_n-a_m}{n-m}\geq \frac{a_m-a_k}{m-k}$.

(3) 当 $k=1$ 或 2024 时, $-|a_k|\leq a_k\leq |a_k|$,

从而 $-\frac{2025}{2023}M\leq -M\leq -|a_k|\leq a_k\leq |a_k|\leq M$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/028000130073006072>