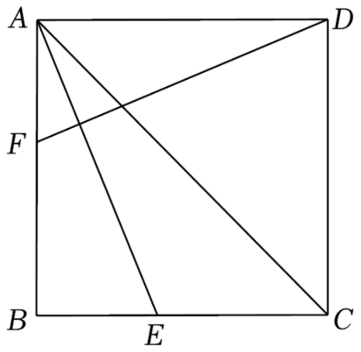
备战2023年中考数学历年真题+1年模拟新题分项详解（重庆专用）

专题9四边形（真题23模拟24）

历年中考真题

一．选择题（共12小题）

1．（2022•重庆）如图，在正方形$ABCD$中，AE平分$\angle BAC$交BC于点E，点F是边AB上一点，连接DF，若$BE=AF$，则$\angle CDF$的度数为（　　）



A．45°　　B．60°　　C．67.5°　　D．77.5°

【分析】根据正方形的性质和全等三角形的判定和性质，可以得到$\angle ADF$的度数，从而可以求得$\angle CDF$的度数．

【解析】解：∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$AD=BA$，$\angle DAF=\angle ABE=90°$，

在$\triangle DAF$和$\triangle ABE$中，

$$\begin{cases} AD=BA \\ \angle DAF=\angle ABE \\ AF=BE \end{cases}$$，

$\triangle DAF\cong\triangle ABE$（$SAS$），

$\angle ADF=\angle BAE$，

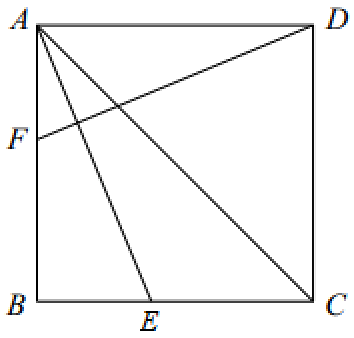
∵AE平分$\angle BAC$，四边形$ABCD$是正方形，

∴$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=22.5°$，$\angle ADC=90°$，

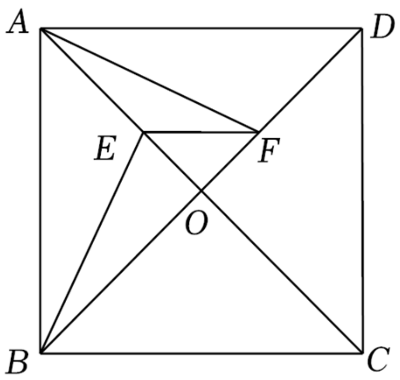
∴$\angle ADF=22.5°$，

∴$\angle CDF=\angle ADC-\angle ADF=90°-22.5°=67.5°$，

故选：C．



2．（2022•重庆）如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O．E、F 分别为 AC、BD 上一点，且 $OE=OF$，连接 AF，BE，EF．若 $\angle AFE=25^\circ$，则 $\angle CBE$ 的度数为（　　）



A．50°　　　　B．55°　　　　C．65°　　　　D．70°

【分析】利用正方形的对角线互相垂直平分且相等，等腰直角三角形的性质，三角形的内角和定理和全等三角形的判定与性质解答即可．

【解析】解：∵$ABCD$ 是正方形，

∴$\angle AOB=\angle AOD=90^\circ$，$OA=OB=OD=OC$．

∵$OE=OF$，

∴$\triangle OEF$ 为等腰直角三角形，

∴$\angle OEF=\angle OFE=45^\circ$，

∵$\angle AFE=25^\circ$，

∴$\angle AFO=\angle AFE+\angle OFE=70^\circ$，

∴$\angle FAO=20^\circ$．

在$\triangle AOF$ 和$\triangle BOE$ 中，

$$\begin{cases} OA=OB \\ \angle AOF=\angle BOE=90^\circ \\ OF=OE \end{cases}，$$

∴$\triangle AOF\cong\triangle BOE$（$SAS$）．

∴$\angle FAO=\angle EOB=20^\circ$，

∵$OB=OC$，

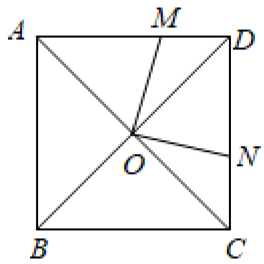
∴△OBC是等腰直角三角形，

∴$\angle OBC=\angle OCB=45°$，

∴$\angle CBE=\angle EBO+\angle OBC=65°$．

故选：C．

3．（2021•重庆）如图，正方形$ABCD$的对角线AC，BD交于点O，M是边AD上一点，连接OM，过点O作$ON\perp OM$，交CD于点N．若四边形$MOND$的面积是1，则AB的长为（　　）



A．1　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．2　　　　D．$2\sqrt{2}$

【分析】根据正方形的性质，可以得到△DOM≌△CON，然后即可发现四边形$MOND$的面积等于△DOC的面积，从而可以求得正方形$ABCD$的面积，从而可以求得AB的长．

【解析】解：∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$\angle MDO=\angle NCO=45°$，$OD=OC$，$\angle DOC=90°$，

∴$\angle DON+\angle CON=90°$，

∵$ON\perp OM$，

∴$\angle MON=90°$，

∴$\angle DON+\angle DOM=90°$，

∴$\angle DOM=\angle CON$，

在△DOM和△CON中，

$$\begin{cases}\angle DOM=\angle CON\\ OD=OC\\ \angle MDO=\angle NCO\end{cases},$$

∴△DOM≌△CON（ASA），

∵四边形$MOND$的面积是1，四边形$MOND$的面积＝△DOM的面积+△DON的面积，

∴四边形$MOND$的面积＝△CON的面积+△DON的面积＝△DOC的面积，

∴△DOC的面积是1，

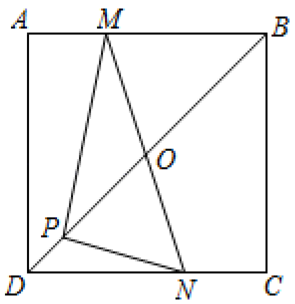
∴正方形 $ABCD$ 的面积是 4，

∴$AB^2=4$，

∴$AB=2$，

故选：C.

4.（2021•重庆）如图，把含 30° 的直角三角板 PMN 放置在正方形 $ABCD$ 中，$\angle PMN=30°$，直角顶点 P 在正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上，点 M，N 分别在 AB 和 CD 边上，MN 与 BD 交于点 O，且点 O 为 MN 的中点，则$\angle AMP$ 的度数为（　　）



A．60°　　　　B．65°　　　　C．75°　　　　D．80°

【分析】根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可知：$OM=OP$，从而得出$\angle DPM=150°$，利用四边形内角和定理即可求得.

【解析】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle ABD=45°$，

在 Rt△PMN 中，$\angle MPN=90°$，

∵O 为 MN 的中点，

∴$OP=\frac{1}{2}MN=OM$，

∵$\angle PMN=30°$，

∴$\angle MPO=30°$，

∴$\angle AMP=\angle MPO+\angle MBP$

$=30°+45°$

$=75°$，

故选：C.

5.（2017•云南）已知一个多边形的内角和是 900°，则这个多边形是（　　）

A．五边形　　　　B．六边形　　　　C．七边形　　　　D．八边形

【分析】设这个多边形是 n 边形，内角和是（$n-2$)•180°，这样就得到一个关于 n 的方程，从而求出边数 n 的值.

【解析】解：设这个多边形是 n 边形，

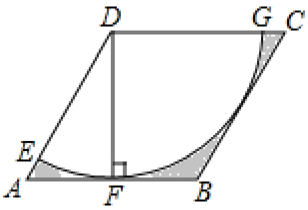
则（$n-2$)•180°＝900°，

解得：$n=7$，

即这个多边形为七边形.

故选：C.

6.（2016•重庆）如图，在边长为 6 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60°$，以点 D 为圆心，菱形的高 DF 为半径画弧，交 AD 于点 E，交 CD 于点 G，则图中阴影部分的面积是（　　）



A．$18\sqrt{3}-9\pi$　　B．$18-3\pi$　　C．$9\sqrt{3}-\frac{9\pi}{2}$　　D．$18\sqrt{3}-3\pi$

【分析】由菱形的性质得出 $AD=AB=6$，$\angle ADC=120°$，由三角函数求出菱形的高 DF，图中阴影部分的面积＝菱形 $ABCD$ 的面积－扇形 $DEFG$ 的面积，根据面积公式计算即可.

【解析】解：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle DAB=60°$，

∴$AD=AB=6$，$\angle ADC=180°-60°=120°$，

∵DF 是菱形的高，

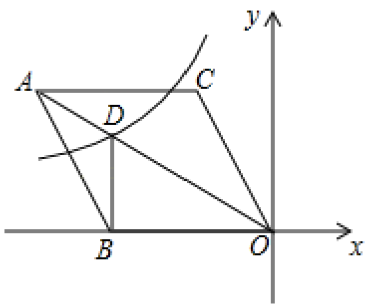
∴$DF\perp AB$，

∴$DF=AD$•$\sin60°=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

∴图中阴影部分的面积＝菱形 $ABCD$ 的面积－扇形 $DEFG$ 的面积$=6\times3\sqrt{3}-\frac{120\pi\times(3\sqrt{3})^2}{360}=18\sqrt{3}-9\pi$.

故选：A.

7.（2015•重庆）如图，在平面直角坐标系中，菱形 $ABOC$ 的顶点 O 在坐标原点，边 BO 在 x 轴的负半轴上，$\angle BOC=60°$，顶点 C 的坐标为（m，$3\sqrt{3}$)，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象与菱形对角线 AO 交于 D 点，连接 BD，当 $DB\perp x$ 轴时，k 的值是（　　）



A．$6\sqrt{3}$　　　　B．$-6\sqrt{3}$　　　　C．$12\sqrt{3}$　　　　D．$-12\sqrt{3}$

【分析】首先过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E，由$\angle BOC=60°$，顶点 C 的坐标为（m，$3\sqrt{3}$），可求得 OC 的长，进而根据菱形的性质，可求得 OB 的长，且$\angle AOB=30°$，继而求得 DB 的长，则可求得点 D 的坐标，又由反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象与菱形对角线 AO 交 D 点，即可求得答案．

【解析】解：过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E，

∵顶点 C 的坐标为（m，$3\sqrt{3}$），

∴$OE=-m$，$CE=3\sqrt{3}$，

∴$OC=\frac{CE}{\cos 60°}=6$，

∵菱形 $ABOC$ 中，$\angle BOC=60°$，

∴$OB=OC=6$，$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC=30°$，

∵$DB\perp x$ 轴，

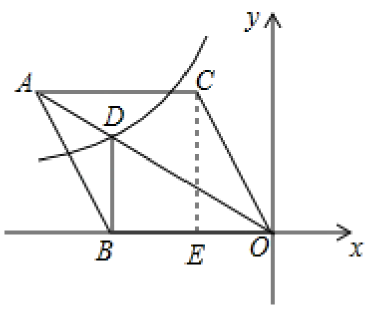
∴$DB=OB\bullet\tan 30°=6\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$，

∴点 D 的坐标为：（-6，$2\sqrt{3}$），

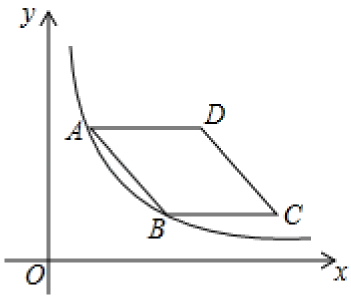
∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象与菱形对角线 AO 交 D 点，

∴$k=xy=-12\sqrt{3}$．

故选：D．



8．（2015•重庆）如图，在平面直角坐标系中，菱形 $ABCD$ 在第一象限内，边 BC 与 x 轴平行，A，B 两点的纵坐标分别为 3，1．反比例函数 $y=\frac{3}{x}$的图象经过 A，B 两点，则菱形 $ABCD$ 的面积为（　　）



A．2　　　　B．4　　　　C．$2\sqrt{2}$　　　　D．$4\sqrt{2}$

【分析】过点 A 作 x 轴的垂线，与 CB 的延长线交于点 E，根据 A，B 两点的纵坐标分别为 3，1，可得出横坐标，即可求得 AE，BE，再根据勾股定理得出 AB，根据菱形的面积公式：底乘高即可得出答案．

【解析】解：过点 A 作 x 轴的垂线，与 CB 的延长线交于点 E，

∵A，B 两点在反比例函数 $y=\frac{3}{x}$的图象上且纵坐标分别为 3，1，

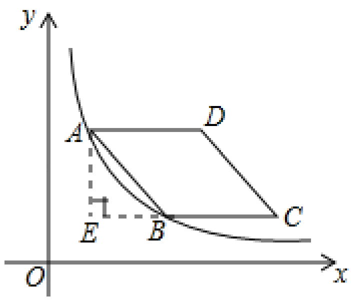
∴A，B 横坐标分别为 1，3，

∴$AE=2$，$BE=2$，

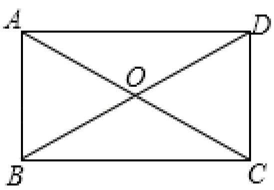
∴$AB=2\sqrt{2}$，

$S_{菱形ABCD}$=底×高$=2\sqrt{2}\times 2=4\sqrt{2}$，

故选：D．



9．(2014•重庆）如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle ACB=30^\circ$，则$\angle AOB$ 的大小为（　　）



A．30°　　　　B．60°　　　　C．90°　　　　D．120°

【分析】根据矩形的对角线互相平分且相等可得 $OB=OC$，再根据等边对等角可得$\angle OBC=\angle ACB$，然后根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和列式计算即可得解．

【解析】解：∵矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，

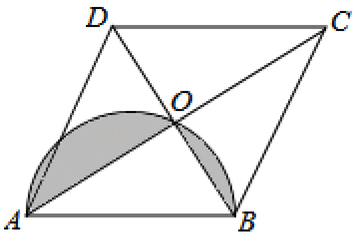
∴$OB=OC$，

∴$\angle OBC=\angle ACB=30^\circ$，

∴$\angle AOB=\angle OBC+\angle ACB=30^\circ+30^\circ=60^\circ$.

故选：B.

10．（2014•重庆）如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$AC=8$，$BD=6$，以 AB 为直径作一个半圆，则图中阴影部分的面积为（　　）



A．$25\pi-6$　　B．$\frac{25}{2}\pi-6$　　C．$\frac{25}{6}\pi-6$　　D．$\frac{25}{8}\pi-6$

【分析】根据菱形的对角线互相垂直平分求出 OA、OB，再利用勾股定理列式求出 AB，然后根据阴影部分的面积等于半圆的面积减去△AOB 的面积，列式计算即可得解，

【解析】解：∵菱形 $ABCD$ 中，$AC=8$，$BD=6$，

∴$AC\perp BD$ 且 $OA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times8=4$，

$OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times6=3$，

由勾股定理得，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

∴阴影部分的面积$=\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{25}{8}\pi-6$.

故选：D.

11．（2014•重庆）五边形的内角和是（　　）

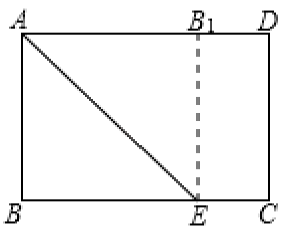
A．180°　　B．360°　　C．540°　　D．600°

【分析】直接利用多边形的内角和公式进行计算即可．

【解析】解：$(5-2)\cdot180^\circ=540^\circ$.

故选：C.

12．（2013•重庆）如图，矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=6cm$，$BC=8cm$，现将其沿 AE 对折，使得点 B 落在边 AD 上的点 B_1 处，折痕与边 BC 交于点 E，则 CE 的长为（　　）



A．6*cm' B．4*cm' C．2*cm' D．1*cm*

【分析】根据翻折的性质可得$\angle B=\angle AB_1E=90°$，$AB=AB_1$，然后求出四边形$ABEB_1$是正方形，再根据正方形的性质可得$BE=AB$，然后根据$CE=BC-BE$，代入数据进行计算即可得解．

【解析】解：∵沿AE对折点B落在边AD上的点B_1处，

∴$\angle B=\angle AB_1E=90°$，$AB=AB_1$，

又∵$\angle BAD=90°$，

∴四边形$ABEB_1$是正方形，

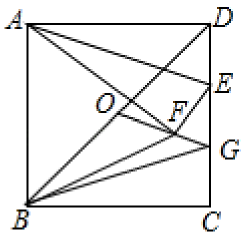
∴$BE=AB=6cm$，

∴$CE=BC-BE=8-6=2cm$．

故选：C．

二．填空题（共 3 小题）

13．（2016•重庆）如图，在正方形$ABCD$中，$AB=6$，点E在边CD上，$DE=\frac{1}{3}DC$，连接AE，将$\triangle ADE$沿AE翻折，点D落在点F处，点O是对角线BD的中点，连接OF并延长OF交CD于点G，连接BF，BG，则$\triangle BFG$的周长是__$\frac{12}{5}$_$(\sqrt{5}+\sqrt{10})$____．



【分析】如图，延长EF交BC于M，连接AM，OM，作$FN\perp CD$于N，$FR\perp BC$于R，$GH\perp OM$于H交FR于T，首先证明$\triangle AMF\cong\triangle AMB$，得$BM=MF$，设$BM=MF=x$，在$RT\triangle EMC$中利用勾股定理求出$x$，推出$BM=MC$，设$GC=y$，根据$FT\parallel OH$，得$\frac{FT}{OH}=\frac{TG}{GH}=\frac{RC}{CM}=\frac{EF}{EM}=\frac{2}{5}$，列出方程求出$GC$，再想办法分别求出$FG$、$BG$、$BF$即可解决问题．

【解析】解：如图延长EF交BC于M，连接AM，OM，作$FN\perp CD$于N，$FR\perp BC$于R，$GH\perp OM$于H交FR于T．

在 $RT\triangle AMF$ 和 $RT\triangle AMB$ 中，

$$\begin{cases}AM=AM\\AF=AB\end{cases},$$

∴$\triangle AMF\cong\triangle AMB$，

∴$BM=MF$，设 $BM=MF=x$，

在 $RT\triangle EMC$ 中，∵$EM^2=EC^2+MC^2$，

∴$(2+x)^2=(6-x)^2+4^2$，

∴$x=3$，

∴$BM=MC=3$，

∵$OB=OD$，

∴$OM=\frac{1}{2}CD=3$，

∵$FR\parallel EC$，

∴$\frac{FR}{EC}=\frac{MF}{ME}$，

∴$\frac{FR}{4}=\frac{3}{5}$，

∴$FR=\frac{12}{5}$，

设 $CG=y$，则 $FT=\frac{12}{5}-y$．$OH=3-y$，

∵$FT\parallel OH$，

∴$\frac{FT}{OH}=\frac{TG}{GH}=\frac{RC}{CM}=\frac{EF}{EM}=\frac{2}{5}$，

∴$\frac{\frac{12}{5}-y}{3-y}=\frac{2}{5}$，

∴$y=2$，

∴$CG=2$，$NG=CN-CG=\frac{2}{5}$，

在 $RT\triangle FNG$ 中，$FG=\sqrt{FN^2+NG^2}=\sqrt{(\frac{6}{5})^2+(\frac{2}{5})^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，

在 $RT\triangle BCG$ 中，$BG=\sqrt{BC^2+CG^2}=2\sqrt{10}$，

∵$AB=AF$，$MB=MF$，

∴$AM\perp BF$，

$\because \frac{1}{2}AM \cdot BF = 2 \times \frac{1}{2} \times AB \times BM$，

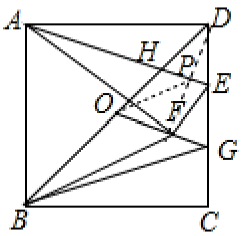
$\therefore BF = \frac{12\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \triangle BFG$ 的周长 $= \frac{12\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{10} + \frac{2\sqrt{10}}{5} = \frac{12}{5}(\sqrt{5}+\sqrt{10})$.

故答案为 $\frac{12}{5}(\sqrt{5}+\sqrt{10})$.

或延长 EF 交 BC 于 M，连接 OM，易证 $\triangle ABM \cong \triangle AFM$，所以 $MF = BM = OM = 3$，所以 $EF = EG = CG = 2$，所以 $BG = 2\sqrt{10}$. 在三角形 ABM 中易得 $BF = \frac{12}{5}\sqrt{5}$. 易知 $\angle FGE = \angle BGC$，$FG = \frac{1}{5}BG$，所以 $FG = \frac{2}{5}\sqrt{10}$.

解法二：如图，连接 DF 交 AE 于 P，连接 OP，设 BD 交 AE 于 H.



由翻折可知，AE 垂直平分 DF，P 为 DF 中点，

由 $\triangle ABH \backsim \triangle EDH$，得到 $\frac{DH}{BH} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{3}$，即 $DH = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4} \times 6\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$，

又 O 为 BD 中点，所以 H 为 OD 中点，所以 $HP \parallel OF$，$HP = \frac{1}{2}OF$，所以 E 为 DG 中点，且 $OF \perp DF$，

在 $Rt\triangle ADE$ 中，$AD = 6$，$DE = 2$，$DP \perp AE$ 于 P，由小时可得 $PE = \frac{\sqrt{10}}{5}$，$DP = \frac{3\sqrt{10}}{5}$，

在 $Rt\triangle DFG$ 中，PE 是中位线，所以 $EG = DE = 2$，$FG = 2PE = \frac{2\sqrt{10}}{5}$①

在 $Rt\triangle DPH$ 中，$DP = \frac{3\sqrt{10}}{5}$，$DH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $PH = \frac{3\sqrt{10}}{10}$，

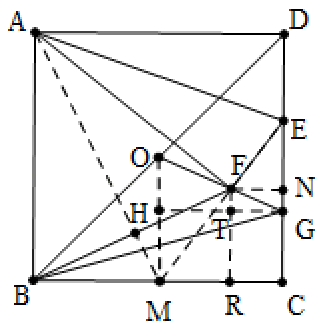
在 $Rt\triangle DOF$ 中，PH 是中位线，所以 $OF = 2PH = \frac{3\sqrt{10}}{5}$，$PF = DP = \frac{3\sqrt{10}}{5} = OF$，

在 $Rt\triangle OPF$ 中，$\frac{3\sqrt{10}}{5}$，所以 $OP = \frac{6\sqrt{5}}{5}$，

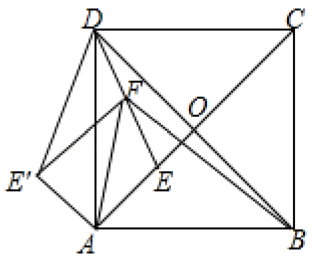
在 $Rt\triangle DBF$ 中，OP 是中位线，所以 $BF = 2OP = \frac{12\sqrt{5}}{5}$②

在 $Rt\triangle BCG$ 中，$BC = 6$，$CG = 2$，所以 $BG = 2\sqrt{10}$③

由①②③可知 $\triangle BFG$ 的周长是 $BF + FG + BG = \frac{12\sqrt{5} + 12\sqrt{10}}{5}$.



14.（2016•重庆）正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，DE 平分∠ADO 交 AC 于点 E，把△ADE 沿 AD 翻折，得到△ADE'，点 F 是 DE 的中点，连接 AF，BF，$E'F$．若 $AE=\sqrt{2}$．则四边形 $ABFE'$ 的面积是__$\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$__．



【分析】如图，连接 EB、EE'，作 $EM\perp AB$ 于 M，EE' 交 AD 于 N．易知△AEB≌△AED≌△ADE'，先求出正方形 $AMEN$ 的边长，再求出 AB，根据 $S_{四边形ABFE'}=S_{四边形AEFE'}+S_{\triangle AEB}+S_{\triangle EFB}$ 即可解决问题．

【解析】解：如图，连接 EB、EE'，作 $EM\perp AB$ 于 M，EE' 交 AD 于 N．

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC=CD=DA$，$AC\perp BD$，$AO=OB=OD=OC$，

$\angle DAC=\angle CAB=\angle DAE'=45°$，

根据对称性，△ADE≌△ADE'≌△ABE，

∴$DE=DE'$，$AE=AE'$，

∴AD 垂直平分 EE'，

∴$EN=NE'$，

∵$\angle NAE=\angle NEA=\angle MAE=\angle MEA=45°$，$AE=\sqrt{2}$，

∴$AM=EM=EN=AN=1$，

∵ED 平分∠ADO，$EN\perp DA$，$EO\perp DB$，

∴$EN=EO=1$，$AO=\sqrt{2}+1$，

∴$AB=\sqrt{2}AO=2+\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle AEB}=S_{\triangle AED}=S_{\triangle ADE'}=\frac{1}{2}\times1\times(2+\sqrt{2})=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle ADB}-2S_{\triangle AEB}=1+\sqrt{2}$，

$\because DF=EF$，

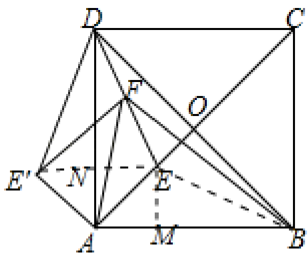
$\therefore S_{\triangle EFB}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore S_{\triangle DEE'}=2S_{\triangle ADE}-S_{\triangle AEE'}=\sqrt{2}+1$，$S_{\triangle DFE'}=\frac{1}{2}S_{\triangle DEE'}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，

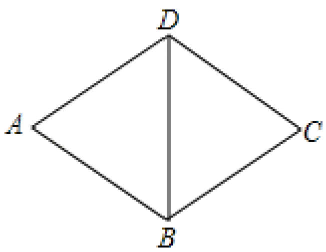
$\therefore S_{\text{四边形}AEFE'}=2S_{\triangle ADE}-S_{\triangle DFE'}=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore S_{\text{四边形}ABFE'}=S_{\text{四边形}AEFE'}+S_{\triangle AEB}+S_{\triangle EFB}=\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$．

故答案为$\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$．



15．（2014•重庆）如图，菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，$BD=7$，则菱形 $ABCD$ 的周长为__28__．



【分析】根据菱形的性质可得 $AB=AD$，然后根据$\angle A=60°$，可得三角形 ABD 为等边三角形，继而可得出边长以及周长．

【解析】解：$\because$四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore AB=AD$，

$\because \angle A=60°$，

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形，

$\because BD=7$，

$\therefore AB=BD=7$，

$\therefore$菱形 $ABCD$ 的周长$=4\times7=28$．

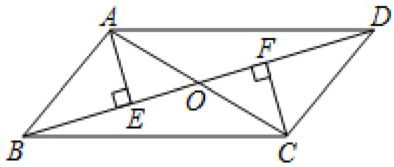
故答案为：28．

三．解答题（共 8 小题）

16.（2020•重庆）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，分别过点 A，C 作 $AE\perp BD$，$CF\perp BD$，垂足分别为 E，F．AC 平分 $\angle DAE$．

（1）若 $\angle AOE=50°$，求 $\angle ACB$ 的度数；

（2）求证：$AE=CF$．



【分析】（1）利用三角形内角和定理求出 $\angle EAO$，利用角平分线的定义求出 $\angle DAC$，再利用平行线的性质解决问题即可．

（2）证明 $\triangle AEO\cong\triangle CFO$（$AAS$）可得结论．

【解析】（1）解：∵$AE\perp BD$，

∴$\angle AEO=90°$，

∵$\angle AOE=50°$，

∴$\angle EAO=40°$，

∵CA 平分 $\angle DAE$，

∴$\angle DAC=\angle EAO=40°$，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$，

∴$\angle ACB=\angle DAC=40°$；

（2）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$OA=OC$，

∵$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，

∴$\angle AEO=\angle CFO=90°$，

∵$\angle AOE=\angle COF$，

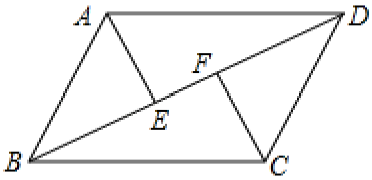
∴$\triangle AEO\cong\triangle CFO$（$AAS$），

∴$AE=CF$．

17.（2020•重庆）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，AE，CF 分别平分 $\angle BAD$ 和 $\angle DCB$，交对角线 BD 于点 E，F．

（1）若$\angle BCF=60°$，求$\angle ABC$的度数；

（2）求证：$BE=DF$.



【分析】（1）根据平行四边形的性质得到$AB\parallel CD$，根据平行线的性质得到$\angle ABC+\angle BCD=180°$，根据角平分线的定义得到$\angle BCD=2\angle BCF$，于是得到结论；

（2）根据平行四边形的性质得到$AB\parallel CD$，$AB=CD$，$\angle BAD=\angle DCB$，求得$\angle ABE=\angle CDF$，根据角平分线的定义得到$\angle BAE=\angle DCE$，根据全等三角形的性质即可得到结论．

【解析】解：（1）∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB\parallel CD$，

∴$\angle ABC+\angle BCD=180°$，

∵CF平分$\angle DCB$，

∴$\angle BCD=2\angle BCF$，

∵$\angle BCF=60°$，

∴$\angle BCD=120°$，

∴$\angle ABC=180°-120°=60°$；

（2）证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB\parallel CD$，$AB=CD$，$\angle BAD=\angle DCB$，

∴$\angle ABE=\angle CDF$，

∵AE，CF分别平分$\angle BAD$和$\angle DCB$，

∴$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAD$，$\angle DCF=\frac{1}{2}\angle BCD$，

∴$\angle BAE=\angle DCE$，

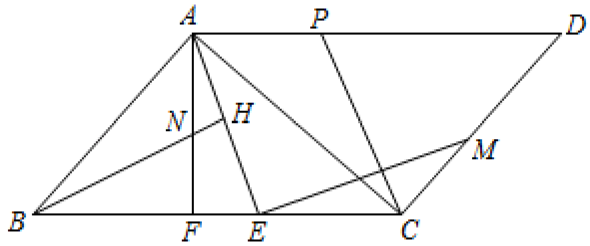
∴$\triangle ABE\cong\triangle CDF$（$ASA$），

∴$BE=DF$．

18．（2019•重庆）如图，在平行四边形$ABCD$中，点E在边BC上，连接AE，$EM\perp AE$，垂足为E，交CD于点M，$AF\perp BC$，垂足为F，$BH\perp AE$，垂足为H，交AF于点N，点P是AD上一点，连接CP．

（1）若$DP=2AP=4$，$CP=\sqrt{17}$，$CD=5$，求$\triangle ACD$的面积．

（2）若 $AE=BN$，$AN=CE$，求证：$AD=\sqrt{2}CM+2CE$．



【分析】（1）作 $CG\perp AD$ 于 G，设 $PG=x$，则 $DG=4-x$，在 Rt△PGC 和 Rt△DGC 中，由勾股定理得出方程，解方程得出 $x=1$，即 $PG=1$，得出 $GC=4$，求出 $AD=6$，由三角形面积公式即可得出结果；

（2）连接 NE，证明△NBF≌△EAF 得出 $BF=AF$，$NF=EF$，证明△ANB≌△CEA 得出∠CAE=∠ABN，推出∠ABF=∠FAC=45°，得出 $FC=AF=BF$，再证明△ANE≌△ECM 得出 $CM=NE$，由 $NF=\frac{\sqrt{2}}{2}NE=\frac{\sqrt{2}}{2}MC$，得出 $AF=\frac{\sqrt{2}}{2}MC+EC$，即可得出结论．

【解析】（1）解：作 $CG\perp AD$ 于 G，如图 1 所示：

设 $PG=x$，则 $DG=4-x$，

在 Rt△PGC 中，$GC^2=CP^2-PG^2=17-x^2$，

在 Rt△DGC 中，$GC^2=CD^2-GD^2=5^2-(4-x)^2=9+8x-x^2$，

∴$17-x^2=9+8x-x^2$，

解得：$x=1$，即 $PG=1$，

∴$GC=4$，

∵$DP=2AP=4$，

∴$AD=6$，

∴$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times AD\times CG=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$；

（2）证明：连接 NE，如图 2 所示：

∵$BH\perp AE$，$AF\perp BC$，$AE\perp EM$，

∴∠AEB+∠NBF=∠AEB+∠EAF=∠AEB+∠MEC=90°，

∴∠NBF=∠EAF=∠MEC，

在△NBF 和△EAF 中，$\begin{cases}\angle NBF=\angle EAF\\ \angle BFN=\angle EFA\\ AE=BN\end{cases}$，

∴△NBF≌△EAF（AAS），

∴$BF=AF$，$NF=EF$，

∴$\angle ABC=45°$，$\angle ENF=45°$，

∵$\angle ANB=90°+\angle EAF$，$\angle CEA=90°+\angle MEC$，

∴$\angle ANB=\angle CEA$，

在△ANB 和△CEA 中，$\begin{cases} AN=CE \\ \angle ANB=\angle CEA \\ BN=AE \end{cases}$，

∴△ANB≌△CEA（SAS），

∴$\angle CAE=\angle ABN$，

∵$\angle NBF=\angle EAF$，

∴$\angle ABF=\angle FAC=45°$

∴$FC=AF=BF$，

∴$\angle ANE=\angle BCD=135°$，$AD=BC=2AF$，

在△ANE 和△ECM 中，$\begin{cases} \angle MEC=\angle EAF \\ AN=EC \\ \angle ANE=\angle ECM \end{cases}$，

∴△ANE≌△ECM（ASA），

∴$CM=NE$，

又∵$NF=\frac{\sqrt{2}}{2}NE=\frac{\sqrt{2}}{2}MC$，

∴$AF=\frac{\sqrt{2}}{2}MC+EC$，

∴$AD=\sqrt{2}MC+2EC$．

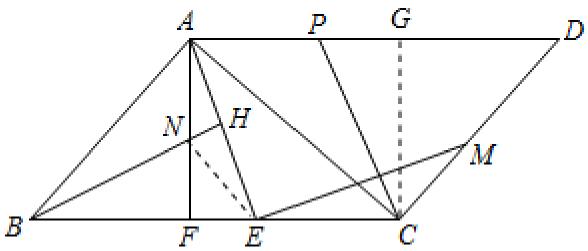


图 2

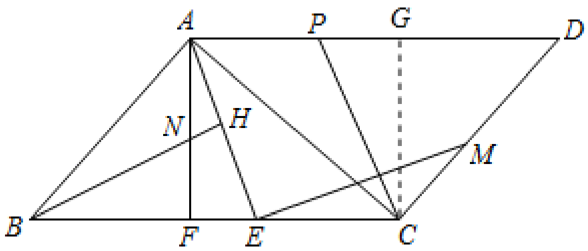


图 1

19．（2019•重庆）在▱ABCD 中，BE 平分∠ABC 交 AD 于点 E．

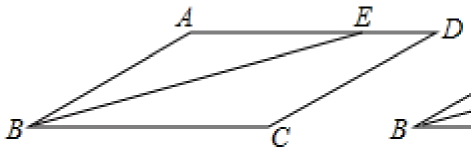


图1

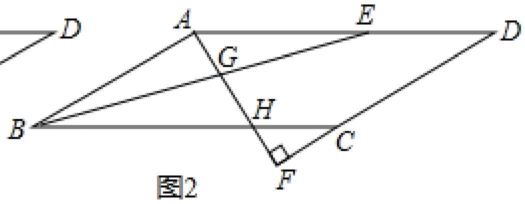


图2

（1）如图1，若$\angle D=30°$，$AB=\sqrt{6}$，求$\triangle ABE$的面积；

（2）如图2，过点A作$AF\perp DC$，交DC的延长线于点F，分别交BE，BC于点G，H，且$AB=AF$．求证：$ED-AG=FC$．

【分析】（1）作$BO\perp AD$于O，由平行四边形的性质得出$\angle BAO=\angle D=30°$，由直角三角形的性质得出$BO=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{6}}{2}$，证出$\angle ABE=\angle AEB$，得出$AE=AB=\sqrt{6}$，由三角形面积公式即可得出结果；

（2）作$AQ\perp BE$交DF的延长线于P，垂足为Q，连接PB、PE，证明$\triangle ABG\cong\triangle AFP$得出$AG=FP$，再证明$\triangle BPC\cong\triangle PED$得出$PC=ED$，即可得出结论．

【解析】（1）解：作$BO\perp AD$于O，如图1所示：

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$，$AB=CD$，$\angle ABC=\angle D=30°$，

$\therefore \angle AEB=\angle CBE$，$\angle BAO=\angle D=30°$，

$\therefore BO=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\because BE$平分$\angle ABC$，

$\therefore \angle ABE=\angle CBE$，

$\therefore \angle ABE=\angle AEB$，

$\therefore AE=AB=\sqrt{6}$，

$\therefore \triangle ABE$的面积$=\frac{1}{2}AE\times BO=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3}{2}$；

（2）证明：

证法1：过A作$AQ\perp BE$交DF的延长线于P，垂足为Q，连接PB、PE，如图2所示：

$\because AB=AE$，$AQ\perp BE$，

$\therefore \angle ABE=\angle AEB$，$BQ=EQ$，

$\therefore PB=PE$，

$\therefore \angle PBE=\angle PEB$，

$\therefore \angle ABP=\angle AEP$，

$\because AB\parallel CD$，$AF\perp CD$，

∴$AF\perp AB$，

∴$\angle BAF=90°$，

∵$AQ\perp BE$，

∴$\angle ABG+\angle BAQ=\angle FAP+\angle BAQ=90°$，

∴$\angle ABG=\angle FAP$，

在△ABG和△FAP中，

$$\begin{cases}\angle ABG=\angle FAP\\ AB=AF\\ \angle BAG=\angle AFP=90°\end{cases}，$$

∴△ABG≌△AFP（ASA），

∴$AG=FP$，

∵$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，

∴$\angle ABP+\angle BPC=180°$，$\angle BCP=\angle D$，

∵$\angle AEP+\angle PED=180°$，

∴$\angle BPC=\angle PED$，

在△BPC和△PED中，

$$\begin{cases}\angle BCP=\angle D\\ \angle BPC=\angle PED\\ PB=PE\end{cases}，$$

∴△BPC≌△PED（AAS），

∴$PC=ED$，

∴$ED-AG=PC-AG=PC-FP=FC$；

证法 2：过 A 作 $AN\perp BE$ 交 DC 的延长线于 N，交 BE 于 Q，交 BC 于 P，如图 3 所示：

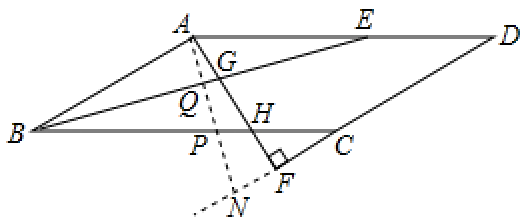


图 3

∵$AB\parallel CD$，

∴$\angle BAQ=\angle ANF$，

∵$\angle BAQ+\angle GAQ=\angle BGA+\angle GAQ=90°$，

∴$\angle BAQ=\angle BGA=\angle ANF$，

又∵$\angle BAG=\angle AFN=90°$，$AB=AF$，

∴$\triangle ABG\cong\triangle FAN$（$AAS$），

∴$AG=FN$，

∴$AG+FC=FN+FC=CN$，

由（1）得：$AB=AE$，

∵$AN\perp BE$，

∴$\angle BAP=\angle DAP$，

∵$AD// BC$，

∴$\angle DAP=\angle BPA$，

∴$\angle BAP=\angle BPA$，

∴$AB=PB=AE$，

同理：$CP=CN$，

∵$AD=BC$，

∴$ED=CP=CN$，

∴$ED=AG+FC$，

∴$ED-AG=FC$.

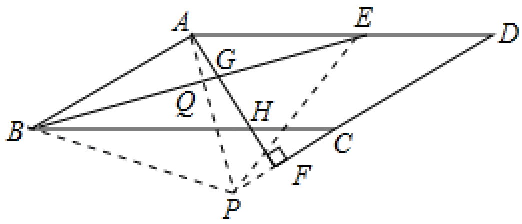


图 2

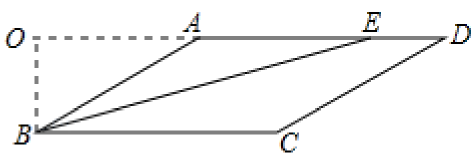
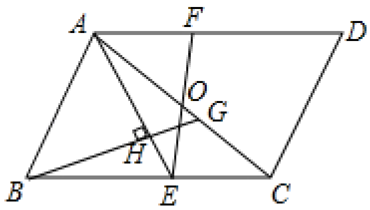


图1

20.（2018•重庆）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 O 是对角线 AC 的中点，点 E 是 BC 上一点，且 $AB=AE$，连接 EO 并延长交 AD 于点 F．过点 B 作 AE 的垂线，垂足为 H，交 AC 于点 G．

（1）若 $AH=3$，$HE=1$，求$\triangle ABE$ 的面积；

（2）若$\angle ACB=45°$，求证：$DF=\sqrt{2}CG$．



【分析】(1) 利用勾股定理即可得出 BH 的长，进而运用公式得出△ABE 的面积；

(2) 过 A 作 $AM\perp BC$ 于 M，交 BG 于 K，过 G 作 $GN\perp BC$ 于 N，判定△AME≌△BNG（AAS），可得 $ME=NG$，进而得出 $BE=\sqrt{2}GC$，再判定△AFO≌△CEO（AAS），可得 $AF=CE$，即可得到 $DF=BE=\sqrt{2}CG$.

【解析】解：(1) ∵$AH=3$，$HE=1$，

∴$AB=AE=4$，

又∵Rt△ABH 中，$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{7}$，

∴$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AE\times BH=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$；

(2) 如图，过 A 作 $AM\perp BC$ 于 M，交 BG 于 K，过 G 作 $GN\perp BC$ 于 N，则∠AMB=∠AME=∠BNG=90°，

∵∠ACB=45°，

∴∠MAC=∠NGC=45°，

∵$AB=AE$，

∴$BM=EM=\frac{1}{2}BE$，∠BAM=∠EAM，

又∵$AE\perp BG$，

∴∠AHK=90°=∠BMK，而∠AKH=∠BKM，

∴∠MAE=∠NBG，

设∠BAM=∠MAE=∠NBG=α，则∠BAG=45°+α，∠BGA=∠GCN+∠GBC=45°+α，

∴$AB=BG$，

∴$AE=BG$，

在△AME 和△BNG 中，

$$\begin{cases}\angle AME=\angle BNG\\ \angle MAE=\angle NBG,\\ AE=BG\end{cases}$$

∴△AME≌△BNG（AAS），

∴$ME=NG$，

在等腰 Rt△CNG 中，$NG=NC$，

∴$GC=\sqrt{2}NG=\sqrt{2}ME=\frac{\sqrt{2}}{2}BE$，

∴$BE=\sqrt{2}GC$，

∵O 是 AC 的中点，

∴$OA=OC$，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$，$AD=BC$，

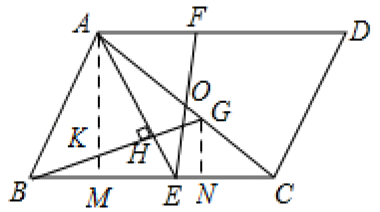
∴$\angle OAF=\angle OCE$，$\angle AFO=\angle CEO$，

∴△AFO≌△CEO（AAS），

∴$AF=CE$，

∴$AD-AF=BC-EC$，即 $DF=BE$，

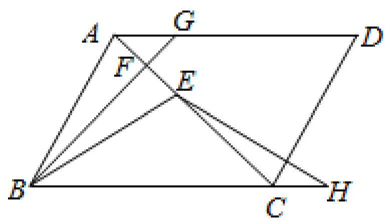
∴$DF=BE=\sqrt{2}CG$.



21．（2018•重庆）如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle ACB=45°$，点 E 在对角线 AC 上，$BE=BA$，$BF\perp AC$ 于点 F，BF 的延长线交 AD 于点 G．点 H 在 BC 的延长线上，且 $CH=AG$，连接 EH.

（1）若 $BC=12\sqrt{2}$，$AB=13$，求 AF 的长；

（2）求证：$EB=EH$.



【分析】（1）依据 $BF\perp AC$，$\angle ACB=45°$，$BC=12\sqrt{2}$，可得等腰 Rt△BCF 中，$BF=\sin45°\times BC=12$，再根据勾股定理，即可得到 Rt△ABF 中，$AF=\sqrt{13^2-12^2}=5$；

（2）连接 GE，过 A 作 $AP\perp AG$，交 BG 于 P，连接 PE，判定四边形 $APEG$ 是正方形，即可得到 $PF=$

EF，$AP=AG=CH$，进而得出$\triangle APB\cong\triangle HCE$，依据$AB=EH$，$AB=BE$，即可得到$BE=EH$.

【解析】解：（1）如图，∵$BF\perp AC$，$\angle ACB=45°$，$BC=12\sqrt{2}$，

∴等腰Rt$\triangle BCF$中，$BF=\sin45°\times BC=12$，

又∵$AB=13$，

∴Rt$\triangle ABF$中，$AF=\sqrt{13^2-12^2}=5$；

（2）如图，连接GE，过A作$AP\perp AG$，交BG于P，连接PE，

∵$BE=BA$，$BF\perp AC$，

∴$AF=FE$，

∴BG是AE的垂直平分线，

∴$AG=EG$，$AP=EP$，

∵$\angle GAE=\angle ACB=45°$，

∴$\triangle AGE$是等腰直角三角形，即$\angle AGE=90°$，

$\triangle APE$是等腰直角三角形，即$\angle APE=90°$，

∴$\angle APE=\angle PAG=\angle AGE=90°$，

又∵$AG=EG$，

∴四边形$APEG$是正方形，

∴$PF=EF$，$AP=AG=CH$，

又∵$BF=CF$，

∴$BP=CE$，

∵$\angle APG=45°=\angle BCF$，

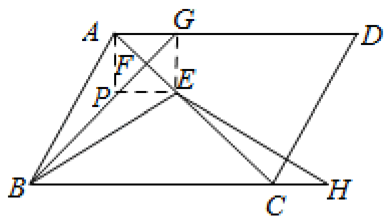
∴$\angle APB=\angle HCE=135°$，

∴$\triangle APB\cong\triangle HCE$（$SAS$），

∴$AB=EH$，

又∵$AB=BE$，

∴$BE=EH$.

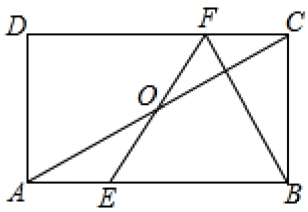


22.（2013•重庆）如图，矩形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 AB、CD 上，$AE=CF$，EF 与对角线 AC 交于点 O，且 $BE=BF$，$\angle BEF=2\angle BAC$.

（1）求证：$OE=OF$；

（2）求证：$\triangle BOF\cong\triangle BCF$；

（3）若 $BC=2\sqrt{3}$，求 AB 的长.



【分析】（1）利用矩形的性质得出 $\angle CAE=\angle ACF$，$\angle CFO=\angle AEO$，进而求出 $\triangle AOE\cong\triangle COF$（$AAS$），得出答案即可；

（2）连接 OB，根据矩形性质即可证明结论；

（3）首先求出 $\angle BAC=30°$，进而得出 $\angle BEF=2\angle OBE$，利用勾股定理求出 AB 即可.

【解析】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AB\parallel CD$，

∴$\angle CAE=\angle ACF$，$\angle CFO=\angle AEO$，

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases}\angle CAE=\angle ACF\\ \angle CFO=\angle AEO,\\ AE=CF\end{cases}$$

∴$\triangle AOE\cong\triangle COF$（$AAS$），

∴$OE=OF$；

（2）证明：连接 OB，如图所示：

∵$BF=BE$，$OE=OF$，

∴$BO\perp EF$，$\angle EBO=\angle FBO$，

∴$\angle BOF=90°$

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle BCF=90^\circ$，

∵$\angle BEF=2\angle BAC$，$\angle BEF=\angle BAC+\angle EOA$，

∴$\angle BAC=\angle EOA$，

∴$AE=OE$，

∵$AE=CF$，$OE=OF$，

∴$OF=CF$，

在 Rt△BOF 和 Rt△BCF 中，

$\begin{cases} BF=BF \\ OF=CF \end{cases}$，

∴Rt△BOF≌Rt△BCF（HL）；

（3）解：∵$BF=BE$，$OE=OF$，

∴$BO\perp EF$，

由（1）知，△AOE≌△COF，

∴$OA=OC$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle ABC=90^\circ$，

∴$BO=\frac{1}{2}AC=OA$，

∴$\angle BAC=\angle OBA$，

∵$\angle BEF=2\angle BAC$，

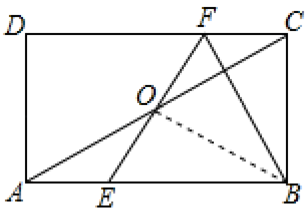
∴$\angle BEF=2\angle OBE$，

在 Rt△OBE 中，$\angle BEO+\angle OBE=90^\circ$，

∴$\angle BAC=30^\circ$，

∴$AC=2BC=4\sqrt{3}$，

∴$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{48-12}=6$.

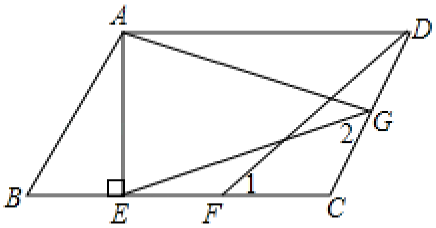


23.（2013•重庆）已知，如图，在▱$ABCD$ 中，$AE\perp BC$，垂足为 E，$CE=CD$，点 F 为 CE 的中点，点 G

为 CD 上的一点，连接 DF、EG、AG，$\angle 1=\angle 2$．

（1）若 $CF=2$，$AE=3$，求 BE 的长；

（2）求证：$\angle CEG=\frac{1}{2}\angle AGE$．



【分析】（1）求出 $DC=CE=2CF=4$，求出 AB，根据勾股定理求出 BE 即可；

（2）过 G 作 $GM\perp AE$ 于 M，证$\triangle DCF\cong\triangle ECG$，推出 $CG=CF$，求出 M 为 AE 中点，得出等腰三角形 AGE，根据性质得出 GM 是$\angle AGE$ 的角平分线，即可得出答案．

【解析】（1）解：∵$CE=CD$，点 F 为 CE 的中点，$CF=2$，

∴$DC=CE=2CF=4$，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB=CD=4$，

∵$AE\perp BC$，

∴$\angle AEB=90°$，

在 Rt$\triangle ABE$ 中，由勾股定理得：$BE=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$；

（2）证明：解法一、过 G 作 $GM\perp AE$ 于 M，

∵$AE\perp BE$，$GM\perp AE$，

∴$GM\parallel BC\parallel AD$，

∵在$\triangle DCF$ 和$\triangle ECG$ 中，

$$\begin{cases}\angle 1=\angle 2\\ \angle C=\angle C,\\ CD=CE\end{cases}$$

∴$\triangle DCF\cong\triangle ECG$（$AAS$），

∴$CG=CF$，$CE=CD$，

∵$CE=2CF$，

∴$CD=2CG$，