第4章 线性方程组的直接解法

教学目的

1. 掌握解线性方程组的消去法、选主元素消去法；
2. 掌握用直接三角分解法解线性方程组的方法；
3. 了解解对称正定矩阵线性方程组的平方根法与解三对角线方程组的追赶法；
4. 掌握向量，矩阵范数，矩阵的条件数等概念及方程组的扰动分析。

教学重点及难点

重点是

1. 解线性方程组的消去法、选主元素消去法；
2. 直接三角分解法解线性方程组的方法；
3. 向量，矩阵范数，矩阵的条件数等概念及方程组的扰动分析；

难点是方程组的扰动分析。

第4章 线性方程组的直接解法

实际中，存在大量的解线性方程组的问题。很多数值方法到最后也会涉及到线性方程组的求解问题：如样条插值的M和m关系式，曲线拟合的法方程，方程组的Newton迭代等问题。

对线性方程组：

或者：$Ax = b$

我们有**Gram**法则：当且仅当 $\det(A) \neq 0$ 时，有唯一的解，而且解为：

$$x_i = \frac{D_i}{D}, D = \det(A), D_i = \det\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}$$

但Gram法则不能用于计算方程组的解，如n＝100，10^{33}次/秒的计算机要算10^{120}年

解线性方程组的方法可以分为2类：

①直接法：准确，可靠，理论上得到的解是精确的

②迭代法：速度快，但有误差

对于中小型方程组，常用直接解法。从本质上来说，直接方法 的原理是找一个可逆矩阵M，使得MA是一个上三角阵，这一过程一般称为“消元”过程，消元之后再进行“回代”，即求解MAx=Mb。本章讨论Gauss消去法及其变形，以及一些情况下的特殊方法，最后进行误差分析。

本章讲解直接法

4.1 Gauss消去法

我们知道，下面有3种方程的解我们可以直接求出：

①

$$A = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a\ \ ) \Rightarrow$$

$$b$$

n次运算

②

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}, i = 1, \cdots, n$$

（n＋1）n/2次运算

③

（*n*＋1）*n*/2次运算

对方程组，作如下的变换，解不变

①交换两个方程的次序

②一个方程的两边同时乘以一个非0的数

③一个方程的两边同时乘以一个非0数，加到另一个方程

因此，对应的对增广矩阵(A, b)，作如下的变换，解不变

①交换矩阵的两行

②某一行乘以一个非0的数

③某一个乘以一个非0数，加到另一行

消元法就是对增广矩阵作上述行的变换，变为我们已知的3种类型之一，而后求根.

4.1.1 Gauss消去法的计算过程

我们把方程组Ax=b写成

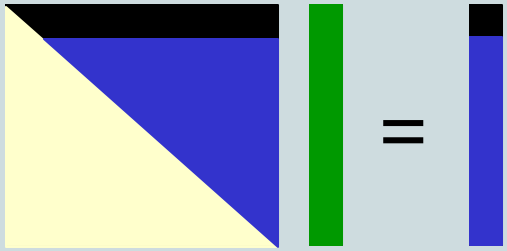
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 = a \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a \quad x \\ \\ a_n x \end{cases} \qquad (4.1.1)$$

设方程组(4,.1.1)的系数矩阵A非奇异,记

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,n) \quad (A^{(1)}, b^{(1)}) = (A, b)$$



思路 **首先将A化为上三角阵，再回代求解 。**



, 这样,方程组(4.1.1)又可写成 $A^{(1)}x = b^{(1)}$ 。消元过程就是要按确定的计算过程对方程组进行初等行变换,将方程组化为上三角方程组.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

步骤如下：

第一步消元:假设$a_{11}^{(1)} \neq 0$,作初等行变换运算

$$第1行\times\frac{-a_{i1}}{a_{11}}+第i行, i=2,\cdots,n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

运算量： ***(n-1)*(1+n)***

第二步：第2行$\times\dfrac{-a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$+第$i$行，$i=3,\cdots,n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a^{(2} & \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

运算量：***(n-2)*(1+n-1)=(n-2)n***

第k步消元:设消去法已进行k-1步,得到方程组 $A^{(k)}x = b^{(k)}$,此时对应的增广矩阵是

类似的做下去，我们有：

第k步：$\text{第k行} \times \frac{\overline{a}_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} + \text{第}i\text{行}, i = k+1, \cdots, n$

运算量： ***(n－k)*(1＋n－k＋1)=(n－k)(n－k＋2)***

***n－1*步以后，我们可以得到变换后的矩阵为：**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad \textbf{(4.1.4)}$$

这就完成了消元过程。

因此，总的运算量为：

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+2)$$

加上解上述上三角阵的运算量***(n+1)n/2***，总共为：

$$\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}=O(n^3)$$

因为A非奇异，所以可求解上三角方程组（4.1.4），通过逐次代入计算可得方程组的解，其计算公式为

$$\begin{cases} x_n = a_{n,n+1}^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \\ x_i = (a_{i,n+1}^{(i)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{n,n+1}^{(n)} x_j / a_{ii}^{(i)}, i = n-1, n-2, \cdots, 1. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

求解上式的过程称为回代过程。

以上由消去过程和回代过程合起来求解（4.1.1）的过程就称为Gauss消去法，或称为顺序Gauss消去法。

如果我们用Cramer法则计算（4.1.1）的解，要计算n+1个阶行列式，并作n次除法。如果用子式展开的方法计算行列式，则计算每个行列式有n ！次乘法。所以用Cramer法则大约需要（n+1）！次乘除法运算。例如，当n=10时，约需乘除法运算，而用Gauss消去法只需430次乘除法运算。

例4.1 用Gauss消去法解方程组

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 2, \\ \frac{9}{20}x_1 + x_2 + \frac{11}{20}x_3 = 2, \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

解 第一步消元，令 $l_{21} = 9/20, l_{31} = 2/3$，得增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{11}{10} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

第二步消元，令 $l_{32}=-10/63$，得增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{11}{10} \\ 0 & 0 & \frac{53}{63} & \frac{53}{63} \end{bmatrix}.$$

利用回代公式（4.1.5）依次得到 $x_3=1, x_2=1, x_1=1.$

在这个例子中我们写出的是分数运算的结果。如果在计算机上进行计算，系数矩阵和中间结果都用经过舍入的机器数表示，中间结果和方程组的解都会有误差。

4.1.2 矩阵的三角分解

从上面的消元过程可以看出，消元过程能顺利进行的重要条件是主元素 $a_{kk}^{k}\neq 0, k=1,2,\cdots,n-1.$。若用 A_k 表示矩阵A的k阶顺序主子阵，则有下面的定理。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/028012031053006047