

初一数学奥林匹克竞赛题（含答案）

初一奥数题一

1. 甲乙两人每年收入相等，甲每年储蓄全年收入的 $\frac{1}{5}$ ，乙每月比甲多开支100元，三年后负债600元。求每人每年收入多少？
2. 若 $S = 15 + 195 + 1995 + 19995 + \cdots + \underbrace{199\cdots 95}_{44 \uparrow 9}$ ，则和数 S 的末四位数字的和是多少？

3. 试确定等式 $\left| \frac{a-b}{a} \right| = \frac{b-a}{a}$ ($a \neq 0$) 成立的条件。

4. 一个人以3千米/小时的速度上坡，以6千米/小时的速度下坡，行程12千米共用了3小时20分钟，试求上坡与下坡的路程。

5. 求和：
$$\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

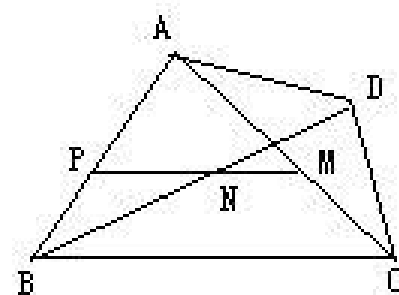


图 1-95

6. 证明：质数 p 除以30所得的余数一定不是合数。
7. 若 $p, q, \frac{2p-1}{q}, \frac{2q-1}{p}$ 都是整数，且 $p > 1, q > 1$ ，求 $p+q$ 的值。

8. 若两个整数 x, y 使 x^2+xy+y^2 能被9整除，证明： x 和 y 能被3整除。
9. 如图1—95所示。在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 的中点为 M, N ， MN 的延长线与 AB 边交于 P 点。求证： $\triangle PCD$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 的面积的一半。

解答：

1. 设每人每年收入 x 元，甲每年开支 $\frac{4}{5}x$ 元，依题意有 $3\left(\frac{4}{5}x + 1200\right) = 3x + 600$ ，
即 $\left(3 - \frac{12}{5}\right)x = 3600 - 600$ ，

所以 $x = 5000$ (元)。

$$\begin{aligned}
 2. \quad S &= (20 - 5) + (200 - 5) + \cdots + (\underbrace{20\cdots 0}_{45 \uparrow 0} - 5) \\
 &= 20 + 200 + \cdots + \underbrace{200\cdots 0}_{45 \uparrow 0} - 5 \times 45 \\
 &= \underbrace{22\cdots 20}_{45 \uparrow 2} - 225 \\
 &= \underbrace{22\cdots 21\,995}_{42 \uparrow 2}.
 \end{aligned}$$

所以 S 的末四位数字的和为 $1+9+9+5=24$.

$$3. \text{ 因为 } \left| \frac{a-b}{a} \right| = \frac{b-a}{a} = -\frac{a-b}{a}. \quad \text{所以} \quad \frac{a-b}{a} \leq 0.$$

要使 $\frac{a-b}{a} \leq 0$ 成立, 须当 $a > 0$ 时, $a-b \leq 0$, 即 $a \leq b$; 当 $a < 0$ 时, $\frac{a-b}{a} \geq 0$, 即

$a \geq b$. 即当 b

$\geq a > 0$ 或 $b \leq a < 0$ 时, 等式成立.

4. 设上坡路程为 x 千米, 下坡路程为 y 千米. 依题意则

$$\text{有 } \begin{cases} x+y=12, & \text{①} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 3\frac{1}{3} & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{由②有 } 2x+y=20, \quad \text{③}$$

由①有 $y=12-x$. 将之代入③得 $2x+12-x=20$.

所以 $x=8$ (千米), 于是 $y=4$ (千米).

5. 第 n 项为

$$\frac{2n+1}{n(n-1)(n+3)} = \frac{1}{n(n+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \\
& = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\
& = \frac{37}{36} - \frac{1}{3(n+1)} - \frac{5}{6(n+2)} - \frac{5}{6(n+3)}
\end{aligned}$$

6. 设 $p=30q+r$, $0 \leq r < 30$. 因为 p 为质数, 故 $r \neq 0$, 即 $0 < r < 30$. 假设 r 为合数, 由于 $r < 30$, 所以 r 的最小质约数只可能为 2, 3, 5. 再由 $p=30q+r$ 知, 当 r 的最小质约数为 2, 3, 5 时, p 不是质数, 矛盾. 所以, r 一定不是合数.

7. 设

$$\frac{2p-1}{q} \cdot \frac{2q-1}{p} = m, \quad (1)$$

由①式得 $(2p-1)(2q-1)=mpq$, 即

$$(4-m)pq+1=2(p+q).$$

可知 $m < 4$. 由①, $m > 0$, 且为整数, 所以 $m=1, 2, 3$. 下面分别研究 p, q .

(1) 若 $m=1$ 时, 有

$$\begin{cases} \frac{2p-1}{q} = 1, \\ \frac{2q-1}{p} = 1, \end{cases}$$

解得 $p=1, q=1$, 与已知不符, 舍去.

(2) 若 $m=2$ 时, 有

$$\begin{cases} \frac{2p-1}{q} = 2, \\ \frac{2q-1}{p} = 1; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \frac{2p-1}{q} = 1, \\ \frac{2q-1}{p} = 2. \end{cases}$$

因为 $2p-1=2q$ 或 $2q-1=2p$ 都是不可能的, 故 $m=2$ 时无解.

(3) 若 $m=3$ 时, 有

$$\begin{cases} \frac{2p-1}{q}=3, \\ \frac{2q-1}{p}=1; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{2p-1}{q}=1, \\ \frac{2q-1}{p}=3. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} p=5, \\ q=3; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} p=3, \\ q=5. \end{cases}$$

故 $p+q=8$.

8. 因为 $x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy$. 由题设, $9 \mid (x^2+xy+y^2)$, 所以 $3 \mid (x^2+xy+y^2)$, 从而 $3 \mid (x-y)^2$. 因为 3 是质数, 故 $3 \mid (x-y)$. 进而 $9 \mid (x-y)^2$. 由上式又可知, $9 \mid 3xy$, 故 $3 \mid xy$. 所以 $3 \mid x$ 或 $3 \mid y$. 若 $3 \mid x$, 结合 $3(x-y)$, 便得 $3 \mid y$; 若 $3 \mid y$, 同理可得, $3 \mid x$.

9. 连结 AN, CN 如图 1-103 所示. 因为 N 是 BD 的中点, 所以

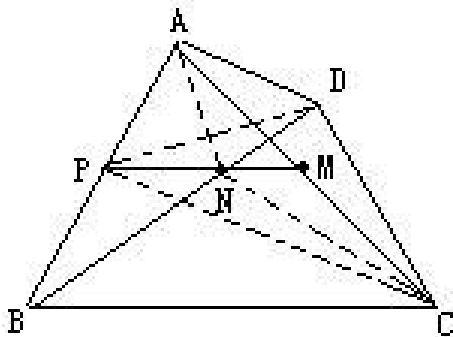


图 1-103

$$S_{\triangle AND} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD}, \quad \frac{1}{2} S_{\triangle CND} = \frac{1}{2} S_{\triangle CDB},$$

上述两式相加

$$S_{\triangle AND} + S_{\triangle CND} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

另一方面,

$$S_{\triangle PCD} = S_{\triangle CND} + S_{\triangle CNP} + S_{\triangle DNP}.$$

因此只需证明

$$S_{\triangle AND} = S_{\triangle CNP} + S_{\triangle DNP}.$$

由于 M, N 分别为 AC, BD 的中点, 所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle CNP} &= S_{\triangle CPM} - S_{\triangle CMN} \\ &= S_{\triangle APM} - S_{\triangle AMN} \\ &= S_{\triangle ANP}. \end{aligned}$$

又 $S_{\triangle DNP} = S_{\triangle BNP}$, 所以

$$S_{\triangle CNP}+S_{\triangle DNP}=S_{\triangle ANP}+S_{\triangle BNP}=S_{\triangle ANB}=S_{\triangle AND}.$$

初一奥数题二

1. 已知 $3x^2 - x = 1$, 求 $6x^3 + 7x^2 - 5x + 2000$ 的值.
2. 某商店出售的一种商品, 每天卖出 100 件, 每件可获利 4 元, 现在他们采用提高售价、减少进货量的办法增加利润, 根据经验, 这种商品每涨价 1 元, 每天就少卖出 10 件. 试问将每件商品提价多少元, 才能获得最大利润? 最大利润是多少元?

3. 如图 1-96 所示. 已知 $CB \perp AB$, CE 平分 $\angle BCD$, DE 平分 $\angle CDA$, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$. 求证: $DA \perp AB$

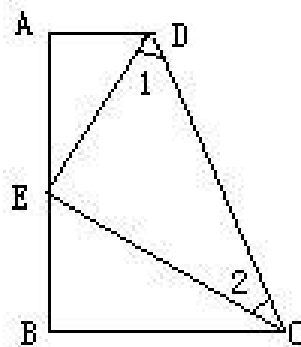


图 1-96

4. 已知方程组
$$\begin{cases} ax + by = -16, \\ cx + 20y = -224 \end{cases}$$

的解应为
$$\begin{cases} x = 8, \\ y = -10, \end{cases}$$

一个学生解题时把 c 抄错了, 因此得到的解为
$$\begin{cases} x = 12, \\ y = -13, \end{cases}$$
 求 $a_2 + b_2 + c_2$ 的值.

5. 求方程 $|xy| - |2x| + |y| = 4$ 的整数解.
6. 王平买了年利率 7.11% 的三年期和年利率为 7.86% 的五年期国库券共 35000 元, 若三年期国库券到期后, 把本息再连续存两个一年期的定期储蓄, 五年后与五年期国库券的本息总和为 47761 元, 问王平买三年期与五年期国库券各多少? (一年期定期储蓄年利率为 5.22%)

7. 对 k, m 的哪些值, 方程组
$$\begin{cases} y = (2k-1)x + 4 \\ y = (2m-1)x + 4 \end{cases}$$
 至少有一组解?

8. 求不定方程 $3x + 4y + 13z = 57$ 的整数解.
9. 小王用 5 元钱买 40 个水果招待五位朋友. 水果有苹果、梨子和杏子三种, 每个的价格分别为 20 分、8 分、3 分. 小王希望他和五位朋友都能分到苹果, 并且各人得到的苹果数目互不相同, 试问他能否实现自己的愿望?

解答:

1. 原式= $2x(3x^2-x)+3(3x^2-x)-2x+2000=2x^3 \times 1+3 \times 1-2x+2000=2003$.

2. 原来每天可获利 4×100 元, 若每件提价 x 元, 则每件商品获利 $(4+x)$ 元, 但每天卖出为 $(100-10x)$ 件. 如果设每天获利为 y 元, 则

$$y = (4+x)(100-10x) = 400 + 100x - 40x - 10x^2 = -10(x^2 - 6x + 9) + 90 + 400 = -10(x-3)^2 + 490.$$

所以当 $x=3$ 时, y 最大=490 元, 即每件提价 3 元, 每天获利最大, 为 490 元.

3. 因为 CE 平分 $\angle BCD$, DE 平分 $\angle ADC$ 及 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ (图 1-104), 所以

$$\angle ADC + \angle BCD = 180^\circ,$$

所以 $AD \parallel BC$ ① 又因为 $AB \perp BC$ ②

由①, ② $AB \perp AD$

4. 依题意有
$$\begin{cases} 8a - 10b = -16, \\ 8c - 200 = -224, \\ 12a - 13b = -16, \end{cases} \quad \text{解之得} \quad \begin{cases} a = 3, \\ b = 4, \\ c = -3, \end{cases}$$

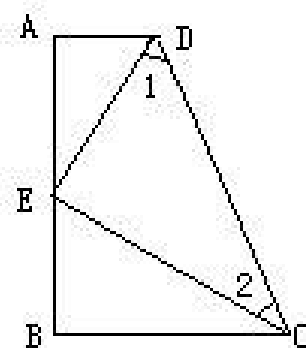


图 1-104

所以 $a^2 + b^2 + c^2 = 34$.

5. $|x| + |y| - 2|x| + |y| = 4$, 即 $|x|(|y| - 2) + (|y| - 2) = 2$,

所以 $(|x| + 1)(|y| - 2) = 2$.

因为 $|x| + 1 > 0$, 且 x, y 都是整数, 所以

所以有
$$\begin{cases} |x| + 1 = 1, \\ |y| - 2 = 2; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} |x| + 1 = 2, \\ |y| - 2 = 1. \end{cases}$$

所以有
$$\begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 1, \\ y_1 = 4; & y_2 = -4; & y_3 = 3; \\ x_4 = 1, & x_5 = -1, & x_6 = -1, \\ y_4 = -3; & y_5 = 3; & y_6 = -3. \end{cases}$$

6. 设王平买三年期和五年期国库券分别为 x 元和 y 元, 则
$$\begin{cases} x + y = 35000, \\ x(1 + 0.0711 \times 3) + y(1 + 0.0522 \times 5) = 47761, \end{cases}$$

因为 $y = 35000 - x$,

所以 $x(1 + 0.0711 \times 3)(1 + 0.0522) + (35000 - x)(1 + 0.0786 \times 5) = 47761$,

所以 $1.3433x + 48755 - 1.393x = 47761$,

所以 $0.0497x = 994$,

所以 $x = 20000$ (元), $y = 35000 - 20000 = 15000$ (元).

7. 因为 $(k - 1)x = m - 4$, ①

当 $k \neq 1$ 时, ①有唯一解 $x = \frac{m - 4}{k - 1}$, 此时 $y = m + \frac{k(m - 4)}{k - 1}$, 所以当 $k \neq 1$,

m 为一切实数时, 方程组有唯一解. 当 $k = 1$, $m = 4$ 时, ①的解为一切实数, 所以方程组有无穷多组解.

当 $k = 1$, $m \neq 4$ 时, ①无解.

所以, $k \neq 1$, m 为任何实数, 或 $k = 1$, $m = 4$ 时, 方程组至少有一组解.

8. 由题设方程得
$$x = \frac{1}{3}(57 - 4y - 13z) = 19 - y - 4z - \frac{1}{3}(y + z).$$

令 $\frac{1}{3}(y + z) = m$, 则

$$z = 3m - y.$$

$$x = 19 - y - 4(3m - y) - m = 19 + 3y - 13m.$$

原方程的通解为
$$\begin{cases} x = 19 + 3y - 13m, \\ y = n, \\ z = 3m - y, \end{cases} \quad \text{其中 } n, m \text{ 取任意整数值.}$$

9. 设苹果、梨子、杏子分别买了 x, y, z 个, 则
$$\begin{cases} 20x + 8y + 3z = 500, \\ x + y + z = 40. \end{cases}$$

消去 y , 得 $12x - 5z = 180$. 它的解是 $x = 90 - 5t$, $z = 180 - 12t$.

代入原方程, 得 $y = -230 + 17t$. 故 $x = 90 - 5t$, $y = -230 + 17t$, $z = 180 - 12t$.

由 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, 可得 $13\frac{9}{17} < t < 15$, 故 $t = 14$. 所以 $x = 20, y = 8, z = 12$.

因此, 小王的愿望不能实现, 因为按他的要求, 苹果至少要有 $1 + 2 + 3 + 4 +$

5+6=21>20 个.

初一奥数题三

1. 解关于 x 的方程 $ax + b - \frac{3x + 2ab}{3} = \frac{1}{2}$.

2. 解方程 $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$,

其中 $a+b+c \neq 0$.

3. 求 $(8x^3 - 6x^2 + 4x - 7)^3(2x^5 - 3)^2$ 的展开式中各项系数之和.

4. 液态农药一桶，倒出 8 升后用水灌满，再倒出混合溶液 4 升，再用水灌满，这时农药的浓度为 72%，求桶的容量.

5. 满足 $[-1.77x] = -2x$ 的自然数 x 共有几个？这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[-5.6] = -6$, $[3] = 3$.

6. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点. 求： P 到 $\triangle ABC$ 三顶点的距离和与三角形周长之比的取值范围.

7. 甲乙两人同时从东西两站相向步行，相会时，甲比乙多行 24 千米，甲经过 9 小时到东站，乙经过 16 小时到西站，求两站距离.

8. 黑板上写着三个数，任意擦去其中一个，将它改写成其他两数的和减 1，这样继续下去，最后得到 19, 1997, 1999, 问原来的三个数能否是 2, 2, 2?

9. 设有 n 个实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 其中每一个不是 +1 就是 -1, 且

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} = 0,$$

求证： n 是 4 的倍数.

解答：

1. 化简得 $6(a-1)x = 3 - 6b + 4ab$, 当 $a \neq 1$ 时, $x = \frac{3 - 6b + 4ab}{6(a-1)}$;

当 $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$ 时, x 为任何实数; 当 $a = 1$, $b \neq \frac{3}{2}$ 时, 无解.

2. 将原方程变形为 $\left(\frac{x-a}{bc} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{x-b}{ac} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{x-c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/028016016130006100>